

## INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN ECUACIONES INTEGRALES DE SUPERFICIE CON NÚCLEOS DÉBILMENTE SINGULARES. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS ASINH

Jorge D'Elía<sup>a</sup>, Sofía Sarraf<sup>a,b</sup>, Ezequiel López<sup>a,b</sup>, Laura Battaglia<sup>a,c</sup> y Gustavo Ríos Rodríguez<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC (UNL-CONICET))  
Universidad Nacional del Litoral (UNL).

Predio CONICET-Santa Fe, Colectora RN 168, Paraje El Pozo, Santa Fe (3000), Argentina  
e-mail: [jdedia@cimec.unl.edu.ar](mailto:jdedia@cimec.unl.edu.ar), [gusadrr@santafe-conicet.gov.ar](mailto:gusadrr@santafe-conicet.gov.ar), web page: <http://www.cimec.org.ar>

<sup>b</sup> Instituto de Investigación en Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería (IITCI (UNCo-CONICET)),  
Universidad Nacional del Comahue (UNco). Buenos Aires 1400, Neuquén (Q8300IBX), Argentina  
e-mail: ([sofia.sarraf](mailto:sofia.sarraf), [ezequiel.jose.lopez](mailto:ezequiel.jose.lopez))@fain.uncoma.edu.ar  
web page: <http://www.patagonianorte.conicet.gob.ar/iitci>

<sup>c</sup> Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI)  
Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe (FRSF)  
Lavaysse 610, Santa Fe (3000), Argentina  
e-mail: [lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar](mailto:lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar)

**Palabras Clave:** Método de Elementos de Borde, Ponderación de Galerkin, Transformación de Duffy, Transformación asinh, Flujo de Stokes, Flujo tridimensional.

**Resumen.** Se propone una técnica de cuadratura numérica complementaria en el método de elementos de borde por ponderación de Galerkin (GBEM, por *Galerkin Boundary Element Method*) orientado a la obtención de una solución numérica de una ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*), tal que sea apta en integrales cuádruples sobre superficies inmersas en un dominio tridimensional, y con una singularidad débil en el integrando. En un trabajo previo (D'Elía y Battaglia, "Integración numérica en ecuaciones integrales de superficie con núcleos débilmente singulares y ponderadas por Galerkin", *Mecánica Computacional*, vol. XIV, 2006), se empleó la clásica transformación no-lineal de Duffy, ampliamente utilizada en el método de los momentos (MoM, por *Method of Moments*) en electromagnetismo computacional. En este trabajo se explora la transformación de coordenadas asinh en las variables de integración de modo tal de cancelar o atenuar la singularidad, con lo cual será posible emplear a continuación fórmulas de cuadratura numérica convencionales para integrandos regulares. La transformación asinh será orientada específicamente a su aplicación en GBEM en el caso de elementos triangulares simples, y a una BIE que modela problemas de flujo reptante (o flujo de Stokes) alrededor de cuerpos tridimensionales cerrados finitos.

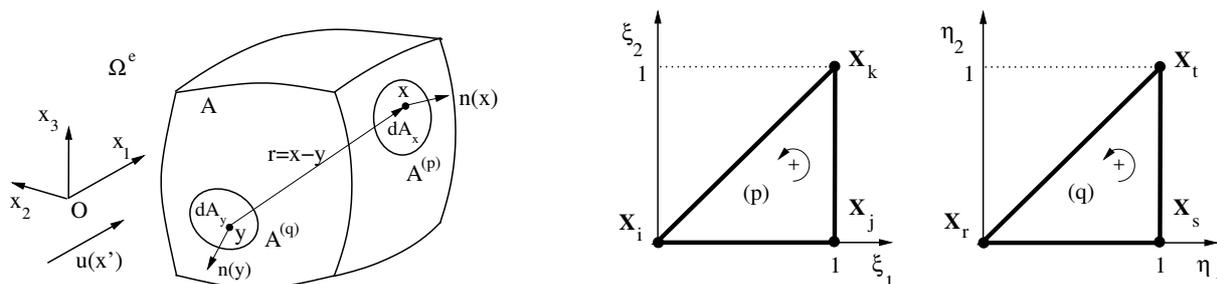


Figura 1: Izq.: un cuerpo rígido cerrado, suave por partes  $A$  en un dominio exterior  $\Omega^e$ : punto de observación  $\mathbf{x}$ , punto fuente  $\mathbf{y}$ , posición relativa  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ , versores normales  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ , y diferenciales de área  $dA_x$ ,  $dA_y$ . Der.: triángulos unitarios  $p$  y  $q$  para las coordenadas símplices.

