

ALGORITMOS DE PUNTO INTERIOR PARA OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL FRENTE A ACCIONES SÍSMICAS

Angel Queizan^a y Victorio E. Sonzogni^b

^aUniversidad Tecnológica Nacional. Regional La Plata.
Calle 60 entre 124 y 122, 1900 La Plata, Argentina
aqueizan@frlp.utn.edu.ar

^b Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC, UNL, CONICET,
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
sonzogni@intec.unl.edu.ar <http://www.cimec.org.ar>

Palabras clave: Optimización estructural, Algoritmos de punto interior, Estructuras antisísmicas.

Resumen. La optimización estructural busca diseños de estructuras que minimicen el costo, o peso de la estructura, por ejemplo, frente a un juego de variables de diseño y teniendo en cuenta restricciones a cumplir, tales como valores máximos de tensiones o deformaciones. Hay problemas de optimización de dimensiones en los cuales las variables de diseño son dimensiones de elementos estructurales (secciones, espesores). En problemas de optimización de forma, las variables de diseño definen la forma de la pieza. Finalmente en problemas de optimización topológica, no solamente se modifican dimensiones o posición de puntos característicos, sino también la existencia o no de elementos estructurales (barras, vigas,...).

En cuanto a la manera de abordarlos, hay dos grandes enfoques: por programación matemática, o mediante técnicas evolucionarias.

En este trabajo se utiliza un procedimiento de programación matemática para optimizar el diseño, con respecto a sus dimensiones, de una estructura aporticada sometida a acción sísmica. Para verificar la satisfacción de las restricciones es necesario analizar la respuesta sísmica de la estructura y obtener deformaciones y tensiones. Este análisis se hace por superposición modal espectral.

La búsqueda del mínimo se efectúa por un procedimiento de punto interior, en el cual cada diseño intermedio satisface las restricciones del problema.

1. INTRODUCTION

La optimización estructural busca diseños de estructuras que minimicen una función objetivo que puede ser el costo, o peso de la estructura, por ejemplo. Esta minimización se hace frente a un juego de variables de diseño y teniendo en cuenta restricciones a cumplir, tales como valores máximos de tensiones o deformaciones.

Hay varios tipos de problemas. En los problemas de optimización de dimensiones las variables de diseño son las dimensiones de los elementos estructurales (secciones, espesores). En problemas de optimización de forma, las variables de diseño definen la forma de la pieza. Finalmente en problemas de optimización topológica, no solamente se modifican dimensiones o posición de puntos característicos, sino también la existencia o no de elementos estructurales. Por ejemplo en la optimización topológica de una estructura reticulada se obtiene como respuesta cuáles barras deben constituir la estructura, y sus dimensiones.

En cuanto a la manera de abordar estos problemas hay dos grandes enfoques: por programación matemática, o mediante técnicas evolucionarias. En el primero, se busca el diseño óptimo mediante un problema de minimización de la función objetivo, teniendo en cuenta sus derivadas con respecto a las variables de diseño. Estos métodos poseen fundamentación matemática y elegancia formal. Tienen como inconveniente la necesidad de evaluar derivadas de las funciones. Por otro lado pueden conducir a mínimos locales pero no a mínimos globales.

Las técnicas evolucionarias (por ejemplo Algoritmos Genéticos) incluyen algún tratamiento aleatorio. Son más robustas y permiten arribar a óptimos globales. Sin embargo pueden ser de más lenta convergencia que las técnicas de programación lineal.

En este trabajo se utiliza un procedimiento de programación matemática para optimizar el diseño, con respecto a sus dimensiones, de una estructura aporticada sometida a acción sísmica. Para verificar la satisfacción de las restricciones es necesario analizar la respuesta sísmica de la estructura y obtener deformaciones y tensiones. Este análisis se hace por el método de superposición modal espectral. La búsqueda del mínimo de la función objetivo, en este caso el volumen estructural, se efectúa por un procedimiento de punto interior. En estos métodos se parte de un diseño inicial que verifica que las restricciones del problema y en cada iteración se avanza con diseños intermedios que también las satisfacen. Entre los métodos de punto interior se utiliza aquí el denominado FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithm) que permite estudiar problemas no lineales con restricciones de desigualdad (Herskovits y Santos, 1998). Este método ha sido utilizado por los autores para problemas de elasticidad estática lineal (Sonzogni y Queizan; Sonzogni et al., 2005).

