

## ESTUDIO DE LA TRANSICIÓN TEMPORAL LAMINAR-TURBULENTO EN CANALES ANGOSTOS PARA REYNOLDS BAJOS

William I. Machaca Abregu<sup>a,b</sup> y Federico E. Teruel<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup>*Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Av. Ezequiel Bustillo 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

<sup>b</sup>*Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, Av. Ezequiel Bustillo 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

<sup>c</sup>*CONICET, Centro Atómico Bariloche, Av. Ezequiel Bustillo 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

**Palabras Clave:** DNS, Transición laminar-turbulenta, Incompact3D, Análisis de estabilidad lineal.

**Resumen.** En el presente trabajo se estudia la transición temporal laminar-turbulenta en canales angostos usando simulación numérica directa (DNS). Para ello se usa como herramienta numérica el código Incompact3d. El flujo turbulento se obtiene evolucionando un flujo laminar perturbado por ondas de Tollmiend-Schlichting y por un par de ondas oblicuas. Se presentan resultados para el número de Reynolds basado en la velocidad de fricción ( $Re_\tau$ ) en función del tiempo para  $Re = 1541$  y para distintas amplitudes de las perturbaciones. Se observó, luego de la transición temporal, que el flujo presenta un comportamiento intermitente. Esto permitió estudiar el fenómeno de intermitencia desde el punto de vista de las estructuras de vórtices mediante la técnica de visualización de vórtices  $\lambda_2$ . Se encontraron vórtices tipo *streamwise* en la zona quasi-laminar, donde el  $Re_\tau$  es mínimo; y vórtices tipo *bastón* y quasi-*hairpin* en los picos de la intermitencia y en las zonas donde el  $Re_\tau$  aumenta.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los vórtices y de los mecanismos para su generación ha sido objeto de muchos estudios en los últimos años, ya que ha resultado en una herramienta útil para comprender mejor el complejo fenómeno de la transición y la turbulencia. Muchos de estos estudios fueron realizados para números de Reynolds altos y moderados (Zhou et al., 1996, 1999; Adrian y Liu, 2002; Kim et al., 2008). En dichos estudios se evidenció la presencia de vórtices tipo *hairpin* primario, secundario, terciario, quasi-streamwise, etc. (Machaca Abregu y Teruel, 2016). Sin embargo, en la literatura no es popular el estudio de los vórtices en la transición laminar-turbulenta a números de Reynolds bajos. Uno de los estudios realizados a números de Reynolds bajos fue realizado por Iida y Nagano (1998), quienes estudiaron la relaminarización de un canal turbulento encontrando vórtices *streamwise* en la zona de relaminarización a la que denominaron estado quasi-laminar por la disminución del factor de fricción. No obstante no presentaron estudios sobre la evolución de estos vórtices *streamwise* desde la zona quasi-laminar a la zona turbulenta. Es por esto, que en el presente trabajo se propone realizar una contribución estudiando numéricamente la formación de estructuras de vórtices en la transición temporal laminar-turbulenta. Esto implica evolucionar temporalmente desde una condición inicial de flujo laminar al estado turbulento. Esto se logra perturbando el flujo con perturbaciones que surgen de la teoría de estabilidad lineal (Schmid y Henningson, 2001; Schlatter, 2005). Por otro lado, para la visualización de las estructuras de vórtices en el flujo se utilizó la técnica de visualización de vórtices  $\lambda_2$  (Chakraborty et al., 2005).

El trabajo está dividido en 4 apartados. En la sección 2 se presenta el método numérico, donde se describen los métodos numéricos del código Incompact3D (Laizet et al., 2010; Laizet y Li, 2011) para resolver la ecuación de Navier-Stokes en un canal de placas paralelas y el mecanismo de inestabilización requerido para perturbar el flujo numéricamente. En la sección 3 se presentan los resultados del número de Reynolds basado en la velocidad de fricción y un estudio de las estructuras de vórtices en el flujo. Finalmente se presentan las conclusiones principales del presente estudio.

## 2. MÉTODO NUMÉRICO

Las características principales del código Incompact3D para la simulación numérica de un flujo incompresible en un canal de placas paralelas, mediante la resolución de la ecuación de Navier-Stokes, son :

- Esquemas compactos (tipo Padé) de sexto orden para la discretización espacial.
- Discretización temporal explícita (*Runge Kutta de tercer orden RK3*).
- Grilla uniforme en dos direcciones ( $x$  y  $z$ ) y uniforme o refinada en  $y$  (coordenada normal a las paredes).
- Método de paso fraccionado para satisfacer la condición de incompresibilidad.
- Método espectral para resolver la ecuación de Poisson.
- Paralelización: librería 2DECOMP&FFT, basada en MPI, que tiene como principal desarrollo a la descomposición 2D.

A continuación se describen las aproximaciones numéricas para la resolución de la ecuación de Navier-Stokes, usando el código Incompact3D, para el problema del presente estudio.

## 2.1. Ecuaciones Gobernantes

El código Incompact3D resuelve la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada en un canal con desarrollo hidrodinámico temporal para un flujo incompresible. Los parámetros como la distancia, la velocidad instantánea, la presión y el tiempo son adimensionalizados con la altura media del canal  $h$ , la máxima velocidad en la dirección de la corriente  $U_o$ , la densidad  $\rho$  y la viscosidad cinemática  $\nu$ . La ecuación adimensionalizada es,

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2}(\nabla(\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*) + \vec{u}^* \cdot \nabla)\vec{u}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^2 \vec{u}^*, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = 0, \quad (2)$$

donde:  $\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U_o}$  es el campo de velocidades ( $\vec{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ ),  $\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{h}$  es el vector de coordenadas ( $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ ),  $t^* = \frac{t U_o}{h}$  es el tiempo,  $p^* = \frac{p}{\rho U_o^2}$  es el campo de presiones,  $Re = Re_o = \frac{U_o h}{\nu}$  es el número de Reynolds. Notar que en la ecuación 1 el término convectivo está escrito en su forma antisimétrica. Esta forma específica permite una mejor conservación de la energía cinética para la discretización espacial usada en el código (Kravchenko y Moin, 1997).

