

ACOPLAMIENTO EN LA ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN Y LA ALTURA MEDIANTE FILTRO EXTENDIDO DE KALMAN

Claudio J. Paz^a, Gonzalo F. Perez Paina^a y Martín A. Pucheta^{a,b}

^a*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba, Maestro López esq Cruz Roja Argentina, Córdoba, Argentina, {cpaz,gperez,mpucheta}@frc.utn.edu.ar, <http://ciiii.frc.utn.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras Clave: Altura, Orientación, Filtro de Kalman, Acoplamiento, UAV

Resumen. Los multicopteros han ganado gran popularidad en los últimos años por su capacidad de suspenderse en el aire manteniendo la posición, y de esta manera realizar tareas que antes requerían costosa infraestructura o simplemente no eran posibles, como la captura de imágenes desde grandes alturas, inspecciones de lugares peligrosos como los interiores de torres de centrales térmicas, represas, puentes, líneas de transmisión de energía eléctrica, etc. La posición del multicoptero en general es determinada por GPS o con algoritmos visuales. Sin embargo, el GPS tiene grandes errores en la estimación de la altura, y la estimación de posición relativa mediante odometría visual necesita asistencia de un sensor de altura para resolver el problema de escala. Para determinar la altura de un vehículo mediante un sonar o cualquier sensor de rango, es importante tener en cuenta la orientación del vehículo ya que al estar rígidamente vinculados, los cambios en la orientación hacen que el eje de sensibilidad del sensor detecte una distancia mayor de la que se encuentra al suelo realmente. Este error en la estimación de la altura no solo provocaría un error en la escala sino además produciría una posible pérdida de sustentación. Esto es muy común en multicopteros ya que para cambiar de posición, deben perder balance en el sentido que se espera el movimiento. En general, la orientación es tenida en cuenta en la estimación de altura con sonar, pero de una manera desacoplada, por un lado se determina la orientación y por otro la altura teniendo en cuenta la orientación ya calculada. En este trabajo se presenta un filtro de Kalman que acopla la orientación del vehículo con la medición de la distancia al suelo medida por un sensor de rango para determinar la altura. Se demuestra que utilizando el filtro acoplado se atenúa el ruido del sensor al mismo tiempo que se disminuye el error en la estimación de la altura. Se muestran resultados obtenidos en simulaciones y con data-sets públicos.

1. INTRODUCCIÓN

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT, o UAV por ser acrónimo de *Unmanned Aerial Vehicles*), particularmente los multicópteros, se han vuelto populares en la última década debido a su relativo bajo costo lo que facilita la construcción artesanal (Lim et al., 2012), pero principalmente debido a su capacidad de volar manteniendo su posición en un mismo punto, en una maniobra conocida como *hovering* o vuelos con baja velocidad de desplazamiento (Cabarbaya et al., 2016). Las imágenes que se toman desde el VANT cuando vuela con estas características tienen diversas aplicaciones, por ejemplo fotografía deportiva, monitoreo ambiental (Lu et al., 2015) relevamiento de cultivos y otro tipo de terrenos (Samad et al., 2013), inspección de zonas peligrosas o de desastres (Erdelj y Natalizio, 2016), etc.

Este tipo de VANT cuenta con distintos tipos de sensores que permiten su estabilización en el aire (Hoffmann et al., 2010) así como los sensores que determinan la distancia del vehículo hasta el suelo (Paz et al., 2014b). Para la estabilización, esto es mantener el plano formado por las cuatro hélices paralelo al suelo, se utilizan acelerómetros y giróscopos los cuales son llamados sensores inerciales. Para determinar la altura de vuelo o altitud se utilizan telémetros, los cuales pueden ser de distintas tecnologías, por ejemplo sonares o láseres de distintas longitudes de onda.

Debido a que estos VANT tienen sus hélices fijas, para desplazarse deben perder balance en la dirección que se desea el movimiento. En ese momento el sensor de rango que se utiliza para determinar la altitud pierde la perpendicularidad de su eje sensible respecto del plano formado por el suelo, por lo que la lectura del mismo es errada si se considera directamente como altura. De no tenerse en cuenta la orientación del vehículo, se produce una pérdida de sustentación por dos motivos: el primero tiene que ver con la pérdida de empuje en sentido vertical en pos del desplazamiento lateral. El segundo es que, debido a que el sensor de altura devuelve una lectura mayor a la distancia real al suelo, el controlador disminuya el empuje para compensar este incremento en la distancia. De compensarse la altura en el segundo caso, indirectamente se evitaría la pérdida de sustentación por el primero.

En este trabajo se presenta el acoplamiento entre los sensores inerciales y el telémetro en el filtro utilizado para determinar la orientación y la altura. Se describe un filtro extendido de Kalman para realizar la fusión de la información proveniente de los distintos sensores en el VANT. La evaluación del método propuesto se realiza utilizando tanto valores simulados como valores reales.

2. FILTROS BAYESIANOS

Un sistema, planta o proceso puede ser modelado por una sucesión de variables de estado $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathbb{R}^n$ donde n es la dimensión del vector de estados del sistema y k representando la sucesión de instantes temporales (Särkkä, 2013). La evolución de estas variables de estado de un instante de tiempo a otro se pueden modelar como

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (1)$$

donde la función de transición del sistema $f_k(\cdot)$ puede depender del instante k , y \mathbf{w}_{k-1} es un ruido blanco con media cero y covarianza conocida que puede escribirse como

$$E\{\mathbf{w}_{k-1}\} = 0 \quad \text{y} \quad E\{\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T\} = Q_{k-1} \quad (2)$$

en donde $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ y $Q_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

En general, el estado del sistema no puede ser observado de forma directa sino a través de mediciones parciales y posiblemente perturbadas por ruido de diversas fuentes. Se puede describir esta situación modelando la relación entre el estado del sistema y la sucesión de observaciones $\{\mathbf{z}_k : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathbb{R}^m$ como

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (3)$$

donde la función de observación $h_k(\cdot)$ también puede depender del instante k , por ejemplo en sistemas con sensores de múltiples tasas de muestreo (Gibbs, 2011). El ruido \mathbf{v}_k también es ruido blanco con media cero y covarianza conocida

$$E\{\mathbf{v}_{k-1}\} = 0 \quad \text{y} \quad E\{\mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}^T\} = R_{k-1} \quad (4)$$

en donde $\mathbf{v}_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ y $R_{k-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, siendo m la dimensión del vector de observación.

Definido el modelo del sistema, se puede estimar el estado del mismo al instante k por medio de todas las observaciones realizadas hasta ese instante, junto con la condición inicial

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:0}) = p(\mathbf{x}_0) \quad , \quad (5)$$

a partir de (1) y (3)

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k) \quad (6)$$

la cual es llamada *densidad de probabilidad* del estado.

La estimación de la función densidad de probabilidad (o pdf por las siglas de *probability density function*) buscada, $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$, se realiza en dos pasos llamados *predicción del estado* y *actualización de la observación*. En el primero se predice el estado en el instante k a partir del estado estimado en el instante previo por medio de la ecuación Chapman-Kolmogorov

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (7)$$

donde $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ es llamada *densidad de probabilidad de transición* y se puede obtener como

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) p(\mathbf{w}_{k-1}) d\mathbf{w}_{k-1} \quad (8)$$

con

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) = \delta(\mathbf{x}_k - f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})) \quad (9)$$

determinada a partir de (1).

El segundo paso consiste en actualizar o corregir la pdf estimada a priori (7) mediante la identidad de Bayes

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \quad (10)$$

en donde la *verosimilitud* $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ se calcula a partir de (3) como

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \int \delta(\mathbf{z}_k - h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)) p(\mathbf{v}_k) d\mathbf{v}_k \quad (11)$$

y donde la *evidencia* o *factor de normalización* $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{k-1})$, está dado por

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (12)$$

En resumen, se llaman filtros bayesianos a los algoritmos secuenciales que permiten determinar el estado del sistema $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ dadas todas las lecturas de los sensores hasta el tiempo k utilizando recursivamente la ecuación de predicción

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (13)$$

y luego la ecuación de actualización

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \quad (14)$$

suponiendo conocido el modelo de un sistema, incluyendo el modelo de cada sensor disponible y una parametrización del ruido que puede afectar a la planta y a las mediciones.

2.1. FILTRO DE KALMAN

Si $f_k(\cdot)$ y $h_k(\cdot)$ pueden representarse con matrices F_k y H_k respectivamente formando un sistema lineal, y además \mathbf{w}_{k-1} y \mathbf{v}_k pueden considerarse como ruidos aditivos, se puede escribir el modelo del sistema dado por (1) y (3) como

$$\mathbf{x}_k = F_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (15)$$

$$\mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (16)$$

donde, para $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la *matriz de transición de estado* y para $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la *matriz de observación* (Kalman, 1960; Simon, 2006). Además se supone que el sistema posee una distribución gaussiana, es decir que el vector de estados se considera una variable aleatoria \mathbf{x} que puede ser representada con una función normal multivariada cuyos parámetros son la media $\hat{\mathbf{x}}$ y matriz de covarianza P

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, P) = \frac{1}{(2\pi|P|)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T P^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right] \quad (17)$$

donde $|P|$ es el determinante de la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la cual se considera definida positiva. Con todo esto, la estimación secuencial bayesiana dada por las ecuaciones (13) y (14) es conocida como *Filtro de Kalman* (Kalman, 1960) y cuya solución en estas condiciones es cerrada y óptima bajo cualquier criterio de minimización (Maybeck, 1982).