Se muestran ejemplos de aplicación a una estructura aporticada plana de acero.

2. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El problema de optimización estructural se plantea en la siguiente forma:

hallar x tal que :

$$\text{mín } f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

sujeto a :

$$g(x) \leq 0 \quad (2)$$

$$h(x) = 0 \quad (3)$$

$$x_L \leq x \leq x_U \quad (4)$$

Allí f es la función objetivo que se desea minimizar, en este caso el volumen o peso estructural. Es una función escalar que depende del vector x que agrupa las variables de diseño, que pueden ser secciones de elementos estructurales, espesores, etc. Las restricciones de desigualdad están dadas a través del vector g que es también función de x . Análogamente se pueden especificar restricciones de igualdad, indicadas por el vector h . Finalmente, las últimas restricciones están planteadas sobre las variables de diseño a través de un vector de valores inferiores (x_L) y otro de valores superiores (x_U).

A fin de simplificar las ecuaciones el problema será planteado como uno de optimización con restricciones solamente de desigualdad, dado que en última instancia las ecuaciones (3) y (4) pueden escribirse bajo la forma de (2):

hallar x tal que :

$$\text{mín } f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (5)$$

sujeto a :

$$g(x) \leq 0 \quad (6)$$

Para la resolución del problema con restricciones se pueden introducir las condiciones de Karush-Khun-Tucker, quedando el problema (Herskovits, 1995):

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda = 0 \\ G(x)\lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

donde G es una matriz diagonal cuyos elementos son los elementos del vector g , y λ es un vector de multiplicadores de Lagrange, nuevas incógnitas del problema. El sistema dado por 7 puede escribirse:

$$\phi(y) = 0 \quad (8)$$

definiendo $y^T = [x^T \lambda^T]$.

El sistema (8) se puede resolver por el método de Newton-Raphson, a partir de un valor inicial y^0 que se corrige iterativamente con un vector incremental Δy^k para obtener la nueva iteración:

$$y^{k+1} = y^k + \Delta y^k \quad (9)$$

siendo el vector incremental obtenido de:

$$\nabla \phi(y^k) \Delta y^k = -\phi(y^k) \quad (10)$$

siendo

$$\Delta y^k = \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^k \\ \lambda^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} \quad (11)$$

Con algún trabajo algebraico, la ecuación (10) se puede escribir (Herskovits y Santos, 1998):

$$A_0 \begin{bmatrix} d_x^k \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

con

$$A_0 = \begin{bmatrix} \nabla^2 f & \nabla g \\ \Lambda \nabla g^T & G \end{bmatrix} \quad (13)$$

siendo Λ una matriz diagonal con $\Lambda_{ii} = \lambda_i$.

3. ALGORITMOS DE PUNTO INTERIOR

Los algoritmos de punto interior se basan en comenzar el proceso de minimización con un vector de variables que satisface las restricciones del problema, moviéndose por direcciones de descenso que permanezcan siempre en la región admisible. Se introduce una corrección lineal a las direcciones de búsqueda:

$$d^k = d_0^k + \rho d_1^k \quad (14)$$

d_0^k se obtiene de la resolución de (12), y d_1^k de

$$A_0 \begin{bmatrix} d^k \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda^k \end{bmatrix} \quad (15)$$

siendo ρ una medida asociada a $\|d_0\|$ (Herskovits, 1986).

Una mejora se introduce en el método FAIPA algorithm (Herskovits y Santos, 1998) realizándose una búsqueda lineal en la dirección

$$x^{k+1} = x^k + t d + t^2 \tilde{d} \quad (16)$$

dado d por (14) y obteniendo \tilde{d} de la ecuación:

$$A_0 \begin{bmatrix} d^k \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Lambda \tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\tilde{\omega} \in \mathbf{R}^m$ está dado por:

$$\tilde{\omega} = g(x+d) - g(x) - \nabla g^T(x) d \quad (18)$$

Como se ha indicado este método avanza obteniendo iteraciones que se encuentran siempre en la región admisible.

4. ANÁLISIS DE PÓRTICO SOMETIDO A MOVIMIENTO SÍSMICO

Las ecuaciones de movimiento de una estructura aporticada, discretizada por medio de algún método numérico (p.ej. elementos finitos) puede escribirse:

$$M^k \ddot{u} + C^k \dot{u} + K^k u = -M^k J a_s \quad (19)$$

donde M^k , C^k y K^k son las matrices de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez, respectivamente. Estas matrices dependen del vector de variables de diseño por lo que se ha agregado el superíndice que identifica la iteración. El vector u contiene los desplazamientos nodales (función del tiempo) y los puntos sobre ese símbolo significan derivación con respecto al tiempo.