## 2.2. Condiciones de contorno

Las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven en un dominio computacional rectangular (ver figura 1).

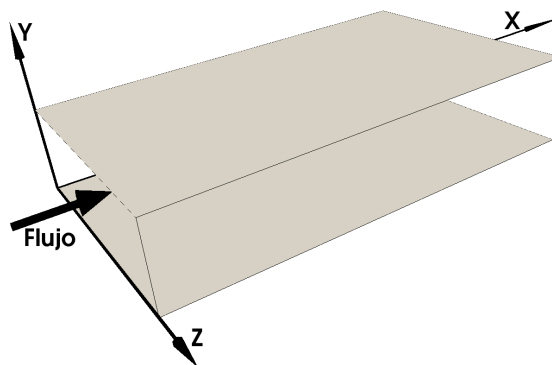


Figura 1: Dominio del canal rectangular entre dos placas paralelas.

Las condiciones de contorno, para el campo de velocidades, en el presente estudio son: periódico en  $z$ , periódico en  $x$  y Dirichlet en  $y$  ( $u^*(x^*, 0, z^*) = u^*(x^*, 2, z^*) = 0$ ). Como el estudio es temporal, se requiere de una condición inicial que permita la inestabilización del flujo. La misma se detalla a continuación.

### 2.2.1. Condición inicial

Como se mencionó líneas arriba para inestabilizar el flujo temporalmente se requiere introducir una perturbación en la condición inicial. Esta perturbación resulta de la teoría de estabilidad lineal (Schlatter, 2005; Machaca Abregu, 2015) y consiste en resolver las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Squire para la transición temporal laminar-turbulenta (Machaca Abregu y Teruel, 2016; Machaca Abregu, 2016).

Entonces en la condición inicial se introduce el flujo Poiseuille más la perturbación, la cual se muestra en en la ecuación 3

$$\vec{U} + \vec{u}, \quad (3)$$

donde  $\vec{U} = (U(y), 0, 0)$  es el flujo Poiseuille base ( $U(y) = \frac{y}{h}(2 - \frac{y}{h})U_o$ ) y  $\vec{u} = (u, v, w)$  es la perturbación dada por

$$\begin{aligned} \vec{u}(x = 0, y, z, t) = & A_{2d} \mathbb{R}[(\vec{u}_{2d}(y))e^{-i\alpha_{r2d}t}] \\ & + \frac{1}{2} A_{3d} \mathbb{R}[(\vec{u}_{r3d}^+(y))e^{i(\beta z - \alpha_{r3d}t)}] + \frac{1}{2} A_{3d} \mathbb{R}[(\vec{u}_{r3d}^-(y))e^{i(\beta z - \alpha_{r3d}t)}], \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $A_{2d}$  es la amplitud de la perturbación bidimensional y  $A_{3d}$  es la amplitud total del par de ondas oblicuas tridimensionales. Las autofunciones espaciales complejas,  $\vec{u}_{2d}$  y  $\vec{u}_{3d}$ , son calculadas resolviendo la ecuación de Orr-Sommerfeld y Squire para un dado número de Reynolds, número de onda en la dirección  $z$  ( $\beta$ ), y para el número de onda real en dos y tres dimensiones,  $\alpha_{2d}$  y  $\alpha_{3d}$ , respectivamente. Las autofunciones son normalizadas para que la amplitud máxima de la componente en la dirección de corriente sea uno con un desplazamiento de fase cero. Los superíndices + y - representan las autofunciones calculadas para  $\beta > 0$  y  $\beta < 0$ , respectivamente. Cuando  $\alpha_{r3d} = \alpha_{r2d}$  la perturbación tridimensional conduce a la inestabilidad tipo K (Klebanoff et al., 1962) que es la usada en el presente trabajo. También  $i = \sqrt{-1}$  y  $\mathbb{R}$  indica la parte real del número complejo.

### 3. RESULTADOS

En la presente sección se muestran los resultados obtenidos luego de realizar la simulación para  $Re = 1541$  con los parámetros de perturbación mostrados en la tabla 1, las cuales conducen a la inestabilidad tipo K. Se calcula el  $Re_\tau$  (Pope, 2000) en el dominio del canal en función del tiempo. Luego se presentan las estructuras de vórtices formadas en distintos tiempos.

Caso	$L_x \times L_y \times L_z$	$\alpha_{2d}$	$\alpha_{3d}$	$\beta$	$A_{2d}$	$A_{3d}$
I	6,28 × 2 × 6,28	1	1	1	0.11	0.10
II	6,28 × 2 × 6,28	1	1	1	0.14	0.10
III	5,61 × 2 × 2,99	1.12	1.12	2.1	0.11	0.10
IV	5,61 × 2 × 2,99	1.12	1.12	2.1	0.14	0.10
V	5,61 × 2 × 2,99	1.12	1.12	2.1	0.14	0.12

Tabla 1: Casos analizados en la transición temporal lamina-turbulenta con  $Re = 1541$ .