Recordando que

$$Q_k = E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} \quad \text{y} \quad R_k = E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} \quad (18)$$

son las matrices de covarianza de los ruidos gaussianos \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k , se puede escribir que

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_k; 0, Q_k) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_k; 0, R_k) \quad (19)$$

Si además se supone que el estado estimado en $k-1$ se puede describir mediante una distribución normal de la forma

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \quad (20)$$

con media $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ y covarianza $P_{k-1|k-1}$ conocidas al tiempo $k-1$, la ecuación de predicción del estado (13) queda

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k \mathbf{x}_{k-1}, Q_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} . \quad (21)$$

Se puede demostrar que

$$\int \mathcal{N}(\mathbf{x}; F_k \mathbf{y}, Q) \mathcal{N}(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{y}}, P) d\mathbf{x} = \mathcal{N}(\mathbf{x}; F \hat{\mathbf{y}}, O) \quad (22)$$

con $O = Q + F P F^T$, por lo que la ecuación (21) se puede escribir como

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \quad (23)$$

donde

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} , \quad (24)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_{k-1} \quad (25)$$

son el estado estimado a priori y su matriz de covarianza obtenidos en la *etapa de predicción* del filtro de Kalman.

Una vez que la observación del estado \mathbf{z}_k es realizada, se corrige la predicción del estado mediante la *etapa de actualización* con

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) , \quad (26)$$

donde

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \quad (27)$$

la cual es llamada *matriz de ganancia de Kalman*.

Una derivación de la ecuación de corrección de la matriz de covarianza se puede encontrar en [Simon \(2006\)](#), donde

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \quad (28)$$

o es simplemente

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} . \quad (29)$$

2.2. FILTRO EXTENDIDO DE KALMAN

Por lo general, las restricciones impuestas para el desarrollo del filtro Kalman vistas en la Sección 2.1 no se pueden sostener, debido principalmente a que las funciones que modelan el sistema no son lineales. El problema principal que surge de este caso es que no se puede asegurar que el estado estimado tenga distribución normal, como en la versión lineal del filtro de Kalman. No obstante, se pueden obtener estimaciones aproximadas consideradas subóptimas, que pueden ser parametrizadas como una distribución normal. Por ejemplo, si el sistema bajo análisis se puede escribir como

$$\mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} , \quad (30)$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k , \quad (31)$$

con $f_{k-1}(\cdot)$ y $h_k(\cdot)$ funciones no lineales diferenciables, se pueden aproximar las mismas mediante una serie de Taylor haciendo genéricamente

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + Jf(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2) \quad (32)$$

donde

$$Jf(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(\hat{\mathbf{x}}) & \partial_{x_2} f_1(\hat{\mathbf{x}}) & \dots & \partial_{x_n} f_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ \partial_{x_1} f_2(\hat{\mathbf{x}}) & \partial_{x_2} f_2(\hat{\mathbf{x}}) & \dots & \partial_{x_n} f_2(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(\hat{\mathbf{x}}) & \partial_{x_2} f_m(\hat{\mathbf{x}}) & \dots & \partial_{x_n} f_m(\hat{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (33)$$

es el *Jacobiano de la función* f , con $\partial_{x_i}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$. Operando de la misma manera para h si fuese no lineal.

Suponiendo entonces que al instante k se cuenta con la estimación aproximada $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ y su covarianza $P_{k-1|k-1}$, se puede reescribir la ecuación de proceso dada por (30) utilizando la serie de Taylor de f_{k-1} de primer orden alrededor de $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ como

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \hat{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad , \quad (34)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \quad \text{y} \quad \hat{F}_{k-1} = Jf_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \quad . \quad (35)$$

Siguiendo el mismo desarrollo que para el filtro de Kalman se pueden obtener las ecuaciones para la etapa de predicción

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \quad , \quad (36)$$

$$\hat{F}_{k-1} = Jf_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad , \quad (37)$$

$$P_{k|k-1} = Q_{k-1} + \hat{F}_{k-1} P_{k-1|k-1} \hat{F}_{k-1}^T \quad , \quad (38)$$

y para la etapa de actualización

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad , \quad (39)$$

$$\hat{H}_k = Jh_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k} \quad , \quad (40)$$

$$K_k = P_{k|k-1} \hat{H}_k^T (R_k + \hat{H}_k P_{k|k-1} \hat{H}_k^T)^{-1} \quad , \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad , \quad (42)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k \hat{H}_k) P_{k|k-1} \quad , \quad (43)$$

siempre que las funciones f y h sean diferenciables, y mientras que las condiciones iniciales $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ y $P_{0|0}$ sean conocidas.

3. MODELADO DEL SISTEMA

3.1. Estimación de la orientación con tres grados de libertad

El cuaternión unitario es útil para representar la orientación de un vehículo, ya que no tiene las restricciones de utilización de los ángulos de Euler (Pucheta et al., 2014), y sus componentes están acotadas en un rango entre $[-1, 1]$ lo que lo hace más estable numéricamente.

Se propone para este caso un vector de estado

$$\mathbf{x} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (44)$$

formado por los elementos del cuaternión unitario que representa la orientación del UAV, por lo que la *ecuación de proceso* del sistema se puede obtener a partir de la evolución temporal del cuaternión unitario. Para estimar el valor del cuaternión de un tiempo discreto a otro en la *ecuación de proceso* se utilizan las lecturas de velocidad angular dadas por el giróscopo. Debido a errores numéricos, errores en la calibración o simplemente debido al ruido de los sensores, la estimación debe corregirse con la *ecuación de observación* utilizando las lecturas de acelerómetro para corregir los ángulos de roll y pitch, y el magnetómetro o compás electrónico para corregir el ángulo de yaw. Cuando el magnetómetro no puede ser utilizado debido a las perturbaciones generadas por estructuras metálicas dentro de edificios, la corrección del ángulo de yaw se realiza mediante la asistencia de una cámara apuntando hacia abajo (Paz et al., 2014a).

3.2. Modelo cinemático de cuaternión como ecuación de proceso

Dado el cuaternión $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ que representa la orientación de un cuerpo rígido (en este caso el UAV); y dado el vector $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ que representa a las velocidades angulares del vehículo, los cambios en la orientación de este cuerpo respecto del tiempo se pueden expresar mediante la derivada temporal del cuaternión unitario

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

desarrollada en Vathsal (1991).

En Shuster (2008) se muestra como el producto de cuaterniones puede ser escrito como un producto matriz-vector, por lo que (45) quedaría

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \Omega(\boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{q} \quad (46)$$

donde

$$\Omega(\boldsymbol{\omega}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

es la matriz antisimétrica de 4×4 asociada al vector de velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}$.

Si se considera que no hay grandes cambios de velocidad angular en el período dado por el intervalo $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ se puede tomar a $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_k$ como un valor constante de modo que la matriz $\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)$ sea independiente del tiempo. Con estas restricciones la solución discreta de la ecuación diferencial (46) viene dada por

$$\mathbf{q}_k = e^{\frac{1}{2} \Omega(\boldsymbol{\omega}_k) \Delta t} \mathbf{q}_{k-1} \quad \text{con} \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0) \quad (48)$$

o simplemente

$$\mathbf{q}_k = \Theta(\Delta t)\mathbf{q}_{k-1} \quad (49)$$

donde $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ es el intervalo de integración.

Se puede representar $\Theta(\Delta t)$ usando el desarrollo en serie de Taylor

$$\Theta(\Delta t) = I_{4 \times 4} + \frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)\Delta t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)\Delta t\right)^3 + \dots \quad (50)$$

y usando las propiedades de la matriz antisimétrica

$$\Theta(\Delta t) = I_{4 \times 4} + \frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)\Delta t - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2 |\boldsymbol{\omega}_k|^2 I_{4 \times 4} \quad (51)$$

$$- \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^3 |\boldsymbol{\omega}_k|^2 \Omega(\boldsymbol{\omega}_k) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^4 |\boldsymbol{\omega}_k|^4 I_{4 \times 4} \quad (52)$$

$$+ \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^5 |\boldsymbol{\omega}_k|^4 \Omega(\boldsymbol{\omega}_k) - \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^6 |\boldsymbol{\omega}_k|^6 I_{4 \times 4} + \dots \quad (53)$$

Agrupando los términos según exponentes pares o impares

$$\Theta(\Delta t) = \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t\right)^4 - \dots\right) I_{4 \times 4} \quad (54)$$

$$+ \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}_k|}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t\right)^5 - \dots\right) \Omega(\boldsymbol{\omega}_k) \quad (55)$$

se puede escribir a $\Theta(\Delta t)$ en términos de seno y coseno

$$\Theta(\Delta t) = \cos\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t\right) I_{4 \times 4} + \frac{\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)}{|\boldsymbol{\omega}_k|} \sin\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t\right) \quad (56)$$

Si además se considera que el intervalo Δt junto con los valores de velocidad angular son pequeños, es válido asumir que $|\boldsymbol{\omega}_k|\Delta t \ll 1$, por lo que se puede simplificar (56) quedando

$$\Theta(\Delta t) \approx I_{4 \times 4} + \frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega}_k)\Delta t \quad (57)$$

lo que es válido ya que la tasa de muestreo del giróscopo es elevada respecto de la capacidad de cambio de orientación del vehículo.