Las aceleraciones del suelo debido al sismo se representan con a_s son también función del tiempo. Finalmente el vector J contiene valor unitario en cada grado de libertad en la dirección del desplazamiento sísmico.

Esa ecuación puede ser resuelta por integración paso-a-paso en el tiempo obteniendo así la historia de los desplazamientos a lo largo de la respuesta. Para ello se precisa conocer el acelerograma que proporciona las aceleraciones del suelo a_s en cada instante.

En lugar de calcular la respuesta paso-a-paso, es habitual evaluar los máximos valores de la respuesta por el método de superposición modal espectral. En este caso se efectúa en primer lugar un análisis de vibración libre de la estructura, obteniendo los períodos naturales de vibración T_i y las formas modales ϕ_i asociadas. Realizando un cambio de variables en la ecuación 19 teniendo en cuenta las formas modales, se consigue desacoplar el sistema. Es decir se puede calcular la respuesta de cada modo por separado. Los valores máximos de la respuesta de cada modo se pueden obtener mediante los espectros de respuesta. El vector de valores máximos -a lo largo de la respuesta- para el vector de desplazamientos del modo i se puede calcular como:

$$\max u_i = \Gamma_i \phi_i S_d = \Gamma_i \phi_i \frac{S_a}{\omega_i^2} \quad (20)$$

En esa expresión

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T M J}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (21)$$

es el factor de participación modal; S_d el espectro de desplazamientos, función del período de ese modo; S_a el espectro de respuesta en (pseudo)aceleraciones, y ω_i la frecuencia del modo.

Los máximos de cada modo no se producen simultáneamente, por eso no puede sumarse directamente la contribución de cada modo. Hay fórmulas con las que se estima el máximo para la respuesta estructural, entre las cuales la más popular es:

$$\max u = \sqrt{\sum (\max u_j)^2} \quad (22)$$

La sumatoria en el radicando se extiende a un número de modos significativos para la respuesta. El reglamento INPRES-CIRSOC 103 indica incluir por lo menos, todos aquellos modos cuya contribución a los efectos totales superen el 5 % de la contribución correspondiente del modo fundamental, y no menos de 3 modos. Además si hay modos cuyos períodos difieren entre sí en menos del 10 %, sus efectos se sumarán en valores absolutos siendo esa suma la que se eleva al cuadrado en la fórmula 22. Esta combinación se debe aplicar a cada respuesta calculada (desplazamientos, distorsiones, tensiones, sollicitaciones, etc).

En lugar del espectro de respuesta en aceleraciones S_a , en la ecuación 20 se utiliza el espectro de diseño del CIRSOC.

5. EJEMPLOS

Se muestran a continuación algunos ejemplos académicos a fin de verificar el funcionamiento de los algoritmos que se han implementado para la optimización. En ellos se trabaja con pórticos planos de acero. Las secciones transversales corresponden a perfiles I. La altura d del perfil y el ancho b de su ala se toman como variables de diseño. Los espesores de alma w y alas f se calculan con las expresiones (siguiendo un trabajo de Papadrakakis et al. (2001)):

$$f = 0,06d + 0,10(b - 0,10m) \quad (23)$$

$$w = 0,625f \quad (24)$$

Estas expresiones aseguran que el espesor del alma es menor que el ancho b del perfil.

La función objetivo es el volumen de la estructura. El módulo de elasticidad es $E = 200GPa$ y la tensión de fluencia $\sigma_y = 250MPa$. Las restricciones impuestas son de tres tipos: i) las tensiones en las partes superior e inferior de la sección en ambos extremos de cada viga/columna debe ser inferior a un valor admisible $\sigma_{max} = \sigma_y/\nu$; ii) el desplazamiento en el extremo superior del pórtico debe ser inferior a d_{max} ; y iii) la distorsión de piso debe ser menor a θ_{max} .

5.1. Pórtico de un vano y seis pisos

Este ejemplo corresponde a un pórtico de un vano y seis pisos con columnas empotradas en la base. La luz del vano es 7.32 m y la altura de todos los pisos 3.66 m. Para las restricciones se tomaron $\nu = 2$ y $\theta_{max} = 0,01$, no especificándose restricción sobre el desplazamiento máximo.