#### 3.1. Transición Temporal

Las simulaciones se realizan usando una discretización de  $n_x \times n_y \times n_z = 128 \times 129 \times 128$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente (de aquí en adelante se trabaja con las ecuaciones gobernantes adimensionalizadas por lo que ya no se utilizará el símbolo (\*)). Se simularon 200000 pasos de tiempo, con un paso temporal de  $\Delta t = 0.003$ , partiendo de una condición inicial laminar perturbada. Se calculó en cada paso de tiempo en el volumen del canal el  $Re_\tau$  en función del tiempo. El resultado se muestra en la figura 2, en la que se observa una zona laminar, de transición y un flujo intermitente a tiempos largos para los casos del II al V. En esta zona intermitente el flujo se caracteriza por presentar picos de turbulencia donde el  $Re_\tau$  es máximo y zonas quasi-laminares (Iida y Nagano, 1998) donde el  $Re_\tau$  disminuye. También se observa la

importancia de los parámetros de perturbación,  $\alpha$  y  $\beta$ , en los casos I y III, quienes presentan las mismas amplitudes de perturbación pero diferentes longitudes de onda. El caso I se relaminariza en el tiempo analizado debido a que la perturbación impuesta en la condición inicial no logra inestabilizar el flujo. El caso III, también presenta una relaminarización a instantes iniciales similar al caso I, sin embargo, la perturbación impuesta es suficiente para que el flujo logre la intermitencia. Es por esto que en este caso específico (caso III) se analiza la evolución de vórtices en la zona de relaminarización y en la zona intermitente.

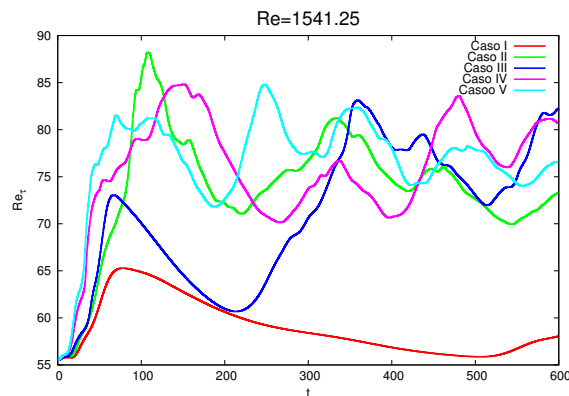


Figura 2:  $Re_\tau$  en función del tiempo para  $Re = 1541$ .

### 3.2. Tipos de vórtices en la zona de relaminarización

En esta subsección se realiza un estudio de las estructuras de vórtices en la zona de relaminarización. Se muestra la formación del vórtice tipo *streamwise*, bastón y hairpin.

Para esta simulación, se elige el caso III por presentar una zona de relaminarización en los instantes iniciales. Se simula en un dominio computacional de  $L_x \times L_y \times L_z = 11,22 \times 2 \times 5,98$  con una discretización de  $n_x \times n_y \times n_z = 256 \times 129 \times 256$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Se duplica el dominio computacional en las direcciones  $x$  y  $z$  para facilitar la visualización de los vórtices en el canal rectangular. Se simuló 300000 pasos de tiempo con un paso temporal de 0,003. En la figura 3 se muestra el  $Re_\tau$  en función del tiempo, se observa que presenta algunas diferencias con el caso III de la figura 2, esto posiblemente sea por la naturaleza intermitente del flujo y el cambio de dominio.

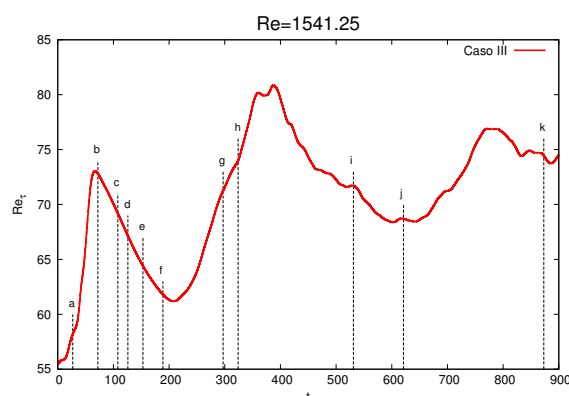


Figura 3:  $Re_\tau$  en función del tiempo para  $Re = 1541$ . Donde **a** corresponde a la figura 4c, **b** a 5a, **c** a 5c, **d** a 6, **e** a 7b, **f** a 7d, **g** a 8b, **h** a 8d, **i** a 9a, **j** a 9c, **k** a 9d

### 3.2.1. Formación del vórtice tipo *streamwise*

La perturbación impuesta a la entrada del canal crece y evoluciona. Esta evolución se mues-