Finalmente, la solución aproximada en tiempo discreto de (46) queda

$$\mathbf{q}_k = \left(\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{\omega})\Delta t + I\right) \mathbf{q}_{k-1} \quad (58)$$

Si en (50) se toman los dos primeros términos se obtiene el mismo resultado que en (57), sin embargo, esta última ecuación se obtiene a partir de la solución cerrada dada por (56).

3.3. Modelos de observación

Para minimizar los posibles errores del giróscopo, se plantean dos tipos de correcciones. El acelerómetro corregirá los ángulos de roll y pitch mientras que información provista por la cámara se utilizará para corregir el ángulo de yaw. El objetivo es modelar la respuesta de los sensores antes mencionados en función del estado del sistema, en este caso dado por el cuaternión unitario, de modo que las respuestas se puedan incluir en la etapa de actualización de un filtro de Kalman.

3.3.1. Modelo de acelerómetro como detector de inclinación

Cuando el UAV está en vuelo estacionario, o en vuelo con velocidad constante como por ejemplo en vuelo de reconocimiento, las mediciones del acelerómetro son útiles para determinar la inclinación, debido a que un acelerómetro en reposo detecta la acción de la gravedad sobre su masa de prueba. Se puede utilizar este fenómeno para modelar la respuesta del acelerómetro en estas condiciones en función de la orientación. Es importante destacar que la respuesta del acelerómetro es independiente del ángulo de yaw y solo depende de los ángulos de roll y pitch.

Si se considera al vector gravedad en el marco de navegación

$$\mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad g]^T \quad (59)$$

siendo g la aceleración debido a la gravedad, la cual se puede aproximar a $9,81\text{m/s}^2$, desde el marco de referencia del sensor la lectura ideal del acelerómetro será

$$\mathbf{g}^s = R_b^s R_n^b \mathbf{g}^n \quad (60)$$

aunque de alinearse los marcos de referencia del cuerpo y del sensor se puede considerar que $R_b^s = I_{3 \times 3}$ y $\mathbf{g}^b = \mathbf{g}^s$ por lo que la expresión quedará

$$\mathbf{g}^b = R_n^b \mathbf{g}^n \quad (61)$$

con \mathbf{g}^b la acción de la gravedad *vista* desde el UAV.

En Pucheta et al. (2014) se mostró que la matriz de cambio de marco de referencia R_n^b en función de un cuaternión unitario $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ es

$$R_n^b = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_0) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_0) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_0) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_0) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

por lo que (61) se simplifica a

$$\mathbf{g}^b = g \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 - q_2 q_0) \\ 2(q_2 q_3 + q_1 q_0) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

debido a que el vector gravedad \mathbf{g}^n solo tiene la componente en el eje z distinto de cero. La ecuación (63) es considerada como modelo de observación del acelerómetro a bordo del UAV respecto del cuaternión unitario que representa la orientación del vehículo y se puede escribir como

$$\mathbf{g}^b = h_a(\mathbf{x}) \quad (64)$$

3.3.2. Modelo de compás electrónico o sensor de ángulo ψ

Si se cuenta con algún compás electrónico u otro sensor cuya salida sea un valor de ángulo de yaw ψ , por ejemplo un módulo de visión como en Araguás et al. (2015) también se podrían corregir los errores de orientación dados por el giróscopo para complementar las lecturas del acelerómetro.

Se puede representar la orientación de un vehículo con ángulos de Euler o bien con un cuaternión unitario. También, bajo ciertas restricciones, se pueden intercambiar estas representaciones.

Dado un cuaternión unitario $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ que representa la orientación de un cuerpo rígido, el ángulo de yaw ψ de la representación en ángulos de Euler de la orientación del mismo cuerpo es

$$\psi = \arctan \left(\frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right) . \quad (65)$$

La mayoría de los lenguajes de programación disponen de funciones trigonométricas para encontrar el arcotangente, pero en cada caso el ángulo obtenido está acotado en algún intervalo. Por ejemplo, utilizando la función `atan2` el ángulo resultante está acotado en el rango $[-\pi/2, \pi/2]$. Esto presenta una discontinuidad en los casos en donde el vehículo realice un giro completo.

Si bien esto puede parecer un simple problema de representación de la orientación, puede ser un problema mayor cuando se calcula la innovación en un filtro de Kalman. Este problema también está presente si el compás o el sensor que entrega el ángulo de yaw lo hace acotando el mismo por ejemplo en el intervalo $[0, 2\pi]$.

En lugar de usar el ángulo ψ , se propone utilizar un vector ampliado

$$\psi_a = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \quad (66)$$

que si bien, aumenta el tamaño del problema, evita la aparición de discontinuidades.

Además, si se utilizan las identidades trigonométricas

$$\cos(\arctan(\gamma)) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \quad \text{y} \quad \sin(\arctan(\gamma)) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \quad (67)$$

donde

$$\gamma = \frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \quad (68)$$

(66) queda

$$\psi_a = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\gamma^2 + 1} \\ \gamma \\ \sqrt{\gamma^2 + 1} \end{bmatrix} \quad (69)$$

la cual será considerada como la ecuación que modela la observación del ángulo ψ en función del cuaternión unitario que representa la orientación del UAV, y se puede escribir como

$$\psi_a = h_\psi(\mathbf{x}) . \quad (70)$$

3.3.3. Modelo de observación de un telémetro

En el caso que el eje de sensibilidad del telémetro no fuese perpendicular al plano del obstáculo, la lectura del telémetro no se corresponderá con la altura a la que se encuentra el sensor. Este efecto se muestra exageradamente en la Fig. 1 donde la lectura del telémetro será mayor en magnitud que la distancia que lo separa del plano.

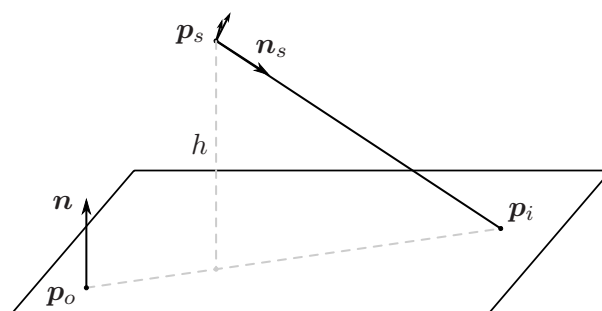


Figura 1: Modelo de observación de la altura usando el telémetro. Se puede ver que la lectura del telémetro depende tanto de la altura como de la orientación.

Se puede modelar la lectura del telémetro, s^s , como la distancia entre dos puntos dada por la norma del vector formado con dichos puntos de modo que

$$s^s = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_s\| \quad (71)$$

donde \mathbf{p}_s es el origen de coordenadas del sistema de referencia del telémetro y \mathbf{p}_i es el punto de intersección entre la recta L definida por el eje de medición del telémetro y el plano Π representando el piso.

La recta L está definida por el punto \mathbf{p}_s^s y el vector $\mathbf{n}_s^s = [0 \ 0 \ 1]^T$ en el marco de referencia del telémetro. Representando todo en el marco de referencia de navegación

$$\mathbf{n}_s^n = R_b^n R_s^b \mathbf{n}_s^s \quad (72)$$

donde R_b^n y R_s^b son las matrices de cambio de coordenadas entre los marcos de referencia de cuerpo y navegación, y de sensor y cuerpo respectivamente.

La ecuación de la recta definida por un punto y un vector

$$L = \mathbf{p}_s^n + \lambda \mathbf{n}_s^n \quad (73)$$

tiene su expresión paramétrica

$$\begin{aligned} x &= p_{s_x}^n + \lambda n_{s_x}^n \\ y &= p_{s_y}^n + \lambda n_{s_y}^n \\ z &= p_{s_z}^n + \lambda n_{s_z}^n \end{aligned} \quad (74)$$

En cuanto al plano que modela el suelo, Π , se lo puede representar con el plano de navegación, por lo que al quedar alineados se puede definir a Π con el vector normal al plano $\mathbf{n}^n = [0, 0, 1]^T$ y un punto cualquiera, por ejemplo el origen de coordenadas del marco de referencia de navegación $\mathbf{p}_o^n = [0, 0, 0]^T$. La ecuación general del plano se forma a partir del producto punto entre la normal al plano \mathbf{n}^n y un vector \mathbf{v}^n perteneciente al plano

$$\mathbf{v}^n \cdot \mathbf{n}^n = 0 \quad (75)$$

en donde \mathbf{v}^n está formado por un punto genérico $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$ y un punto conocido perteneciente al plano, en este caso, el mismo origen de coordenadas. De esta forma