Se tomaron tres tipos de secciones: una para las columnas de los tres primeros pisos, otra para las columnas de los pisos superiores, y otra para las vigas. Las secciones iniciales se tomaron todas iguales, de 35 cm de alto y 30 cm de ancho. Se fijaron como valores máximos, para la altura del perfil 0,60 m y para el ancho del ala 0,50 m. Los valores mínimos fijados fueron, para la altura 0,105 m y para el ancho del ala 0,09 m.

Las masas se concentraron a nivel de cada nodo, y en los grados de libertad traslacionales se colocó una masa de $2,617 \times 10^4 kg$.

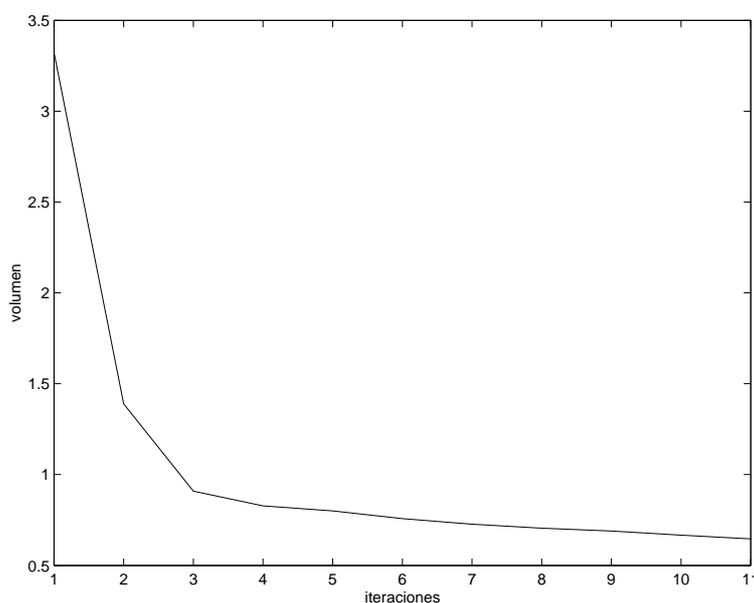


Figura 1: Pórtico de seis pisos: volumen estructural en función de la cantidad de iteraciones

Este ejemplo se resolvió por un algoritmo de Programación Cuadrática Secuencial. En la figura 1 se muestra la evolución del volumen de la estructura a lo largo del proceso de iteración.

La sección final de las columnas inferiores fue de 24,99 cm de alto y 9 cm de ancho; la de las columnas superiores, 19,73 cm de altura y 9 cm de ancho; y la de las vigas, 29,13 cm de alto y 9 cm de ancho. En todos los casos el ancho de la sección quedó acotado por el mínimo geométrico especificado.

Las tensiones quedaron bajo el valor admisible fijado. Las restricciones activas (es decir aquellas para las que se alcanzó el valor máximo) fueron las distorsiones en el segundo y cuarto pisos. El desplazamiento máximo en el piso superior fue de 17 cm.

5.2. Pórtico de dos vanos y cuatro pisos

Este ejemplo corresponde a un pórtico de dos vanos y cuatro pisos de altura, con columnas empotradas en la base. La luz del vano es 7.32 m y la altura de todos los pisos 3.66 m. Para las restricciones se tomaron $\nu = 2$ y $\theta_{max} = 0,01$; no especificándose restricción sobre el desplazamiento máximo.

Se tomaron tres tipos de secciones: una para las columnas de los tres primeros pisos, otra para las columnas de los pisos superiores, y otra para las vigas. Las secciones iniciales se tomaron todas iguales, de 35 cm de alto y 30 cm de ancho. Se fijaron como valores máximos, para la altura del perfil 0,60 m y para el ancho del ala 0,50 m. Los valores mínimos fijados fueron, para la altura 0,105 m y para el ancho del ala 0,09 m.

Las masas se concentraron a nivel de cada nodo, y en los grados de libertad traslacionales se colocó una masa de $2,617 \times 10^4 kg$. En los nodos de columnas interiores se colocó el doble de esa masa.

Este ejemplo se resolvió también por un algoritmo de Programación Cuadrática Secuencial. En la figura 2 se muestra la evolución del volumen de la estructura a lo largo del proceso de iteración.