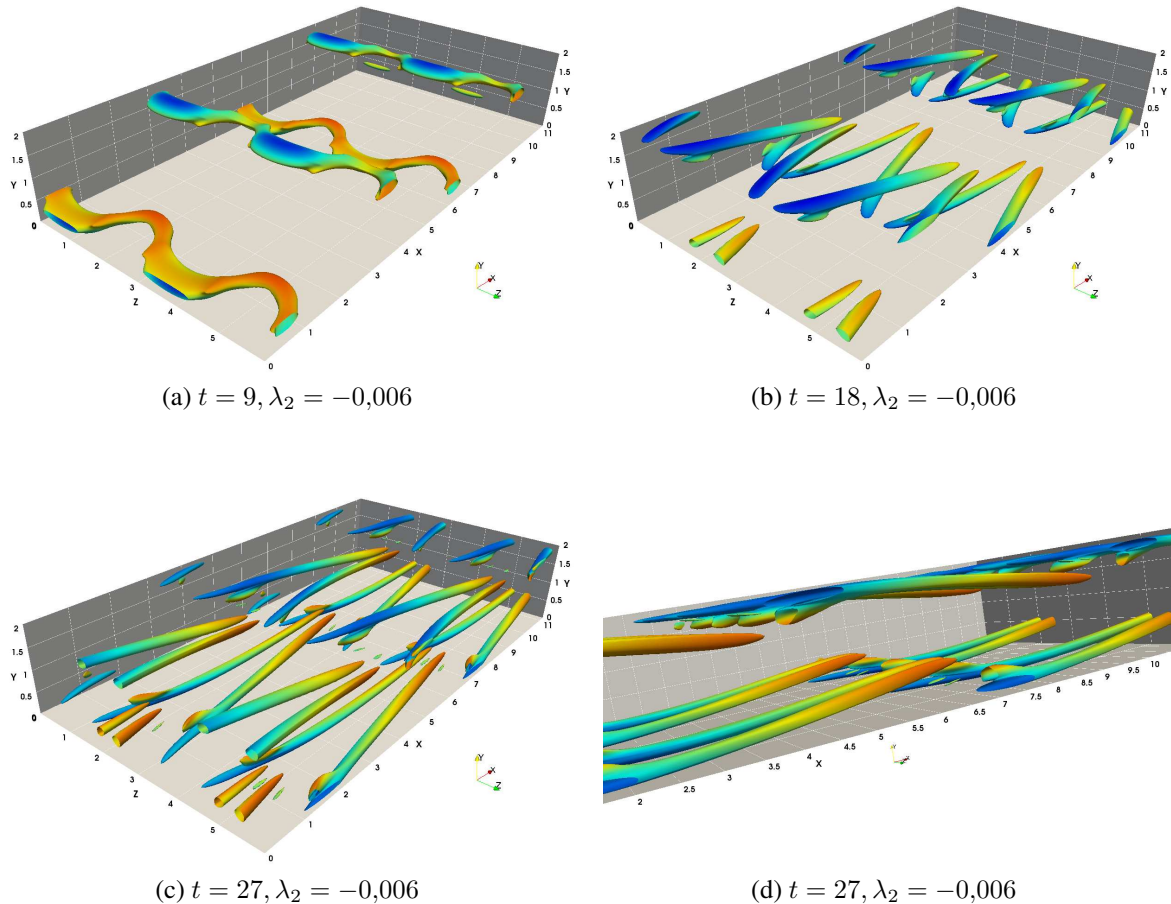


Figura 4: Crecimiento de las estructuras de vórtices en el dominio del canal para distintos tiempos. Las figuras son las isosuperficies de  $\lambda_2$  coloreadas con la velocidad en la dirección de la corriente.

tra en la figura 4, en la que se ve la formación de distintos vórtices a distintos tiempos. En el tiempo  $t = 9$  (ver figura 4a) se observa la evolución de la perturbación impuesta en la condición inicial del canal en ambas capas límites (inferior y superior). En  $t = 18$  se observa la presencia de los vórtices tipo  $\Lambda$  (ver figura 4b), la cual no llega a formar el vórtice tipo *hairpin* (Zhou et al., 1996, 1999; Adrian, 2007) como sucede a Reynolds superiores (Machaca Abregu y Teruel, 2016; Machaca Abregu, 2015; Schlatter et al., 2006). Este par de vórtices crecen y evolucionan con el mecanismo de *first ejection* y *first sweep* (Machaca Abregu y Teruel, 2016), lo cual produce su alejamiento de las paredes superior e inferior. Sin embargo, no presenta el mecanismo de *second ejection* y *second sweep* que permiten la formación simétrica de los vórtices tipo *hairpin* (ver figura 4c y 4d)

Si bien no se forman los vórtices tipo *hairpin*, la evolución de los vórtices tipo  $\Lambda$  forma los vórtices tipo *streamwise*. Esto se puede ver en la figura 5, donde se observa la evolución de los vórtices tipo  $\Lambda$  mediante el mecanismo de *first ejection* y *first sweep*. Esta evolución, permite la obtención de los vórtices *streamwise* en el seno del flujo (alejado de las paredes) (ver figura 5c y 5d).