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}_o) \cdot \mathbf{n}^n = 0 \quad (76)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}^n = 0 \quad (77)$$

por lo que $z = 0$ resulta ser la ecuación del plano. Agregando esta ecuación como condición en la parametrización de la recta (74) resulta

$$z = p_{s_z}^n + \lambda n_{s_z}^n = 0 \implies \lambda = \frac{-p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} \quad (78)$$

por lo que el punto de intersección de la recta L con el plano Π será

$$\mathbf{p}_i^n = \begin{bmatrix} p_{s_x}^n - \frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_x}^n \\ p_{s_y}^n - \frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_y}^n \\ p_{s_z}^n - \frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_z}^n \end{bmatrix} \quad (79)$$

entonces el segmento formado por el punto de intersección y el origen del sistema de coordenadas del telémetro (ambos expresados en el sistema de referencia de navegación) es

$$\mathbf{s}_{si} = \mathbf{p}_i^n - \mathbf{p}_s^n = \begin{bmatrix} -\frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_x}^n \\ -\frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_y}^n \\ -\frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_z}^n \end{bmatrix} \quad (80)$$

y la lectura del telémetro s queda

$$s = \|\mathbf{s}_{si}\| = \sqrt{s_{si_x}^2 + s_{si_y}^2 + s_{si_z}^2} = \sqrt{\left(\frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_x}^n\right)^2 + \left(\frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_y}^n\right)^2 + \left(\frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} n_{s_z}^n\right)^2} \quad (81)$$

Reordenando queda

$$s = \frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} \sqrt{(n_{s_x}^n)^2 + (n_{s_y}^n)^2 + (n_{s_z}^n)^2} \quad (82)$$

y debido a que la rotación preserva la norma y el vector normal $\mathbf{n}_s^s = [0, 0, 1]^T$ tiene norma unitaria, finalmente la lectura del telémetro se puede expresar como sigue

$$s = \frac{p_{s_z}^n}{n_{s_z}^n} \quad (83)$$

por lo que la lectura del telémetro no solo dependerá de la altura a la que se encuentre el mismo sino también del tercer elemento de la tercera columna de la matriz de rotación que relaciona el sistema de referencia del telémetro con el sistema en el que se mide la posición.

Para el caso de representación de orientación mediante ángulos de Euler o para el caso de un cuaternión, la ecuación de observación del telémetro a partir de (83) queda

$$s = \frac{p_{s_z}^n}{\cos \phi \cos \theta} \quad \text{o} \quad s = \frac{p_{s_z}^n}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \quad (84)$$

respectivamente.

4. IMPLEMENTACIÓN FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO PARA DETERMINAR ORIENTACIÓN Y ALTURA

Se plantea un filtro de Kalman extendido donde el vector de estados tiene cinco dimensiones

$$\mathbf{x} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad p_z]^T, \quad (85)$$

los cuatro escalares del cuaternión que representa la orientación más un escalar para la altura.

En la etapa de predicción, con cada lectura del giróscopo el estado evoluciona mediante la matriz de transición de estados, mientras que con múltiples etapas de observación, dependiendo del sensor que tenga la medición disponible, se ejecutará una secuencia de actualización diferente.

4.1. Etapa de predicción

Para la etapa de predicción se pueden separar los dos modelos usados en las secciones anteriores: por un lado la versión discreta de la derivada temporal del cuaternión unitario (58) vista en la Sección 3.2 para obtener la matriz de transición

$$F_q = \frac{1}{2} \Omega(\omega_k) \Delta t + I \quad (86)$$

vinculada al cuaternión, recordando que

$$\Omega(\omega_k) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Por otro lado, si se considera que el telémetro se actualiza a mayor velocidad de lo que varía la altura, se puede considerar constante, quedando $\dot{h} = 0$, la que linealizando por Euler simplemente resulta

$$h_k = F_s h_{k-1} \quad (88)$$

con

$$F_s = 1. \quad (89)$$

La ecuación de proceso completa queda

$$\mathbf{x}_k = F \mathbf{x}_{k-1} \quad (90)$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} F_q & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & F_s \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Con cada lectura del giróscopo disponible, utilizando la ecuación de proceso (90) se actualiza temporalmente el estado estimado

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = F \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (92)$$

y la matriz de covarianza del estado estimado

$$P_k^- = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q \quad (93)$$

con

$$Q = E[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] \quad (94)$$

como la matriz de covarianza del ruido de proceso \mathbf{w} el cual, como en la Sección 3.1 está relacionado con el ruido del giróscopo dado su efecto en el cuaternión que forma el vector de estado (Trawny y Roumeliotis, 2005) por lo que nuevamente la matriz de covarianza Q es considerada constante.

4.2. Etapa de Actualización

La etapa de actualización también se divide en dos partes, la que actualiza el cuaternión y la que actualiza la altura de vuelo. Para la etapa de actualización del cuaternión se utiliza la medición dada por el acelerómetro o el ángulo ψ como se vio en la Sección 3.3, mientras que para la actualización de la altura se utiliza el telémetro.

Debido a que el cuaternión no tiene dependencia con la altura se utilizan los mismos modelos de observación dados por (63) para el acelerómetro y por (69) para el sensor de ángulo de yaw.

Con cada nueva lectura del acelerómetro y del magnetómetro o el módulo de visión, se deben corregir los posibles errores en la predicción de la orientación, mientras que con cada lectura del telémetro debe ser corregida la altura. De nuevo, como en la Sección 3.1 se debe utilizar el estado del sistema predicho en la etapa anterior para obtener una predicción de la observación

$$\hat{\mathbf{z}}_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (95)$$

para ser comparada con la medición del sensor que esté disponible y de esta manera obtener la innovación $\mathbf{y} = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k$.

Para el caso del acelerómetro, se utiliza como ecuación de observación a (63)

$$\hat{\mathbf{z}}_{ak} = h_a(\hat{\mathbf{x}}_k^-) = g \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_2q_0) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_0) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

y para el ángulo de yaw a

$$\hat{\mathbf{z}}_{\psi k} = h_{\psi}(\hat{\mathbf{x}}_k^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\gamma^2 + 1} \\ \gamma \\ \sqrt{\gamma^2 + 1} \end{bmatrix} \quad (97)$$

donde

$$\gamma = \frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}. \quad (98)$$

Para el caso de la ecuación de observación del telémetro se utiliza (84) que quedará

$$\hat{\mathbf{z}}_{sk} = h_s(\hat{\mathbf{x}}_k^-) = \frac{p_z}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \quad (99)$$

la cual es una función no lineal respecto del estado estimado, por lo que también debe ser calculado su Jacobiano.

Los Jacobianos son

$$H_a = \begin{bmatrix} -2q_2 & 2q_3 & -2q_0 & 2q_1 & 0 \\ 2q_1 & 2q_0 & 2q_3 & 2q_2 & 0 \\ 2q_0 & -2q_1 & -2q_2 & 2q_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

para el caso del acelerómetro, y

$$H_\psi = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

para la observación de ángulo de yaw.

En cuanto a la actualización del estado estimado a priori cuando la lectura del telémetro está disponible, se utiliza un nuevo Jacobiano que se obtiene derivando la ecuación de observación del telémetro (99) respecto del estado

$$H_s = \begin{bmatrix} -\frac{2p_z q_0}{r^2} & \frac{2p_z q_1}{r^2} & \frac{2p_z q_2}{r^2} & -\frac{2p_z q_3}{r^2} & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (102)$$

donde

$$r = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \quad (103)$$

Utilizando el Jacobiano H_k que corresponda según la lectura del sensor que esté disponible, se calcula la matriz de ganancia de Kalman

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (104)$$

siendo

$$R_k = E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] \quad (105)$$

la matriz de covarianza del ruido del sensor utilizado. Una vez obtenida la matriz de ganancia de Kalman, se calcula el error en la estimación \mathbf{x}_e

$$\mathbf{x}_e = K_k \mathbf{y} \quad (106)$$

y se corrige la estimación del estado

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{x}_e \quad (107)$$

y la matriz de covarianza del mismo

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (108)$$

5. RESULTADOS

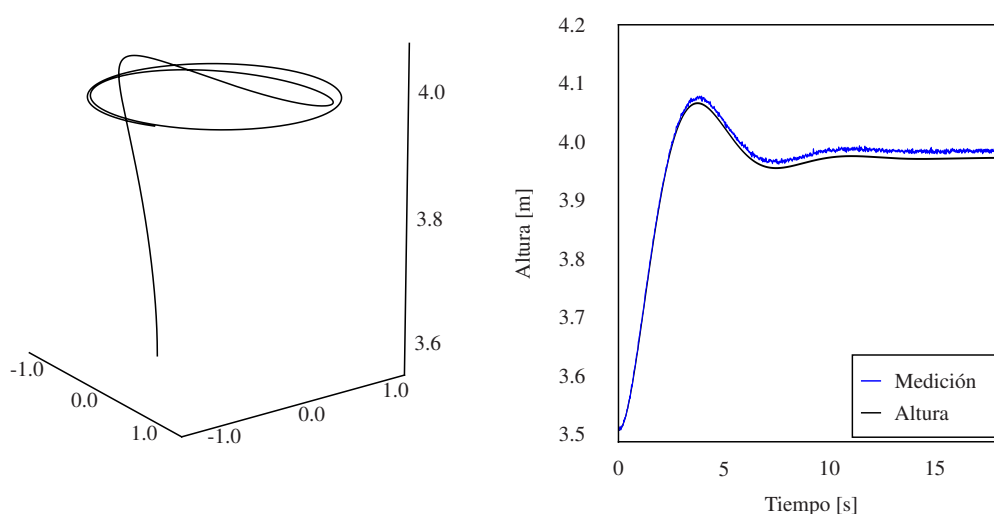
Los problemas de prueba consisten de una serie de *scripts* de MATLAB con distintos modelos de robots, entre ellos un modelo de UAV multirrotor (Corke, 2011). Dicho modelo de UAV puede ser programado con trayectorias a seguir mientras se observan los valores de aceleración lineal y velocidad angular que posee el vehículo. Con estos valores, se pueden obtener lecturas de sensores inerciales simulados dependiendo de la trayectoria preconfigurada así como de los valores verdaderos de orientación y altura.