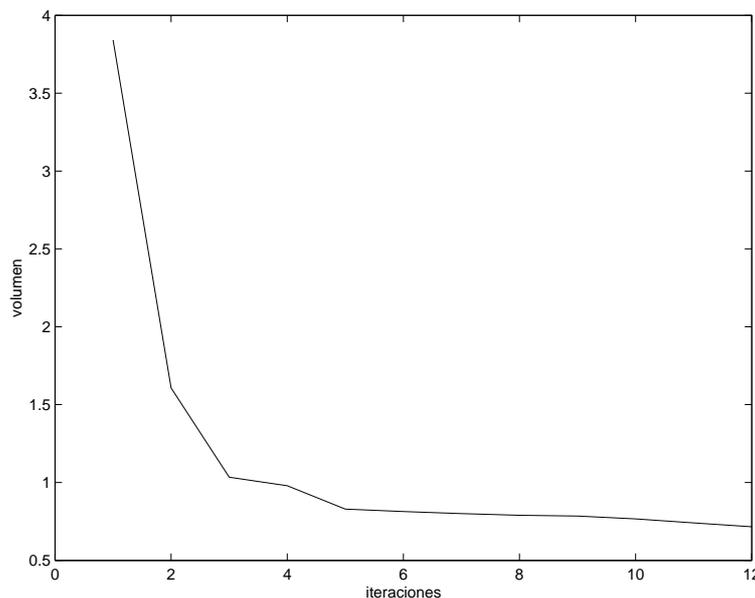


Figura 2: Pórtico de cuatro pisos y dos vanos: volumen estructural en función de la cantidad de iteraciones

La sección final de las columnas inferiores fue de 26 cm de alto y 9 cm de ancho; la de las columnas superiores, 21,2 cm de altura y 9 cm de ancho; y la de las vigas, 25,8 cm de alto y 9 cm de ancho. En todos los casos el ancho de la sección quedó acotado por el mínimo geométrico especificado.

Las tensiones quedaron bajo el valor admisible fijado. Las restricciones activas (es decir aquellas para las que se alcanzó el valor máximo) fueron las distorsiones en el segundo y tercer pisos. El desplazamiento máximo en el piso superior fue de 12 cm.

5.3. Pórtico de seis pisos y dos vanos de diferente altura

Este ejemplo, versión en dos dimensiones del ejemplo dado Papadrakakis et al. (2001), corresponde al pórtico de la figura 3, donde se indica también la numeración de nodos y elementos.

La separación entre pisos es de 3.66 m y luz de los vanos es de 7.32 m. Las columnas 1, 2 y 3 están empotradas al terreno y se tomaron cuatro tipos de secciones: *Sección tipo 1*: columnas exteriores en los primeros tres pisos (1,6,11,3,8 y 13); *Sección tipo 2*: columnas interiores en los primeros tres pisos (2,7 y 12); *Sección tipo 3*: columnas exteriores en los pisos 4, 5 y 6 (16,19,22,17,20 y 23); *Sección tipo 4*: todas las vigas.

Las variables de diseño son, para cada sección: la altura del perfil y el ancho de su ala. Se tomó como diseño inicial que todas las secciones tuvieran una altura de 0,35 m y un ancho de ala de 0,14 m, lo cual condujo a un volumen inicial de la estructura de $1,8736m^3$.

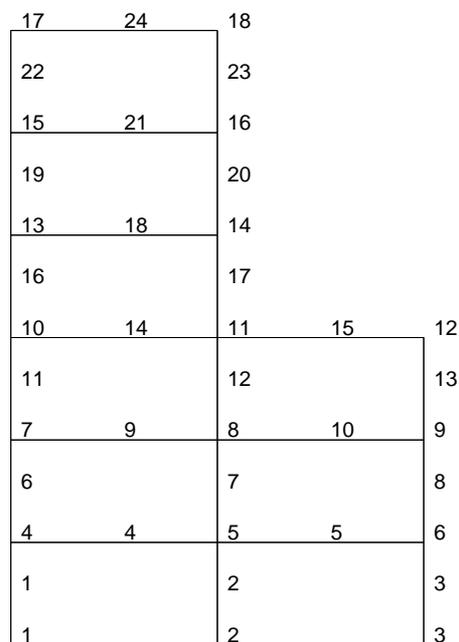


Figura 3: Pórtico de seis pisos y dos vanos de diferente altura

Se fijaron como valores máximos, para la altura del perfil 0,60 m y para el ancho del ala 0,215 m. Los valores mínimos fijados fueron, para la altura 0,10 m y para el ancho del ala 0,05 m.