## 1. INTRODUCCIÓN

El método de elementos de borde (BEM, por *Boundary Element Method*) se basa en la formulación de un problema de valores de borde de tipo elíptico mediante una ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*) (e.g. ver [Hackbusch, 1995](#)). Uno de los métodos numéricos empleados para obtener una solución aproximada de una BIE es mediante alguna variante de la ponderación de Galerkin y que, en este trabajo, se denominan, en general, como método de elementos de borde con ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM) ([Sutradhar et al., 2008](#)). La matriz del sistema en GBEM está relacionada con las influencias entre todos los pares de elementos (o paneles) de la malla de superficie, y requiere el cómputo de integrales de superficie anidadas con una singularidad débil en el integrando. Una posibilidad para tal fin es el esquema propuesto por [Taylor \(2003\)](#), con una manipulación sistemática de las integrales de superficie sobre elementos triangulares planos, y el empleo de la Transformación de [Duffy \(1982\)](#) (TD) para atenuar los efectos de la presencia de una singularidad de tipo débil en el dominio de integración. La TD es muy popular en el método de los momentos (MoM) ampliamente utilizado en electromagnetismo computacional ([Adelman et al., 2016](#); [Botha, 2012b](#); [Manić et al., 2014](#); [Reid et al., 2015](#)). Variantes basadas en la TD o similares pueden resultar de interés también en sus variantes basados en el método de elementos de borde isogeométrico (*Isogeometric BEM*) ([Aimi et al., 2017](#); [Belibassakis et al., 2013](#)), o en casos con singularidades de esquinas o de aristas en la solución ([Mousavi y Sukumar, 2010](#)). Una extensión del esquema de Taylor fue presentada en trabajos anteriores ([Sarraf et al., 2017a](#); [D'Elía et al., 2011](#); [Sarraf et al., 2014, 2013a](#)), en donde la extensión consistió en emplear cuadratura numérica cuádruple, en lugar de una cuadratura triple más una integración analítica realizada por Taylor.

En general, las reglas de cuadratura numérica para integrandos que contienen una singularidad débil se basan en alguna transformación que involucra un cambio de variables, tales que el jacobiano asociado cancele o atenúe el efecto de la singularidad, la cual está relacionada con la función de Green del problema ([Botha, 2013a,b](#)). Luego de introducir un cambio de variables se logra que el integrando se vuelva regular (o casi), por lo que se podrán emplear las reglas de cuadratura convencionales para integrandos regulares, típicamente las de Gauss-Legendre (GL). Entre otras propiedades de estas estrategias se tienen: (i) no requieren una evaluación analítica de la integral, a diferencia de los métodos basados en la substracción de la singularidad; (ii) extensibles a dominios curvilíneos, y (iii) aplicable a integrandos que incluyan funciones base de alto grado ([Botha, 2013a](#)). En este trabajo se explora en el esquema de Taylor extendido el reemplazo de la TD por una transformación alternativa basada en la función asinh ([Botha, 2012b,a](#)).

## 2. FORMULACIÓN INTEGRAL DE POWER-MIRANDA/HEBEKER

La formulación integral de Power-Miranda/Hebeker (PMH-IF, por *Power-Miranda/Hebeker integral formulation*) consiste en una BIE sin modos rígidos y que describe el flujo de Stokes alrededor de un cuerpo rígido cerrado y suave por partes  $A$  en  $\mathbb{R}^3$ , e.g. ver Sarraf et al. (2017a). La misma puede ser clasificada como una BIE en la velocidad de tipo indirecta y completada (*Completed Indirect Velocity BIE (CIV-BIE)*) (Ingber y Mammoli, 1999), o también como una BIE en la densidad de doble capa y completada (*Completed Double-Layer BIE (CDL-BIE)*) (Power y Wrobel, 1995; Pozrikidis, 1992). En lo que sigue, se emplea notación tensorial cartesiana, i.e. los índices  $i, j, k$  tienen los valores 1, 2, 3 y corresponden a las coordenadas cartesianas  $x, y, z$ , respectivamente. Una formulación integral indirecta para la ecuación de Stokes sugiere considerar los núcleos de simple-capa  $\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y de doble-capa  $\tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Para el caso de flujo estacionario dichos núcleos están dados por (Power y Wrobel, 1995; Sarraf et al., 2012, 2013b)

$$\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right] \quad (1a)$$

$$\tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^5} n_k(\mathbf{y}) \quad (1b)$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  y  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ , con los puntos de integración y de observación  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , respectivamente (ver Fig. 1, izq.), mientras que  $n_k = n_k(\mathbf{y})$  es el versor normal a la superficie  $A$  en el punto  $\mathbf{y}$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídea para vectores,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido, y se emplea la convención de la suma sobre índices repetidos de Einstein. La PMH-IF emplea ambas densidades de simple y doble capa, y pueden escribirse como (D'Elía et al., 2014)

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_A \left[ \tilde{K}_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) - \tilde{H}_{ij} \psi_j(\mathbf{y}) \right] dA_{\mathbf{y}}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A \quad (2)$$

donde  $\psi_j(\mathbf{x})$  es la densidad de doble-capa, y  $u_i(\mathbf{x})$  es la velocidad del flujo no perturbado. El elemento diferencial de superficie es denotado como  $dA_{\mathbf{y}} = dA(\mathbf{y})$  (ver Fig. 1, izq.). Por otra parte, el núcleo PMH  $\tilde{H}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  está dado por

$$\tilde{H}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \chi_H \tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3)$$

donde  $\chi_H$  es un parámetro positivo arbitrario que es introducido por Hebeker (citado en Pozrikidis (1992)) con la finalidad de acoplar la densidad de capa simple  $\phi$  con la densidad de capa doble  $\psi$ , para lo cual Hebeker define  $\phi(\mathbf{x}) = \chi_H \psi(\mathbf{x})$ . Este acoplamiento permite eliminar los seis modos rígidos de la BIE clásica mediante la introducción *ad-hoc* del núcleo de capa simple  $\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Además, da cuenta de la fuerza y cupla viscosas sobre el cuerpo (Power y Wrobel, 1995; Pozrikidis, 1992). En el análisis presentado por Hebeker basado en una solución iterativa del sistema de ecuaciones, concluye que  $\chi_H = 1$  es una buena elección con respecto al número de condición de la matriz del sistema, lo cual será también empleado en el presente trabajo. Dado que el lado izquierdo de la Ec. (2) es dato, la misma se reduce a una BIE de Fredholm de segunda clase con un núcleo débilmente singular para la densidad  $\psi_j(\mathbf{x})$ .