En la Fig. 2a se muestra la trayectoria realizada por el simulador, la cual fue utilizada para la evaluación del método propuesto. En la simulación, el UAV parte del reposo a 3.5m de altura hacia una altura final de aproximadamente 4m. En el proceso realiza dos giros de alrededor de un metro de radio. Esta trayectoria curva, obliga al vehículo a inclinarse para poder mantener el radio de giro, lo que aumenta la distancia al suelo dada por lectura del sonar.

En la Fig. 2b se muestra la altura obtenida en la simulación. En negro se ve la verdadera altura del UAV en la simulación, mientras que en azul se muestra la medición obtenida por el sonar.

Se puede ver en la figura que debido a la inclinación del UAV, la lectura del telémetro es ligeramente mayor que la altura verdadera, lo que provoca un error en la altura estimada que ingresa al sistema de control.

En las Fig. 3a y Fig. 3b se muestran las lecturas del giróscopo y acelerómetro simulados, ambos de tres ejes. Se puede ver en las figuras que el giróscopo no tiene tanto ruido como el acelerómetro. Sin embargo, como se mencionó antes, es inviable la integración del giróscopo para determinar el ángulo de inclinación, no solo por el ruido sino que debido a los errores intrínsecos como el bias y la deriva que provocan errores que crecen sin límites en el tiempo. Estos son debidos a que un pequeño sesgo en la media de la velocidad angular provoca grandes errores en la estimación del ángulo luego de la integración respecto del tiempo. Este efecto se puede minimizar haciendo una calibración previa a cada vuelo, en corridas de varios segundos para determinar dicho sesgo para luego ser sustraída del valor medido. Sin embargo, este sesgo



(a) Trayectoria simulada del vuelo de un UAV desarrollada en (Corke, 2011).

(b) Comparación de la altura simulada con la medición simulada del telémetro.

Figura 2: Trayectoria de vuelo simulada

no puede ser eliminado completamente.

Por este motivo siempre se usan filtros que fusionan al giróscopo con otro que pueda tener una medida absoluta en algún eje, como por ejemplo, con acelerómetros para determinar los ángulos de roll y pitch, y magnetómetros, compases electrónicos o cámaras para estimar el ángulo de yaw.

La estimación de las componentes del cuaternión correspondiente al ángulo de yaw tratada en la Sección 3.3.2 no es tenida en cuenta en lo que resta de la sección. Solo se estimarán las componentes del cuaternión relacionados con los ángulos de roll y pitch por medio de la fusión del giróscopo con el acelerómetro los cuales son necesarios para conocer la altura utilizando el telémetro.

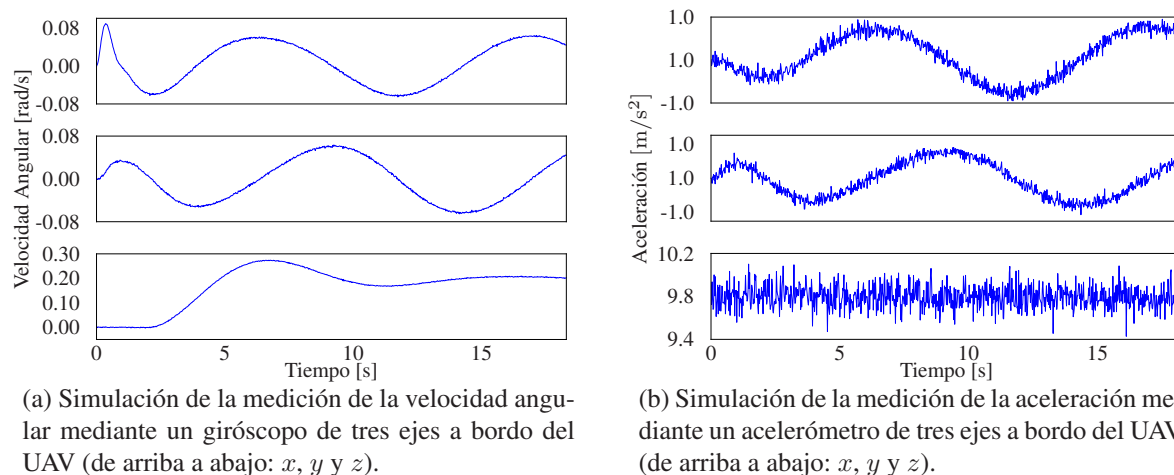


Figura 3: Valores simulados de la unidad inercial en trayectoria circular.

En la Fig. 4 se muestran las componentes del cuaternión verdadero y estimado que representan la orientación del vehículo simulado. Con la línea negra se representa la orientación simulada, mientras que con la línea roja se muestra el resultado del filtro de Kalman extendido. Si bien la figura muestra una pequeña inestabilidad al inicio de la estimación, se puede ver que el filtro converge rápidamente y se estabiliza en el valor simulado. Salvo en los instantes iniciales, se puede ver que los valores del cuaternión estimado y el valor verdadero son coincidentes durante toda la simulación.

En la Fig. 5a se muestra el resultado de la estimación de la altura de vuelo, utilizando el modelo de observación acoplado a la orientación. Nuevamente la línea roja representa la estimación del filtro de Kalman extendido, mientras que la línea negra representa el valor verdadero. En esta figura se puede ver como se corrige la estimación errónea de la Fig. 2b quedando la estimación prácticamente sobre el valor verdadero.

En la Fig. 5b se comparan los errores de la medición desacoplada con los errores de la estimación con el EKF, donde se puede ver la mejora debida al acoplamiento entre orientación y altura. En línea azul se muestra el error de la lectura proveniente del sonar, mientras que en rojo se muestra el error de la estimación, ambos obtenidos a partir del valor verdadero. En la figura se muestra que el error usando el filtro de Kalman acoplado es menor que usando las lecturas directamente desde el sonar. La media del error de la medición es de alrededor de 11mm, por el contrario, la media del error del filtro de Kalman extendido es de aproximadamente de 1mm.

Si bien la representación mediante cuaterniones es computacionalmente más eficiente que los ángulos de Euler, no es intuitiva. Debido a esto en la Fig. 6 se muestran los ángulos de

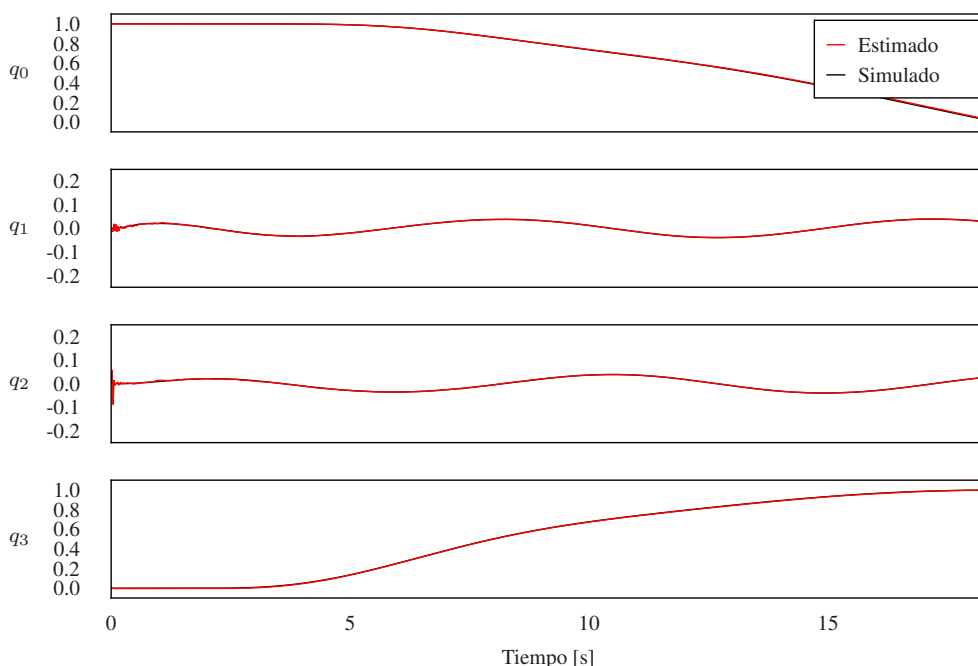
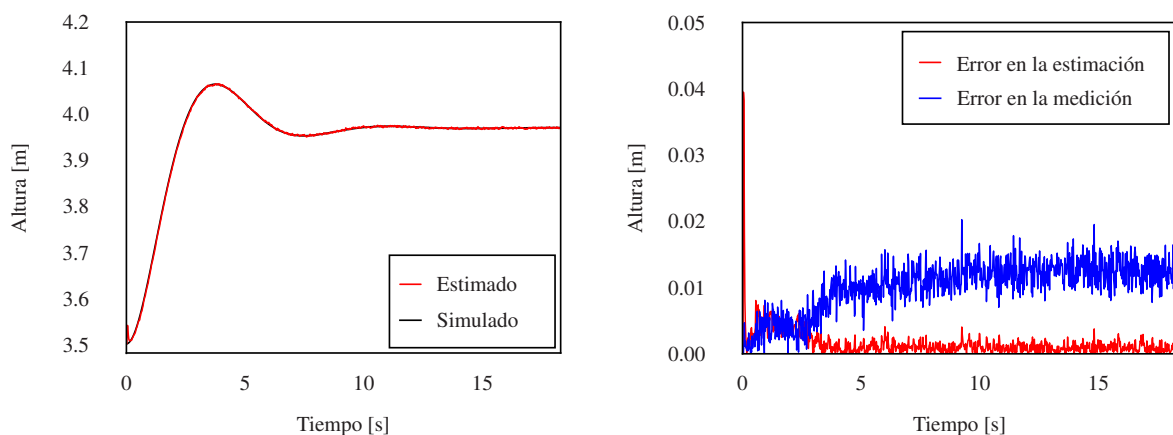


Figura 4: Estimación del cuaternión de orientación del UAV usando el EKF propuesto.