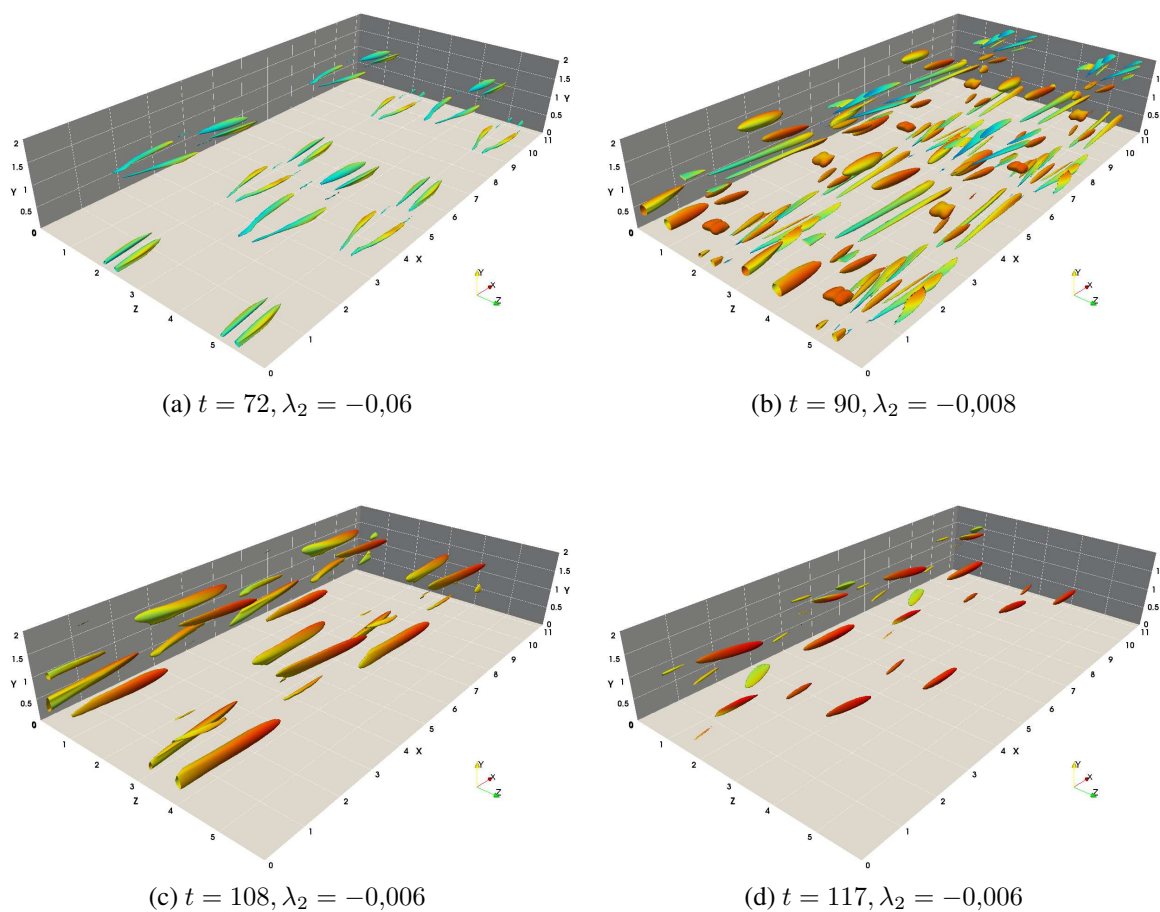


Figura 5: Formación del vórtice tipo *streamwise*. En a) se muestra la evolución del vórtice tipo  $\Lambda$ , en b) se muestra la interacción de los vórtices formados y en c) y d) se muestran los vórtices tipo *streamwise*. Las figuras son las isosuperficies de  $\lambda_2$  coloreadas con la velocidad en la dirección  $x$ .

### 3.2.2. Formación del vórtice en forma de *bastón*

El vórtice tipo *streamwise* evoluciona y toma la forma de *bastón*, esto se puede observar en la figura 6, correspondiente al tiempo  $t = 126$ . Estos vórtices tipo *bastón* interactúan entre ambas capas límite y dan lugar a vórtices en el plano  $z = \text{constante}$ .

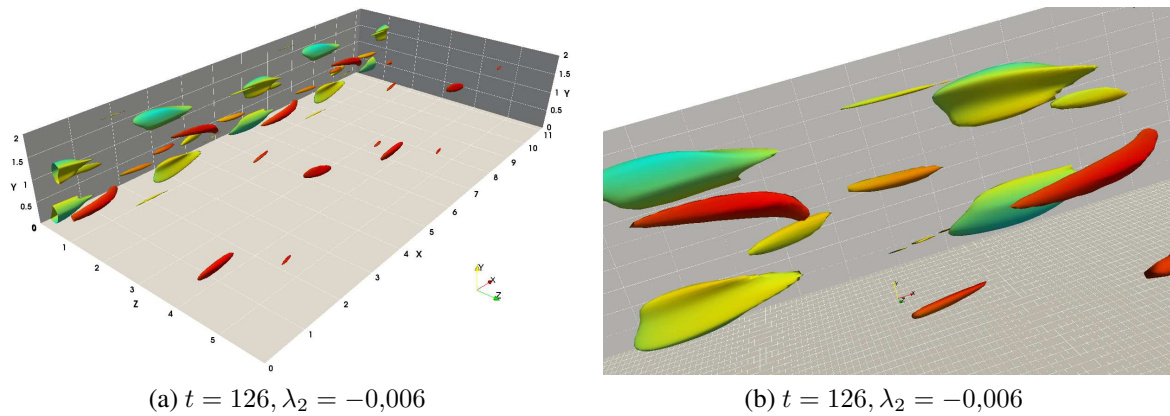
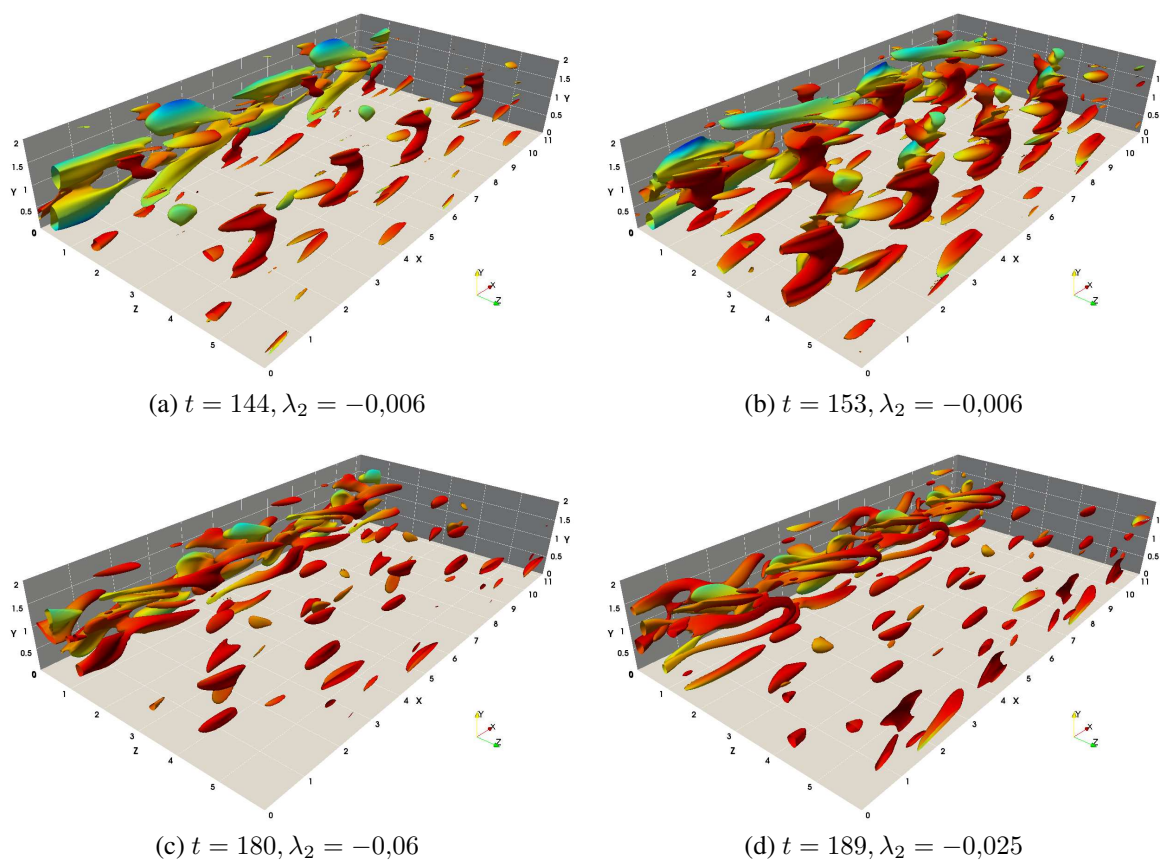