## 3. FORMULACIÓN NUMÉRICA CON GBEM

En GBEM se emplea una técnica de ponderación de Galerkin, la cual es descripta en detalle en Sarraf et al. (2017a, 2014, 2013a). La misma utiliza un lazo anidado doble sobre

los elementos  $p, q = 1, 2, \dots, E$ , donde  $E$  es el número de elementos (o paneles) en la malla BEM, mientras que los puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  están asociados a los elementos  $p, q$ , respectivamente (ver Fig. 1, der.). En esta sección, los valores de las variables a nivel elemental son denotados con supraíndices, en tanto que los valores nodales son indicados con subíndices, mientras que el supraíndice especial  $T$  denota arreglo traspuesto. Además, se prefiere la notación  $\int dz \int dy \int dx \int dw f(w, x, y, z)$  en lugar de  $\int \int \int \int f(w, x, y, z) dw dx dy dz$ , donde las integraciones son realizadas de derecha a izquierda.

### 3.1. Ponderación de Galerkin usando elementos lineales

Una técnica estándar de ponderación de Galerkin adopta las funciones de forma  $\mathbf{N}_\gamma(\mathbf{x})$ , con  $\gamma = 1, 2, \dots, N$ , donde  $N$  es el número de nodos en la malla, para minimizar el error promedio a través de las condiciones de ortogonalidad en la BIE discretizada. La aplicación de GBEM a la PMH-IF conduce al sistema de ecuaciones lineales (Sarraf et al., 2017b; D'Elía et al., 2014)

$$\sum_{p=1}^E \sum_{q=1}^E [\mathcal{I}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(p)} - \mathcal{J}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(q)}] = \sum_{p=1}^E \mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} \quad (4)$$

donde se emplea la siguiente notación para las matrices elementales

$$\mathcal{I}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} \left[ \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \quad (5)$$

y

$$\mathcal{J}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} \left[ \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y}) \right] \quad (6)$$

mientras que el vector fuente a nivel elemental está dado por

$$\mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \left[ \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{U}^{(p)} \quad (7)$$

### 3.2. Integrales de superficie sobre triángulos planos en GBEM

Se emplean triángulos planos de 3 nodos (elementos T1) como elementos de borde. La numeración global de los nodos en los triángulos  $p$  y  $q$  se denota con  $i, j, k$  y  $r, s, t$ , respectivamente (ver Fig. 1, der.). Los vectores elementales para el campo solución en la Ec. (4) son escritos como

$$\boldsymbol{\psi}^{(p)}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\psi}^{(q)}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_r \\ \psi_s \\ \psi_t \end{bmatrix}, \text{ con } \boldsymbol{\psi}_m_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_{3m-2} \\ \psi_{3m-1} \\ \psi_{3m} \end{bmatrix} \quad (8)$$

respectivamente, donde  $m$  denota cualquiera de los nodos  $i, j, k$  y  $r, s, t$ , mientras que el término fuente a nivel del elemento está dado por

$$\mathbf{U}^{(p)}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix}, \text{ con } \mathbf{U}_m_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} U_{3m-2} \\ U_{3m-1} \\ U_{3m} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las Ecs. (5-6) definen las integrales de interacción elementales, las cuales tienen una singularidad débil  $O(1/r)$ . Para evaluar las Ecs. (5-6), se emplea un esquema de integración de Taylor extendido (Taylor, 2003; Sarraf et al., 2017a, 2014), con una cuadratura numérica en las cuatro

coordenadas de integración. Para tal fin, se introducen dos conjuntos de coordenadas para el simplex:  $(\xi_1, \xi_2)$  sobre el panel  $p$ , y  $(\eta_1, \eta_2)$  sobre el panel  $q$  (ver Fig. 1, der.)

$$(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq 1 ; 0 \leq \xi_2 \leq \xi_1 \quad (10a)$$

$$(\eta_1, \eta_2) : 0 \leq \eta_1 \leq 1 ; 0 \leq \eta_2 \leq \eta_1 \quad (10b)$$

Las coordenadas genéricas de los puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son expresadas en los paneles  $p$  y  $q$  usando las expresiones

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{N}^{(p)}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}^{(p)} \quad (11a)$$

$$\mathbf{y}(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{N}^{(q)}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{y}^{(q)} \quad (11b)$$

con las funciones de forma elementales

$$\mathbf{N}^{(p)}_{3 \times 9}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_i^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_j^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_k^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (12a)$$

$$\mathbf{N}^{(q)}_{3 \times 9}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} N_r^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_s^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_t^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \quad (12b)$$

y las coordenadas nodales de los vértices de cada triángulo

$$\mathbf{x}^{(p)} = [\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_j \quad \mathbf{x}_k]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{y}^{(q)} = [\mathbf{y}_r \quad \mathbf{y}_s \quad \mathbf{y}_t]^T \quad (13)$$