Euler convertidos a partir del cuaternión de orientación estimado. En la figura se muestra que los ángulos de Euler tanto en valor verdadero como en la estimación oscilan entre $\pm 4^\circ$ para los ángulos de roll y pitch, y de 0 a 180° para el caso del ángulo de yaw. Al igual que con la estimación del cuaternión, del cual estos ángulos de Euler provienen, en los primeros instantes de la ejecución del filtro se puede ver cierta inestabilidad que luego desaparece, quedando prácticamente superpuestos el valor verdadero con la estimación.

En la Fig. 7 se muestran los errores de los ángulos de Euler mostrados en la Fig. 6 respecto del valor verdadero de la orientación, expresada también en ángulos de Euler. En estas figuras se dejó fuera de rango la zona donde el filtro se mostró inestable. Por este motivo, para el caso de roll y pitch no se ve el valor de la curva para el tiempo cero, aunque instantes después ingresa al rango de error mostrado estableciéndose en valores menores a 0.2° en estos dos casos. Para el caso del ángulo de yaw, el error es algo mayor debido a que se integra paso a paso el resultado



(a) Estimación de la altura utilizando el filtro propuesto.

(b) Comparación del error en la estimación de la altura con y sin filtro.

Figura 5: Estimación de la altura, medición y su error respecto del valor verdadero.

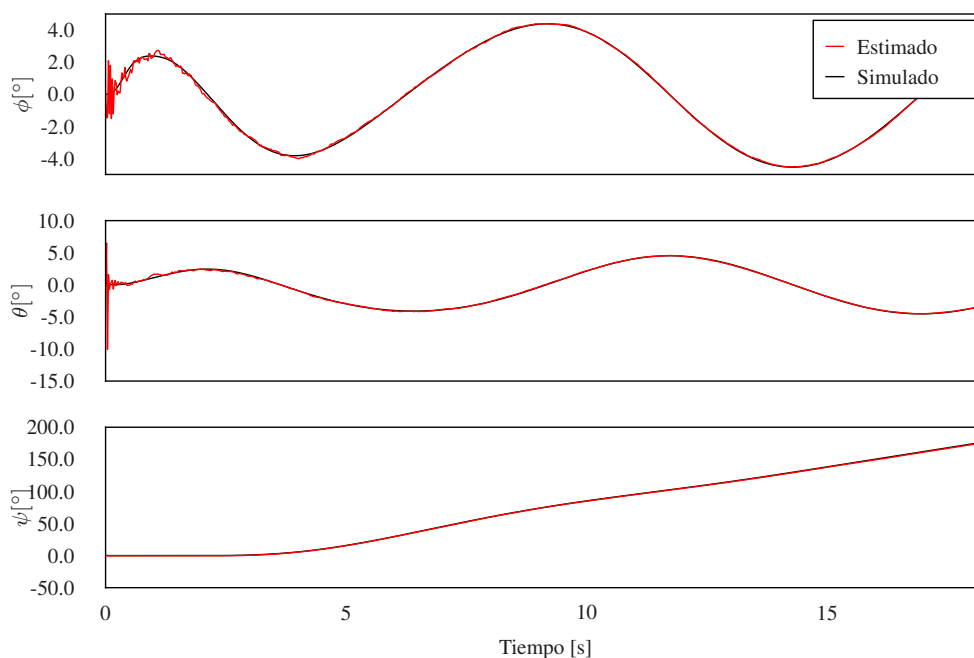


Figura 6: Ángulos de Euler correspondientes al cuaternión estimado.

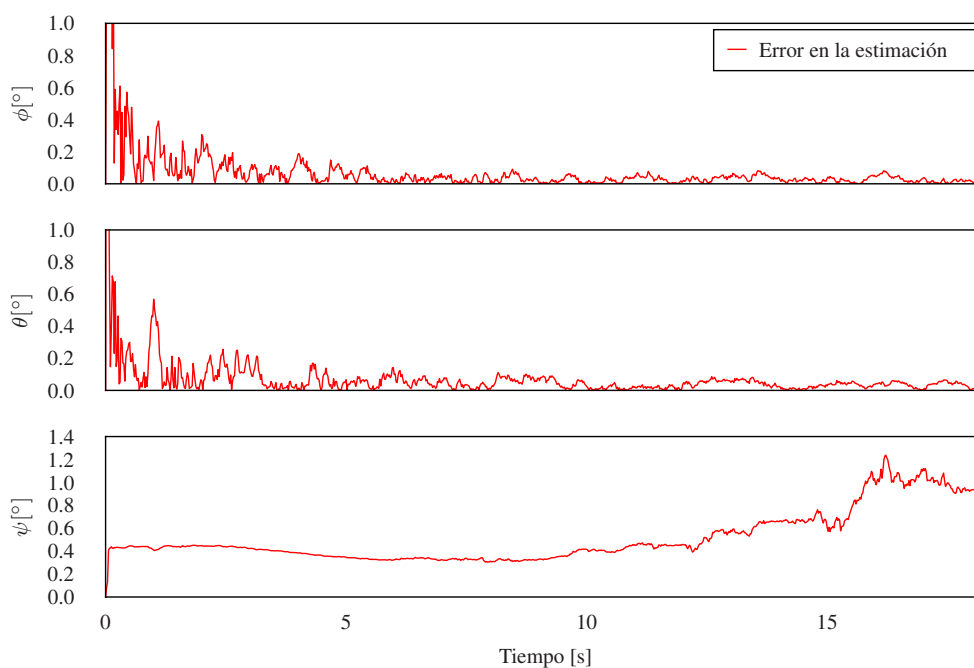


Figura 7: Errores en los ángulos de Euler correspondientes al cuaternión estimado.

obtenido por el módulo de compás.

5.1. Conjunto de datos reales

En la Fig. 8 se muestran las mediciones reales de un UAV. Se tratan de valores obtenidos de una unidad inercial, publicados en Lee et al. (2010) para evaluar algoritmos usados con UAV. El vehículo utilizado para capturar los datos fue un multirroto modelo *Pelican* de la empresa alemana *Ascending Technologies* equipado con acelerómetros, giróscopos y una cámara apuntando al suelo.

Los datos sin procesar de estos sensores inerciales, las imágenes capturadas por la cámara y

los valores de posición verdaderos obtenidos mediante un sistema de seguimiento de precisión milimétrica son de libre acceso¹.

En la Fig. 8a se muestran las lecturas provenientes del acelerómetro de tres ejes, mientras las lecturas del giróscopo se muestran en la Fig. 8b.

Los valores de ángulos obtenidos se muestran en la Fig. 8c. Los sensores inerciales se actualizan a una frecuencia de 200Hz, esto es una lectura cada 5ms, mientras que la cámara tiene una velocidad de captura de 30 cuadros por segundo, o sea una lectura cada aproximadamente 0.033ms.

El cuaternión estimado por el filtro extendido de Kalman se muestra en la Fig. 9 usando líneas rojas. En la misma gráfica se muestra también el cuaternión en caso de no corregirse el ángulo de yaw con el módulo de visión, en color verde.

Esto se debe a que estos ángulos son corregidos en ambos casos en la etapa de actualización por medio del acelerómetro. Sin embargo, las componentes q_0 y q_3 que corresponden principalmente al ángulo de yaw exhiben cierta deriva. Para el caso en el que no se corrige con el módulo de visión, este efecto se debe a que, como se dijo antes, la integración paso a paso de la velocidad angular para determinar la orientación provoca un error que crece sin límites, debido principalmente al sesgo en las mediciones del giróscopo. De todas maneras se puede ver, cualitativamente, que el error de la estimación del filtro que usa información proveniente del módulo visual es menor que en el caso donde no se usa.

Como se demostró en Pucheta et al. (2014), el uso de cuaterniones en sistemas embebidos mejora la eficiencia computacional, pero a primera vista no son fáciles de interpretar, por lo que para un análisis cuantitativo se utilizan los ángulos de Euler.