Figura 6: Formación del vórtice tipo *bastón*.

Los vórtices en el plano  $z$  muestran la influencia de ambas paredes en la formación de vórtices. Al tiempo  $t = 144$  (ver figura 7a) se observa la aparición del vórtice tipo  $\Lambda$  en el plano  $y$  para  $z \approx 4$ , el cual surge de la interacción de los vórtices tipo *bastón* de ambas capas límites. En  $t = 180$  (ver figura 7c) se observa que los vórtices en el dominio interactúan con mayor intensidad para dar lugar a vórtices tipo *hairpin* en el plano  $y$  (ver figura 7d a  $z \approx 1$ ).

Estos vórtices formados en esta zona de relaminarización presentan una cierta simetría en su formación debido, presumiblemente, a que están influenciados por la simetría de la condición inicial. Asimismo, es importante mencionar que los vórtices no se manifiestan en paquetes o grupos coherentes (Zhou et al., 1999; Adrian y Liu, 2002; Wang et al., 2016), aunque sí presentan un comportamiento ordenado o coherente para esta primera relaminarización, que luego ser rompe, para dar lugar a la intermitencia.



Figura 7: Vórtices en el plano  $y$ .

### 3.3. Estructuras en flujo intermitente

Se estudia las estructuras de vórtices formadas en la zona intermitente, el cual se caracteriza por presentar vórtices no simétricos y desorganizados.

El crecimiento de los vórtices luego de la relaminarización da lugar a vórtices desorganizados que se conglomeran en regiones específicas del espacio. Esto se puede ver en la figura 8a a tiempo  $t = 279$ , donde se observan los vórtices *streamwise* y *bastón* que crecen y se combinan (ver figura 8b a tiempo  $t = 297$ ) para luego conglomerarse en un sector del dominio, como se ve en la figura 8c a tiempo  $t = 306$ . Esta conglomeración de vórtices en sectores del dominio es la característica principal del flujo intermitente, que permite la persistencia del mismo a tiempos mayores. Dentro de esta conglomeración, los vórtices se encuentran en un estado caótico (ver figura 8d a tiempo 324) y presentan distintas estructuras desorganizadas y no simétricas en el dominio.