En las Ecs. (12a-12b)

$$\mathbf{N}^{(p)}_{3 \times 3}(\boldsymbol{\xi}) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} N_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \right) \quad (14a)$$

$$\mathbf{N}^{(q)}_{3 \times 3}(\boldsymbol{\eta}) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} N_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \right) \quad (14b)$$

para  $\alpha = i, j, k$  en el elemento  $p$ , y  $\beta = r, s, t$  en el elemento  $q$ , ver Fig. 1 (der.), y

$$\begin{aligned} N_i^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) &= (1 - \xi_1) & N_r^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) &= (1 - \eta_1) \\ N_j^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) &= (\xi_1 - \xi_2) & N_s^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) &= (\eta_1 - \eta_2) \\ N_k^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_2 & N_t^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) &= \eta_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Entonces, las integrales de interacción elementales, Ecs. (5-6), son escritas como

$$\mathcal{I}^{(p,q)} = J^{(p)} J^{(q)} \hat{\mathcal{I}}^{(p,q)} \quad (16a)$$

$$\mathcal{J}^{(p,q)} = J^{(p)} J^{(q)} \hat{\mathcal{J}}^{(p,q)} \quad (16b)$$

donde  $J^{(p)} = 2A^{(p)}$  es la jacobiana del panel  $p$ ,  $A^{(p)}$  es su área, y la misma notación se aplica al panel  $q$ . Finalmente, las integrales de interacción elementales quedan expresadas en coordenadas simplex como sigue

$$\hat{\mathcal{I}}^{(p,q)} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \mathbf{N}^{(p)T}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}(\boldsymbol{\eta})) \mathbf{N}^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (17)$$

y

$$\hat{\mathcal{J}}^{(p,q)} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \mathbf{N}^{(p)T}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}(\boldsymbol{\eta})) \mathbf{N}^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \quad (18)$$

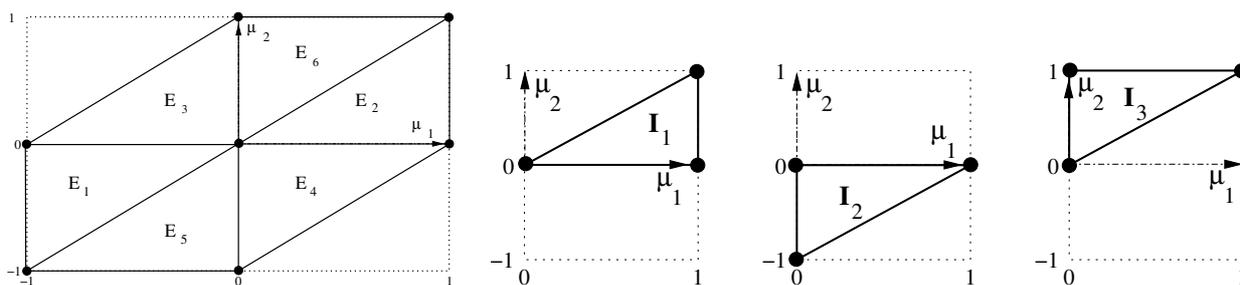


Figura 2: Región de integración en el plano de las coordenadas relativas  $\mu_1, \mu_2$  (izq.). Regiones de integración para las auto-integrales  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , de izq. a der., respectivamente (der.).

#### 4. ESQUEMA DE TAYLOR EXTENDIDO Y LA TRANSFORMACIÓN DE DUFFY

Sin pérdida de generalidad, las Ecs. (17-18) pueden escribirse como

$$I = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 f(\xi, \eta) \tag{19}$$

La estrategia de Taylor para evaluar las Ecs. (19) está diseñada específicamente para triángulos planos simples  $p$  y  $q$ , ya sea cuando son contiguos o coinciden, y el integrando  $f(\xi, \eta)$  contiene una singularidad débil. En esas condiciones, se introducen las coordenadas relativas  $\mu_1 = \eta_1 - \xi_1$  y  $\mu_2 = \eta_2 - \xi_2$ . Reemplazando estas coordenadas en la Ec. (19) resulta

$$I = \int_0^1 d\xi_1 \int_{-\xi_1}^{1-\xi_1} d\mu_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\xi_2}^{\mu_1 + \xi_1 - \xi_2} d\mu_2 f(\xi, \mu) \tag{20}$$

Cambiando el orden de integración  $(\mu_2, \xi_2, \mu_1, \xi_1)$  a  $(\xi_2, \xi_1, \mu_2, \mu_1)$ , y combinando las integrales que tienen dominios solapados, la Ec. (19) se separa en 3, 6 y 1 integrales independientes para los casos de: paneles coincidentes, paneles con aristas compartidas, y paneles con un vértice compartido, respectivamente. El nuevo orden de integración introducido por Taylor traslada la singularidad débil al origen, mientras que el dominio con los solapamientos eliminados transcurre en el plano de las coordenadas relativas  $(\mu_1, \mu_2)$ , ver Fig. 2 (izq. y der.). A continuación, Taylor introduce once transformaciones de Duffy para regularizar el integrando mediante la introducción de coordenadas polares convenientes para cada integral. Las expresiones finales son dadas a continuación, donde se emplea la siguiente notación:  $\tilde{f}_n = \tilde{f}(\xi_n, \eta_n)$ , donde  $\tilde{f}(\xi_n, \eta_n) = f(\xi_n, \eta_n) + f(\eta_n, \xi_n)$ , y  $\eta_n = \xi_n + \mu_n$ .