En la Fig. 10 se muestran los ángulos de Euler correspondientes al cuaternión unitario esti-

¹<http://www.sfly.org/mav-datasets>

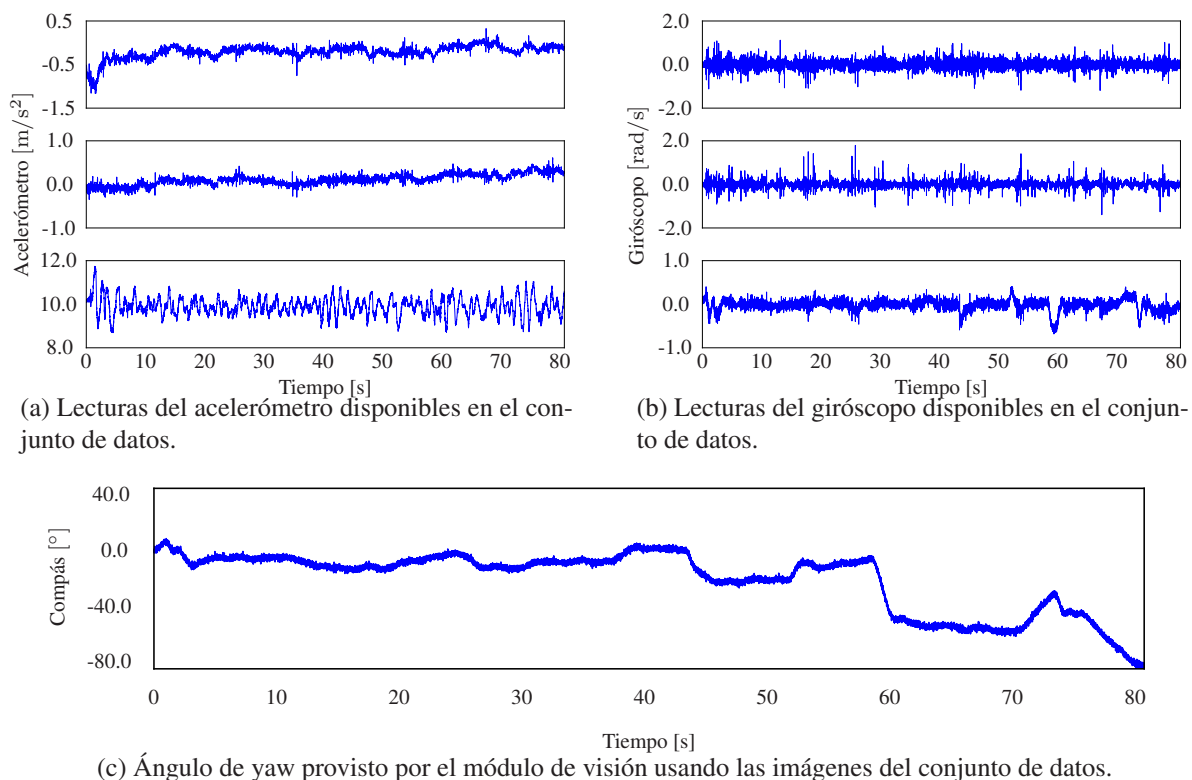


Figura 8: Valores reales de la unidad inercial en el conjunto de datos.

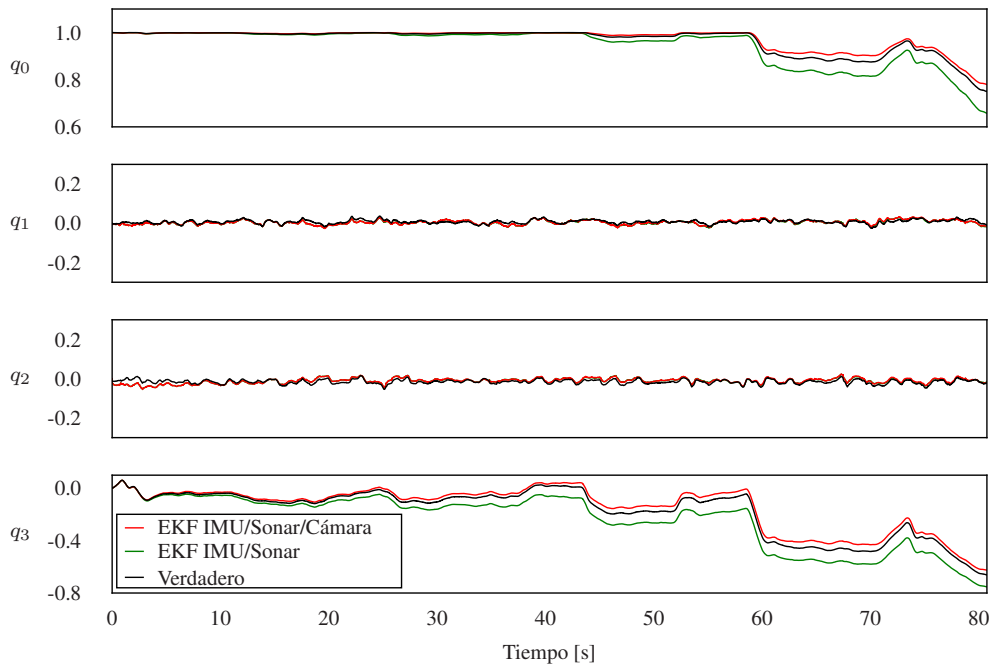


Figura 9: Componentes del cuaternión unitario estimado por el filtro de orientación y altura. En línea roja se muestran las componentes del cuaternión estimado con actualización de yaw, mientras que en verde simplemente deriva.

mado para los dos casos mencionados, junto con el valor verdadero de la orientación dado por el sistema de seguimiento externo.

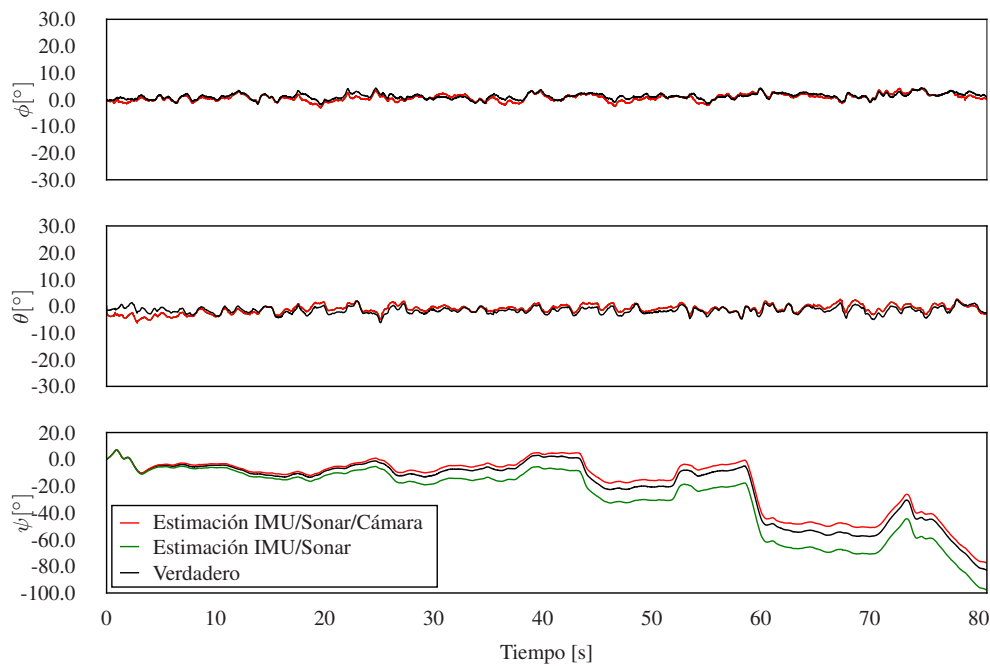


Figura 10: Ángulos de Euler correspondientes al cuaternión unitario estimado por el filtro de orientación y altura. En rojo los ángulos de Euler para el filtro con actualización de yaw. Por el contrario en verde se muestra lo obtenido sin corrección de yaw.

Se puede ver en esta figura, como se mencionó en la figura que mostraba el cuaternión, que los ángulos de roll y pitch son coincidentes en ambos casos con el valor verdadero. También se evidencia que el ángulo de yaw tiene mayor error que los anteriores, como también se dijo, debido a la integración del giróscopo.