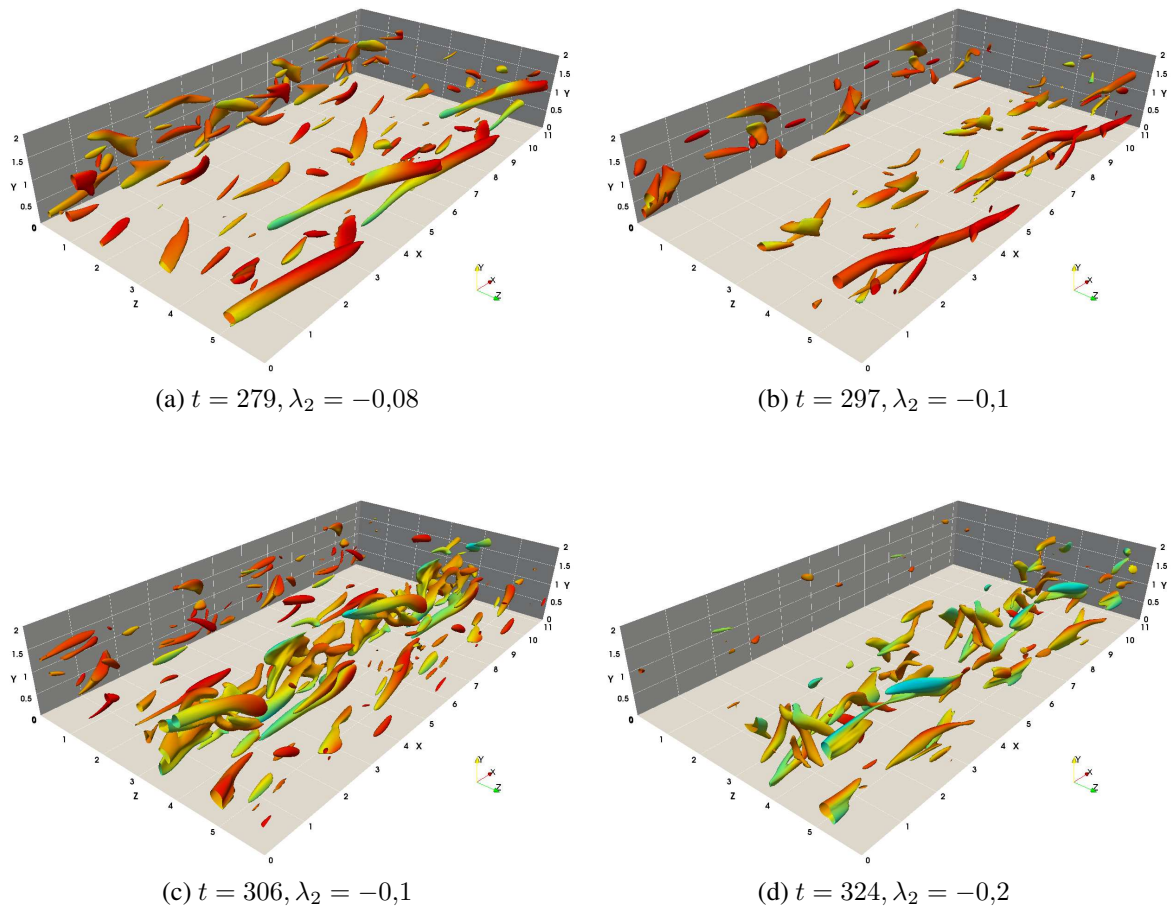


Figura 8: Crecimiento de las estructuras de vórtices a distintos tiempos en la zona intermitente.

En este estado, dentro del dominio, los vórtices empiezan a oscilar en la dirección  $z$ . Producto de esta oscilación se generan vórtices no simétricos como se puede ver en la figura 9. En la misma, se observa a tiempo  $t = 531$  y  $t = 594$  (ver figura 9a y 9b) vórtices tipo *bastón* y *quasi-hairpin*, los cuales no se encuentran organizados como los vistos en la zona de relaminarización (ver sección 3.2). Estos vórtices corresponden a la zona donde el  $Re_\tau$  disminuye (ver figura 3). A tiempo  $t = 621$ , donde el  $Re_\tau$  es mínimo, se observan vórtices tipo *streamwise* que se hallan en la zona quasi-laminar. Finalmente a  $t = 873$  se observa que el flujo en un pico (ver figura 3) presenta vórtices tipo *streamwise* y *quasi hairpin* desorganizados y que carecen de simetría.

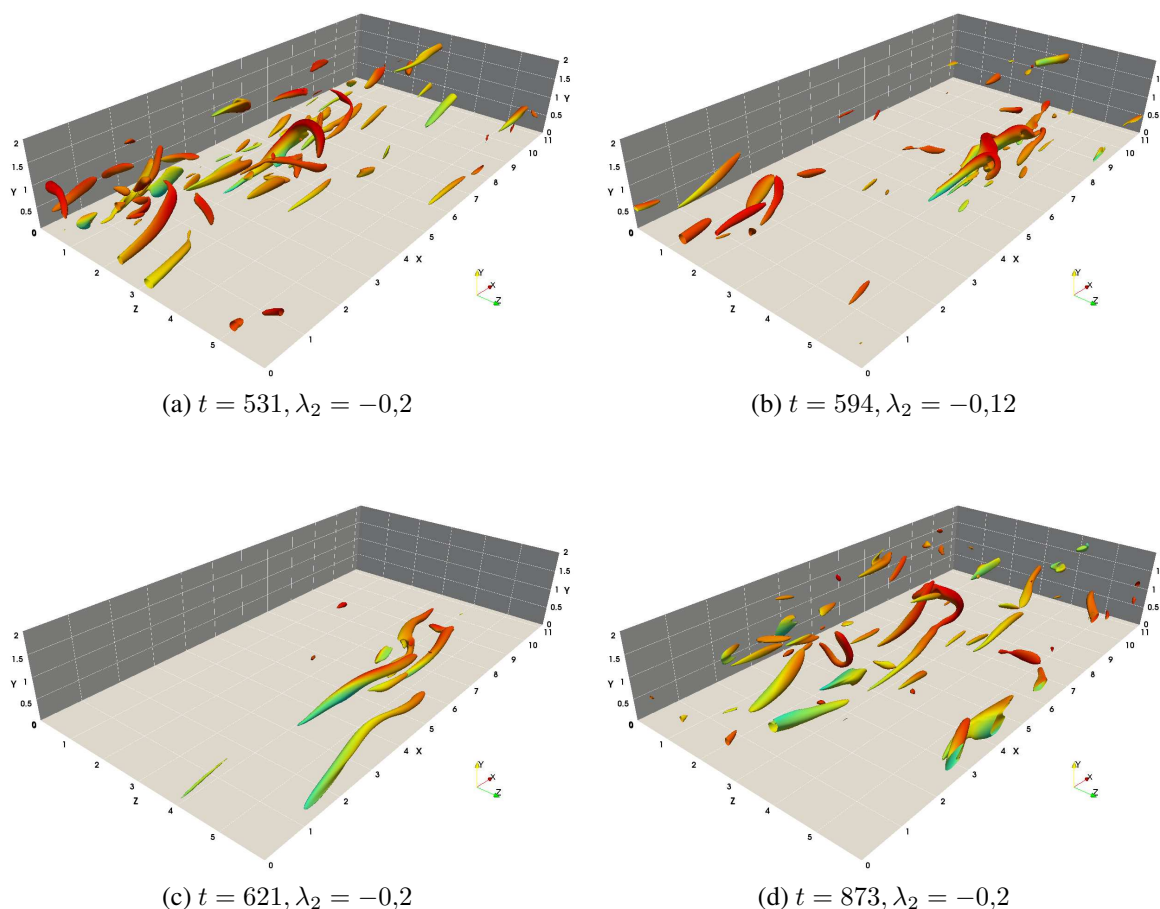


Figura 9: Vórtices en la zona intermitente.