##### 4.1. Dos paneles coincidentes

En el caso de dos paneles coincidentes, Taylor encuentra que se puede reducir el número de integrales de 6 a 3, y están dadas por la Ec. (21)

$$I = \sum_{n=1}^3 I_n \quad \text{con} \quad I_n = \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx \int_0^1 d\chi_1 \int_0^1 d\chi_2 \tilde{J}_n \tilde{f}_n \tag{21}$$

donde  $(\omega, x, \chi_1, \chi_2)$  son los puntos de cuadratura de GL, mientras que  $\xi_n = \xi_n(\omega, x, \chi_1, \chi_2) = (\xi_1, \xi_2)_n$ , y  $\mu_n = \mu_n(\omega, x, \chi_1, \chi_2) = (\mu_1, \mu_2)_n$ , en donde los intervalos  $0 \leq \omega, x, \chi_1, \chi_2 \leq 1$  son los usuales en la cuadratura de GL. La diferencia de coordenadas  $\mu_n$ , y la jacobiana  $\tilde{J}_n = J_{TD,n}$  son computados usando las filas 1-3 de la Tabla 1, mientras que las coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$  se obtienen mediante las filas 1-3 de la Tabla 3, respectivamente.

2 paneles	$n$	$\mu_1$	$\mu_2$	$J_{TD}$
coincidentes	1	$\omega$	$\omega x$	$\omega$
	2	$\omega x$	$\omega(x - 1)$	
	3	$\omega x$	$\omega$	
comparten 1 arista	4	$-\omega x_1$	$-\omega x_1 x_2$	$\omega^2 x_1$
	5	$\omega x_1$	$\omega x_1 x_2$	
	6	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1(1 - x_2)$	
	7	$\omega x_1 x_2$	$\omega x_1(x_2 - 1)$	
	8	$-\omega x_1 x_2$	$-\omega x_1$	
	9	$\omega x_1 x_2$	$\omega x_1$	
comparten 1 vértice	10	-	-	$\omega^3 z_2$

Tabla 1: Esquema de Taylor extendido y apoyado en la Transformación de Duffy (TD). Diferencias de coordenadas  $\mu_n$  y  $\eta_n$ , y jacobiana  $J_{TD}$  de la TD, en función de las coordenadas de cuadratura  $0 \leq \omega, x_1, x_2, \chi_1 \leq 1$  y del número  $n$  de las integrales: 1-3 para paneles coincidentes, 4-9 para paneles con una arista en común, y 10 para paneles con un vértice en común.

2 paneles	$n$	$\mu_1$	$\mu_2$	$J_{TA}$
coincidentes	1	$\omega$	$\omega \operatorname{asinh}(x)$	$\omega d(x)$
	2	$\omega \operatorname{asinh}(x)$	$\omega(\operatorname{asinh}(x) - 1)$	
	3	$\omega \operatorname{asinh}(x)$	$\omega$	
comparten 1 arista	4	$-\omega x_1$	$-\omega x_1 \operatorname{asinh}(x_2)$	$\omega^2 x_1 d(x_2)$
	5	$\omega x_1$	$\omega x_1 \operatorname{asinh}(x_2)$	
	6	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1(1 - \operatorname{asinh}(x_2))$	
	7	$\omega x_1 \operatorname{asinh}(x_2)$	$\omega x_1(\operatorname{asinh}(x_2) - 1)$	
	8	$-\omega x_1 \operatorname{asinh}(x_2)$	$-\omega x_1$	
	9	$\omega x_1 \operatorname{asinh}(x_2)$	$\omega x_1$	
comparten 1 vértice	10	-	-	$\omega^2 z_2 d(z_1) d(z_3)$

Tabla 2: Esquema de Taylor extendido y apoyado en la Transformación Asinh (TA). Diferencias de coordenadas  $\mu_n$  y  $\eta_n$ , y jacobiana  $J_{TA}$  de la TA, en función de las coordenadas de cuadratura  $0 \leq \omega, x_1, x_2, \chi_1 \leq 1$  y del número  $n$  de las integrales: 1-3 para dos paneles coincidentes, 4-9 para dos paneles con una arista en común, y 10 para dos paneles con un vértice en común, donde  $d(u) = 1/\sqrt{1+u^2}$ .

### 4.2. Dos paneles con una arista en común

En el caso de dos paneles con una arista en común, las seis integrales deben computarse, y están dadas por la Ec. (22)

$$I = \sum_{n=4}^9 I_n \quad \text{con} \quad I_n = \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 d\chi_1 \tilde{J}_n \tilde{f}_n \quad (22)$$

donde  $(\omega, x, \chi_1, \chi_2)$  son los puntos de cuadratura de GL, mientras que  $\xi_n = \xi_n(\omega, x, \chi_1, \chi_2) = (\xi_1, \xi_2)_n$ , y  $\mu_n = \mu_n(\omega, x, \chi_1, \chi_2) = (\mu_1, \mu_2)_n$ , en donde los intervalos  $0 \leq \omega, x, \chi_1, \chi_2 \leq 1$  son los usuales en la cuadratura de GL. La diferencia de coordenadas  $\mu_n$ , y la jacobiana  $\tilde{J}_n = J_{TD,n}$  son computados usando las filas 4-9 de la Tabla 1, mientras que las coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$  se obtienen mediante las filas 4-9 de la Tabla 3, respectivamente.