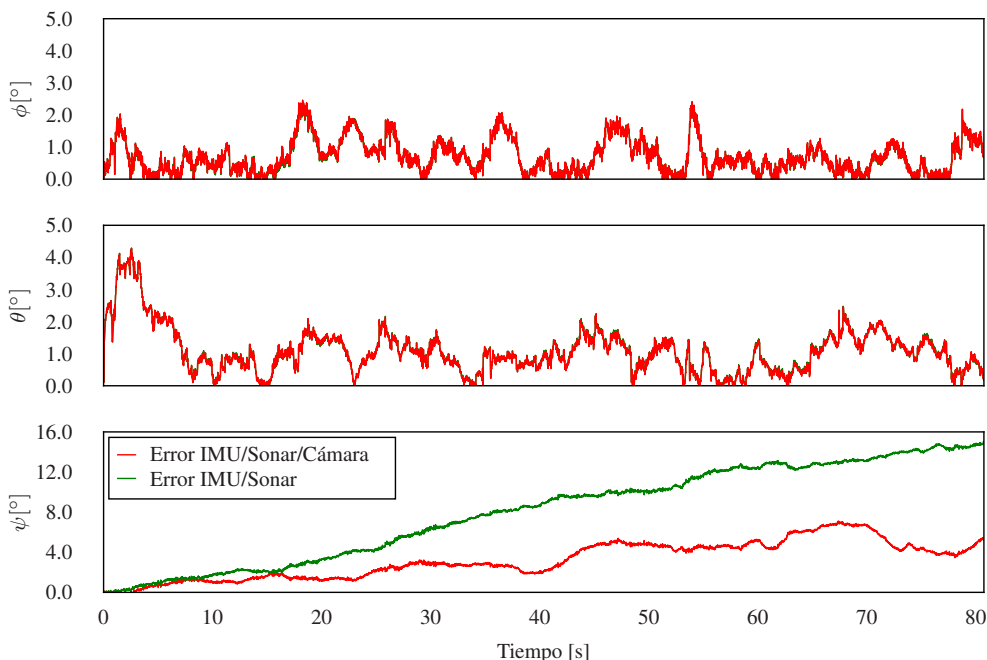
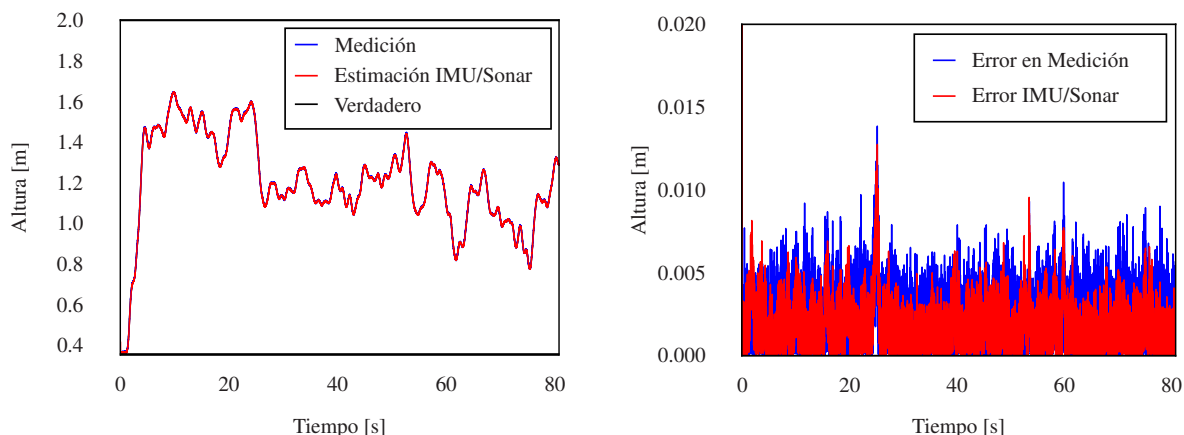


Figura 11: Errores en los ángulos de Euler correspondientes al cuaternión estimado respecto del valor verdadero.

En la Fig. 11 se muestran los errores entre los ángulos correspondientes al cuaternión unitario que representa la orientación del vehículo. El error, como en las gráficas anteriores, es la diferencia en valor absoluto entre el valor estimado y el valor verdadero. Se puede ver en esta figura que el error en los ángulos de roll y pitch, una vez estabilizado, es menor a 2° para los dos esquemas de filtro mostrados. Sin embargo, el ángulo de yaw muestra valores que derivan.



(a) Altura medida usando el sonar, altura estimada por el filtro y valor verdadero.

(b) Error en la altura estimada y medida respecto del valor verdadero.

Figura 12: Estimación de la altura, medición y su error respecto del valor verdadero.

En la Fig. 12a se muestra el perfil de altura dado por el sonar. Debido a que el vehículo que

generó el conjunto de datos se encuentra en vuelo estacionario, la diferencia entre la medición dada por el telémetro y la estimación es difícil de apreciar. No obstante, en la Fig. 12b se muestra cuantitativamente la diferencia de cada caso respecto del valor verdadero.

En la figura se muestran en azul los errores obtenidos usando la medición directa de la altura con un telémetro con bajo ruido, y por otro lado con rojo los errores obtenidos con la estimación del filtro propuesto. Se puede ver que aún con un telémetro de gran calidad, el error usando el filtro acoplado es menor.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un algoritmo para acoplar la información proveniente de sensores inerciales con las lecturas de un sensor de rango, para ser utilizado en el control de orientación y altura de un vehículo aéreo no tripulado. El método de fusión utilizado fue el filtro extendido de Kalman con la particularidad de contar con distintos tipos de etapas de actualización, dependiendo de las lecturas disponibles a cada momento. Se presentó también el desarrollo completo del filtro de Kalman extendido a partir del enfoque bayesiano.

Los algoritmos fueron evaluados con datos simulados a partir de un modelo de multicoptero así como con datos reales, provenientes de conjuntos de datos publicados por otras universidades. Las lecturas disponibles en cada caso son mediciones de los acelerómetros, giróscopos, la orientación medida alrededor del eje z del vehículo, llamado ángulo de yaw, y finalmente el telémetro.

Tanto en las pruebas con los datos simulados como con los datos reales, los resultados muestran que es conveniente tener en cuenta la orientación en la estimación de la altura para disminuir el error provocado por la medición del sensor de rango. También en ambos casos, se mostró que la estimación de orientación converge rápidamente y el error en estado estacionario es muy pequeño.

REFERENCIAS

- Araguás G., Paz C., Gaydou D., y Paina G.P. Quaternion-based orientation estimation fusing a camera and inertial sensors for a hovering UAV. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 77(1):37–53, 2015. ISSN 0921-0296, 1573-0409. doi:10.1007/s10846-014-0092-z.
- Cabarbaye A., Leal R.L., Fabiani P., y Estrada M.B. Vtol aircraft concept, suitable for unmanned applications, with equivalent performance compared to conventional aeroplane. En *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, páginas 219–226. 2016. doi:10.1109/ICUAS.2016.7502649.
- Corke P. *Robotics, Vision and Control*, volumen 73 de *Springer Tracts in Advanced Robotics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-20143-1, 978-3-642-20144-8.
- Erdelj M. y Natalizio E. Uav-assisted disaster management: Applications and open issues. En *2016 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC)*, páginas 1–5. 2016. doi:10.1109/ICNC.2016.7440563.
- Gibbs B.P. *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook*. Wiley, 2011. ISBN 9781118003169.
- Hoffmann F., Goddemeier N., y Bertram T. Attitude estimation and control of a quadcopter. En *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, páginas 1072–1077. 2010. ISSN 2153-0858. doi:10.1109/IROS.2010.5649111.
- Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the*

- ASME–Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, 1960.
- Lee G., Achtelik M., Fraundorfer F., Pollefeys M., y Siegwart R. A benchmarking tool for mav visual pose estimation. En *Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), 2010 11th International Conference on*, páginas 1541–1546. 2010.
- Lim H., Park J., Lee D., y Kim H. Build your own quadrotor: Open-source projects on unmanned aerial vehicles. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 19(3):33–45, 2012. ISSN 1070-9932. doi:10.1109/MRA.2012.2205629.
- Lu Y., Macias D., Dean Z.S., Kreger N.R., y Wong P.K. A uav-mounted whole cell biosensor system for environmental monitoring applications. *IEEE Transactions on NanoBioscience*, 14(8):811–817, 2015. ISSN 1536-1241. doi:10.1109/TNB.2015.2478481.
- Maybeck P.S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1982. ISBN 9780080960036.
- Paz C., Araguás G., Perez Paina G., y Toloza J.H. Algoritmo de paralelización para la estimación en tiempo real del ángulo de guiñada de un uav. En *Biennial Congress of Argentina (ARGENCON), 2014 IEEE*, páginas 31–36. 2014a. doi:10.1109/ARGENCON.2014.6868468.
- Paz C., Perez Paina G., Infante G., Cavenio C., y Araguas G. Fusión sensorial para la estimación de la orientación y la altura de un uav utilizando un ekf. En *Proceedings of the VIII Jornadas Argentinas de Robótica (JAR)*. 2014b. ISBN 978-987-1978-19-9.
- Pucheta M.A., Paz C.J., y Pereyra M.E. Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación. En *Mecánica Computacional Vol XXXIII, Proc. del XXI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, páginas 2303–2324. 2014.
- Samad A.M., Kamarulzaman N., Hamdani M., Mastor T., y Hashim K. The potential of unmanned aerial vehicle (uav) for civilian and mapping application. En *System Engineering and Technology (ICSET), 2013 IEEE 3rd International Conference on*, páginas 313–318. 2013. doi:10.1109/ICSEngT.2013.6650191.
- Särkkä S. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107030657.
- Shuster M. The nature of the quaternion. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 56(3):359–373, 2008. ISSN 0021-9142. doi:10.1007/BF03256558.
- Simon D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006. ISBN 0471708585.
- Trawny N. y Roumeliotis S. Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation. Informe Técnico 2005-002, University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., 2005.
- Vathsal S. Derivation of the relative quaternion differential equation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(5):1061–1064, 1991.