Este análisis nos permite concluir que en el flujo intermitente los vórtices *streamwise* son característicos de la zona quasi-laminar en los puntos donde el  $Re_\tau$  es mínimo, mientras que los vórtices tipo *streamwise*, *bastón* y quasi *hairpin* son característicos de las zonas donde el  $Re_\tau$  aumenta y en los picos de turbulencia.

#### 4. CONCLUSIONES

Se estudió en un flujo entre dos placas paralelas la transición temporal laminar-turbulenta a Reynolds bajos. Se calculó el  $Re_\tau$  en función del tiempo y las estructuras de vórtices usando la técnica de visualización de vorticidades  $\lambda_2$ . En el primer caso se obtuvo un flujo intermitente para cuatro de los cinco casos analizados, siendo el caso III, el que presenta una zona de relaminarización en los instantes iniciales. En el segundo caso, se estudió las estructuras de vórtices presentes en el caso III para la zona de relaminarización y para el flujo intermitente. En la zona de relaminarización se encontraron vórtices tipo  $\Lambda$ , los cuales mediante el mecanismo de *ejection* y *sweep* crecen y forman los vórtices tipo *streamwise*. Asimismo se encontraron vórtices tipo *bastón* y tipo  $\Lambda$  en el plano  $z = \text{constante}$ . Una de las características de los vórtices encontrados en esta zona es su coherencia. En la zona intermitente, se encontraron vórtices tipo *bastón* y tipo quasi *hairpin* en los picos de intermitencia y en las zonas donde el  $Re_\tau$  aumenta, y vórtices *streamwise* en la zona quasi-laminar, donde el  $Re_\tau$  es mínimo. Una característica de estos vórtices es que carecen de coherencia y que oscilan en grupos en la dirección  $z$ . Mediante este mecanismo de oscilación se continúan generando y quasi-laminarizando vórtices para

mantener el estado intermitente.

## REFERENCIAS

- Adrian R.J. Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Physics of Fluids.*, 19:1–16, 2007.
- Adrian R.J. y Liu Z.C. Observation of vortex packets in direct numerical simulation of fully turbulent channel flow. *Journal of Visualization.*, 5(1):9–19, 2002.
- Chakraborty P., Balachandar S., y Adrian R.J. On the relationships between local vortex identification schemes. *J. Fluid Mech.*, 535:189–214, 2005.
- Iida O. y Nagano Y. The relaminarization mechanisms of turbulent channel flow at low reynolds numbers. *Flow, Turbulence and Combustion*, 60:193–213, 1998.
- Kim K., Sung H.J., y Adrian R.J. Effects of background noise on generating coherent packets of hairpin vortices. *Physics of fluids.*, 20:1–10, 2008.
- Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., y Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *J. Fluid Mech*, 12:1, 1962.
- Kravchenko A.G. y Moin P. On the effect of numerical errors in Large Eddy simulation of turbulent flows. *J. Comp. Phys.*, 131:310–332, 1997.
- Laizet S., Lamballais E., y Vassilicos J.C. A numerical strategy to combine high-order schemes, complex geometry and parallel computing for high resolution DNS of fractal generated turbulence. *Computers and Fluids*, 39-3:471–484, 2010.
- Laizet S. y Li N. Incompat3d, a powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $O(10^5)$  computational cores. *Int. J. of Numerical Methods in Fluids*, 67-11:1735–1757, 2011.
- Machaca Abregu W.I. *Esquemas compactos de alto orden para el estudio de la transferencia de calor en régimen de transición*. Tesis de Maestría en Ingeniería, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 2015.
- Machaca Abregu W.I. *Estudio numérico de la transferencia de calor en régimen de transición en canales angostos*. Informe de Beca de Perfeccionamiento - CNEA, Bariloche, Argentina, 2016.
- Machaca Abregu W.I. y Teruel F.E. *Estudio de las estructuras de vorticidad en la transición espacial laminar-turbulenta en canales angostos*. ENIEF 2016, Córdoba, Argentina, 2016.
- Pope S.B. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- Schlatter P.C. *Large-Eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow*. PhD tesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2005.
- Schlatter P.C., Stolz S., y Kleiser L. Large-eddy simulation of spatial transition in plane channel flow. *Journal of Turbulence.*, 7(33):1–24, 2006.
- Schmid P.J. y Henningson D.S. Stability and Transition in Shear Flows. En *Applied Mathematical Sciences*, volumen 142. Springer, 2001.
- Wang Y., Al-Dujaly H., Yan Y., Zhao N., y Liu C. Physics of multiple level hairpin vortex structures in turbulence. *Physics, Mechanics and Astronomy, Science China*, 59(2):1–11, 2016.
- Zhou J., Adrian R.J., y Balachantar S. Autogeneration of near-wall vortical structures in channel flow. *Physics of Fluids.*, 8(1):288–290, 1996.
- Zhou J., Adrian R.J., Balachantar S., y Kendall T.M. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *J. Fluid Mech.*, 387:353–396, 1999.