$n$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\eta_1$	$\eta_2$
1	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega$	$\omega(1 - x_1 + x_1x_2)$	$\mu_1 + \xi_1$	$\mu_2 + \xi_2$
2	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega(1 - x_1)$	$\omega(1 - x_1)$		
3	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega$	$\omega(1 - x_1)$		
4	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega$	$\omega(1 - x_1 + x_1x_2)$	$\mu_1 + \xi_1$	$\mu_2 + \xi_2$
5	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega(1 - x_1)$	$\omega(1 - x_1)$		
6	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega$	$\omega(1 - x_1)$		
7	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega(1 - x_1x_2)$	$\omega(1 - x_1x_2)$		
8	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega$	$\omega$		
9	$(1 - \omega)\chi_1 + \omega(1 - x_1x_2)$	$\omega(1 - x_1)$		
10 para TD	$\omega$	$\omega z_1$	$\omega z_2$	$\omega z_2 z_3$
10 para TA	$\omega$	$\omega \operatorname{asinh}(z_1)$	$\omega z_2$	$\omega z_2 \operatorname{asinh}(z_3)$

Tabla 3: Coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$ , en función de las coordenadas de cuadratura  $0 \leq \omega, x_1, x_2, \chi_1 \leq 1$  y del número  $n$  de las integrales: 1-3 para dos paneles coincidentes, 4-9 para dos paneles con una arista en común, y 10 para dos paneles con un vértice en común. El caso  $n = 10$  depende si es TD o TA.

### 4.3. Dos paneles con un vértice en común

Finalmente, en el caso de dos paneles con un vértice en común, las seis integrales se reducen a una, y está dada por la Ec. (23)

$$I_{10} = \int_0^1 d\omega \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \tilde{J}_{10} \tilde{f}_{10} \tag{23}$$

donde  $(\omega, x, \chi_1, \chi_2)$  son los puntos de cuadratura de GL, mientras que  $\xi_n = \xi_n(\omega, x, \chi_1, \chi_2) = (\xi_1, \xi_2)_n$ , y  $\mu_n = \mu_n(\omega, x, \chi_1, \chi_2) = (\mu_1, \mu_2)_n$ , en donde los intervalos  $0 \leq \omega, x, \chi_1, \chi_2 \leq 1$  son los usuales en la cuadratura de GL. La diferencia de coordenadas  $\mu_n$  no se calcula, mientras que la jacobiana  $\tilde{J}_n = J_{TD,n}$  está dada en la fila 10 de la Tabla 1, y las coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$  en la fila 10 de la Tabla 3, respectivamente. Este esquema de Taylor Extendido y con empleo de la TD fue presentado en detalle en trabajos anteriores, e.g. Sarraf et al. (2017a, 2014, 2013a).

## 5. ESQUEMA DE TAYLOR EXTENDIDO Y LA TRANSFORMACIÓN ASINH

Para la transformación  $\operatorname{asinh}(z)$  se adopta su valor principal. En este caso, se reemplazan cada una de las transformaciones de Duffy introducidas por Taylor, resumidas en la Sec. 4, por otras sendas transformaciones  $\operatorname{asinh}$  elegidas también por conveniencia. Mediante un cálculo directo que, por razones de espacio, no se incluye, resultan las transformaciones resumidas en la Tabla 2, en donde la derivada de la función  $\operatorname{asinh}(u)$  está dada por la Ec. (24)

$$d(u) = \frac{d}{du}(\operatorname{asinh}(u)) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \tag{24}$$

### 5.1. Dos paneles coincidentes

En el caso de dos paneles coincidentes, se emplea la Ec. (21), donde la diferencia de coordenadas  $\mu_n$  y la jacobiana  $\tilde{J}_n = J_{TA,n}$  son computados usando las filas 1-3 de la Tabla 2, mientras que las coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$  se obtienen mediante las filas 1-3 de la Tabla 3, respectivamente.

### 5.2. Dos paneles con una arista en común

En el caso de dos paneles con una arista en común, las seis integrales deben computarse, y están dadas por la Ec. (22), donde la diferencia de coordenadas  $\mu_n$  y la jacobiana  $\tilde{J}_n = J_{TA,n}$

Malla $L$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N$	98	218	386	602	866	1178	1538	2402	3458	4706
$E$	192	432	768	1200	1728	2352	3072	4800	6912	9408

Tabla 4: Número de nodos  $N$  y número de elementos  $E$  para cada malla  $L$ .

son computados usando las filas 4-9 de la Tabla 2, mientras que las coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$  se obtienen mediante las filas 4-9 de la Tabla 3, respectivamente.

### 5.3. Dos paneles con un vértice en común

Finalmente, en el caso de dos paneles con un vértice en común, las seis integrales se reducen a una, y dada por la Ec. (23), donde la diferencia de coordenadas  $\mu_n$  no se calcula, mientras que la jacobiana  $\tilde{J}_n = J_{TA,n}$  está dada en la fila 10 de la Tabla 2, y las coordenadas  $\xi_n$  y  $\eta_n$  en la fila 11 de la Tabla 3, respectivamente.

## 6. EJEMPLO NUMÉRICO: ESFERA UNITARIA EN FLUJO REPTANTE ESTACIONARIO

Se considera el flujo reptante estacionario alrededor de la esfera unitaria (radio  $R = 1$  m) cuyo centro coincide con el origen de coordenadas. La viscosidad dinámica del fluido es  $\mu = 10^{-3}$  Pa · s y su densidad es  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup>. La velocidad del flujo perturbado es  $\mathbf{U} = (0.01, 0, 0)$  m/s, La fuerza de Stokes analítica en régimen estacionario está dada por  $F_S = 6\pi\mu UR$  (Venkataxmi et al., 2004).

Se emplea el GBEM basado en una cuadratura de Taylor cuádruple y con la Transformación Asinh (GBEM-T4-TA) descrito en la Sec. 5. En dicho integrador se emplea la regla de cuadratura de GL con  $n_{1d}$  puntos de cuadratura a lo largo de cada coordenada de integración, implicando un total de  $n_{1d}^4$  puntos por cada par de interacción. En particular, se opta por la regla  $Q_{22}$ , en donde el primer subíndice 2 denota el número de puntos de GL en las autointegrales y en la primera capa de elementos vecinos, mientras que el segundo subíndice 2 es el número de puntos de GL presentes en las remanentes capas. En la Tabla 4 se listan los números de nodos  $N$  y de elementos  $E$  para cada malla  $L$  empleada, en donde, sin perder generalidad, todas son estructuradas, mientras que el número de grados de libertad en ponderación de Galerkin es  $M = 3N$ . En las gráficas se adopta el *Error Vector Magnitude* (EVM) para las mediciones de los errores numéricos, y definido como  $EVM(x_n) = \text{abs}(e(x_n)) / \text{abs}(x_a)$ , donde  $e(x_n) = x_n - x_a$  es el error entre los números  $x_n$  y  $x_a$ , numérico y analítico, respectivamente, mientras que  $\text{abs}(x) = |x|$  es el valor absoluto del número  $x$ . A los efectos de un contraste numérico adicional también se utiliza la transformación de Duffy generalizada de Mousavi y Sukumar (2010), esta última no-desarrollada en este trabajo por razones de espacio, pero previamente implementada en el código computacional. En cuanto a convergencia en malla de la fuerza, en la Fig. 3 se grafican el  $EVM(F)$  en dB (izq.), y en forma adimensional  $\text{abs}(e(F_n)) / \text{abs}(F_a)$  (der.), en función del número de grados de libertad  $M = 3N$  para cada una de las transformaciones de Duffy, asinh, y la de Duffy generalizada de Mousavi y Sukumar (2010).

## 7. CONCLUSIONES

Durante las primeras validaciones numéricas, la Transformación Asinh (TA) aplicada en GBEM con el integrador de Taylor extendido ha mostrado un desempeño ligeramente mejor que la transformación de Duffy, y ambas mucho mejores que la transformación de Duffy generalizada de Mousavi y Sukumar (2010). En cuanto a su implementación computacional, las

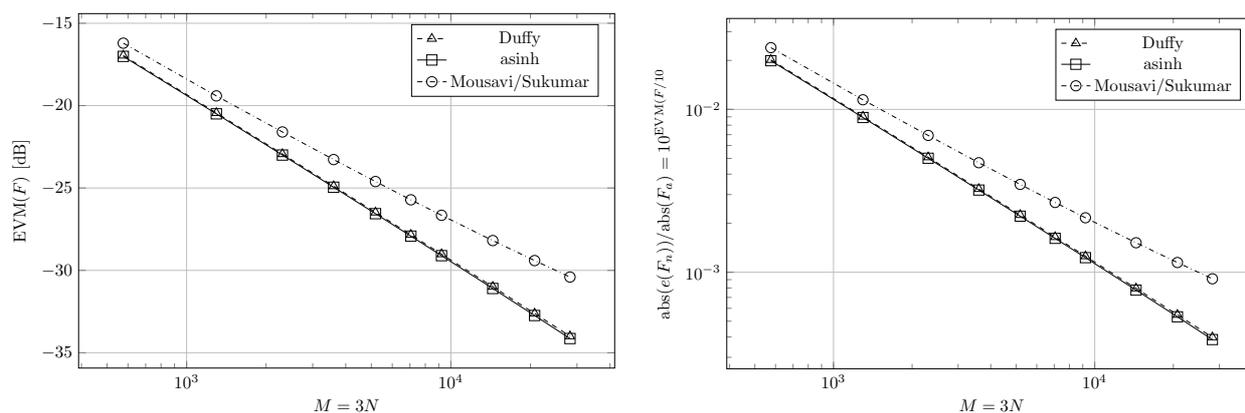


Figura 3: Convergencia en malla de la fuerza  $F$  en función del número de grados de libertad  $M = 3N$  para las transformaciones de Duffy, asinh, y Mousavi/Sukumar: medido en  $EVM(F)$ , en dB (izq.), y adimensional  $abs(e(F_n))/abs(F_a)$  (der.).

once transformaciones asinh que reemplazan a las correspondientes transformaciones de Duffy ha involucrado introducir cambios menores a la algoritmia empleada. Futuros esfuerzos podrían focalizarse en continuar su validación, depuración y optimización de la programación computacional.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, proyecto PIP 112-201501-00588CO), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, proyectos PICT-2014-2660, PICT-E-2014-0191, y PICT-2013-0938), la Universidad Nacional del Litoral (UNL, proyectos CAI+D-2011-01-00134-LI y CAI+D-2011-01-00012-LI), la Universidad Nacional del Comahue (UNCo, proyecto 04/I-215), la Universidad Tecnológica Nacional (UTN, proyecto PID 3526), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, GNU–Git, GNU–Doxygen, y GNU–GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como  $\LaTeX$ , PGF, TikZ, y PGFPlots.

## REFERENCIAS

- Adelman R., Gumerov N.A., y Duraiswami R. Computation of Galerkin double surface integrals in the 3-D boundary element method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 64(6):2389–2400, 2016.
- Aimi A., Diligenti M., Sampoli M.L., y Sestini A. Non-polynomial spline alternatives in Iso-geometric Symmetric Galerkin BEM. *Applied Numerical Mathematics*, 116:10–23, 2017.
- Belibassakis K., Gerotathis T., Kostas K., Politis C., Kaklis P., Ginnis A., y Feurer C. A BEM-isogeometric method for the ship wave-resistance problem. *Ocean Engineering*, 60:53–67, 2013.
- Botha M. Analysis and augmentation of the Duffy transformation for near-singular integrals. En *Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 2012 IEEE*, páginas 1–2. 2012a. doi:10.1109/APS.2012.6347937.
- Botha M. Comments on the construction of near-singularity cancellation transformations for triangle domains. En *Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2012 International Conference on*, páginas 824–826. 2012b. doi:10.1109/ICEAA.2012.6328747.

- Botha M. Accuracy of near-singularity cancellation quadrature schemes for the dynamic MoM kernel. *IEEE Antenn. Wireless Propag. Lett.*, 12:714–717, 2013a. doi:10.1109/LAWP.2013.2264714.
- Botha M. A family of augmented Duffy transformations for near-singularity cancellation quadrature. *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, 61(6):3123–3134, 2013b. doi:10.1109/TAP.2013.2252137.
- D’Elía J., Battaglia L., Cardona A., y Storti M. Full numerical quadrature of weakly singular double surface integrals in Galerkin boundary element methods. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(2):314–334, 2011.
- D’Elía J., Battaglia L., Cardona A., Storti M., y Ríos Rodríguez G. Galerkin boundary elements for a computation of the surface tractions in exterior Stokes flows. *ASME J. Fluids Eng.*, 136(11):111102–111117, 2014.
- Duffy M.G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6):1260–1262, 1982.
- Hackbusch W. *Integral equations*. Birkhäuser, 1995.
- Ingber M.S. y Mammoli A.A. A comparison of integral formulations for the analysis of low Reynolds number flows. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 23:307–315, 1999.
- Manić A., Djordjević M., y Notaroš B. Duffy method for evaluation of weakly singular SIE potential integrals over curved quadrilaterals with higher order basis functions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 62(6):3338–3343, 2014. doi:10.1109/TAP.2014.2309971.
- Mousavi S.E. y Sukumar N. Generalized Duffy transformations for integrating vertex singularities. *Comput. Mech.*, 45:127–140, 2010.
- Power H. y Wrobel L.C. *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.
- Pozrikidis C. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- Reid M., White J., y Johnson S. Generalized Taylor-Duffy method for efficient evaluation of Galerkin integrals in boundary-element method computations. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 63(1):195–209, 2015. doi:10.1109/TAP.2014.2367492.
- Sarraf S., D’Elía J., Battaglia L., y López E. Método de elementos de borde jerárquico basado en el árbol de Barnes-Hut aplicado a flujo reptante exterior. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 30(4):211–220, 2013a. doi:10.1016/j.rimni.2013.07.005.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. An improved assembling algorithm in boundary elements with Galerkin weighting applied to three-dimensional Stokes flows. *ASME Journal of Fluids Engineering*, aceptado, 2017a.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. Validación numérica de un método de elementos de borde para flujo de Stokes oscilatorio alrededor de cuerpos rígidos. En *Mecánica Computacional*, vol. XXXV. La Plata, 2017b.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., Battaglia L., y D’Elía J. Implementación eficiente de una estrategia de elementos de borde por ponderación de Galerkin. En M. García Garino, M. Mirasso, y M. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, volumen XXXII, páginas 1379–1388. 2013b.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. Simulación del flujo reptante exterior a un toro tridimensional mediante el método de elementos de borde. En A. Cardona, P.H. Kohan, R.D. Quinteros, y M.A. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, vol. XXXI, páginas 321–

332. Salta, Argentina, 2012.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. *Comp. Appl. Math.*, 33(1):63–80, 2014.
- Sutradhar A., Paulino G.H., y Gray L.J. *Symmetric Galerkin Boundary Element Method*. Springer, London, England, 2008.
- Taylor D. Accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin EFIE solutions. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 51(7):1630–1637, 2003.
- Venkatalaxmi A., Padmavathi B.S., y Amaranath T. A general solution of unsteady Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 35:229–236, 2004. doi:10.1016/j.fluidyn.2004.06.001.