Las masas se concentraron en cada nodo colocando en los grados de libertad traslacionales una masa de $2,617 \times 10^4 kg$, menos en los nodos 5,8 y 11 cuya masa concentrada es el doble de la anterior.

La optimización para este ejemplo fue realizada mediante el algoritmo FAIPA descrito anteriormente. Con este mismo ejemplo desarrollamos tres diseños óptimos, tomando en cada caso diferentes conjuntos de restricciones.

5.3.1. Caso 1

En este caso se tomaron las siguientes restricciones: para la tensión máxima se tomó $\nu = 1,5$; el desplazamiento máximo $d_{max} = 0,10m$; y la distorsión máxima $\theta_{max} = 0,01$

Bajo estas condiciones luego de 14 iteraciones se llegó a un volumen mínimo de $1,07105m^3$, cuya variación en el proceso iterativo está dada en la figura 4.

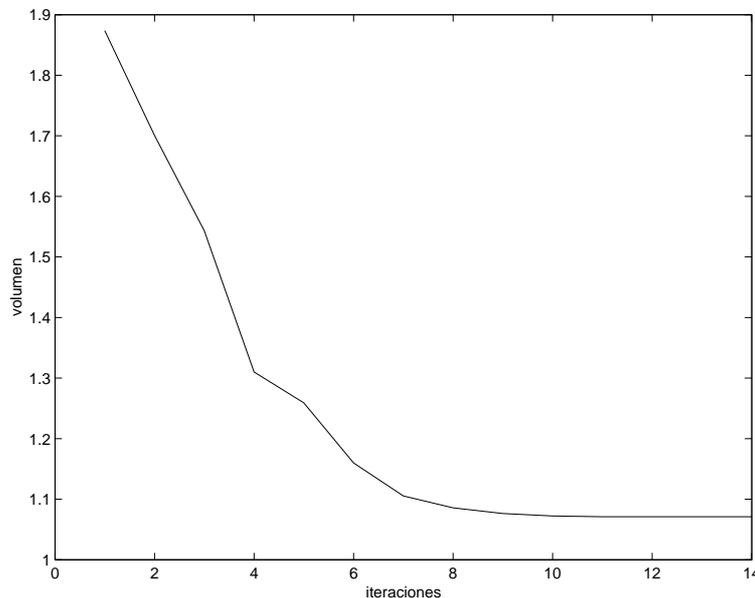


Figura 4: Pórtico de seis pisos y dos vanos de diferente altura: volumen en función de la cantidad de iteraciones. Caso de 3 conjuntos de restricciones

Las variables de diseño en el punto óptimo tomaron los siguientes valores. El ancho de ala para todos los tipos de sección fue el valor mínimo especificado: $0,05m$. La altura de la sección fue: $0,33m$, $0,46m$, $0,37m$, $0,42m$, respectivamente para las secciones 1 a 4. Además la restricción de desplazamiento en el piso superior es activa debido a que el desplazamiento del nodo 17 es de $0,1m$.

5.3.2. Caso 2

En este caso se tomaron las siguientes restricciones: para la tensión máxima se tomó $\nu = 1,5$ y la distorsión máxima $\theta_{max} = 0,01$. No se especificó restricción sobre el desplazamiento máximo.

Bajo estas condiciones luego de 11 iteraciones se llegó a un volumen mínimo de $0,696452m^3$, cuya variación en el proceso iterativo está dada en la figura 5.

Las variables de diseño en el punto óptimo tomaron los siguientes valores. El ancho de ala para todos los tipos de sección fue el valor mínimo especificado: $0,05m$. La altura de la sección fue: $0,25m$, $0,34m$, $0,28m$, $0,32m$, respectivamente para las secciones 1 a 4.

Además las restricciones de desplazamiento relativo entre los pisos 1 y 2, y entre los pisos 3 y 4 son activas, es decir tenemos entre los pisos una distorsión de $0,01$. En este caso el nodo 17 alcanza un corrimiento de $0,183m$, superior al obtenido en el caso anterior.

5.3.3. Caso 3

En este caso se tomó como restricción que la tensión no supere el máximo dado por $\nu = 1,5$. No se especificaron restricciones sobre desplazamiento ni distorsiones máximas.

Bajo estas condiciones luego de 9 iteraciones se llegó a un volumen mínimo de $0,18117m^3$, cuya variación en el proceso iterativo está dada en la figura 6.

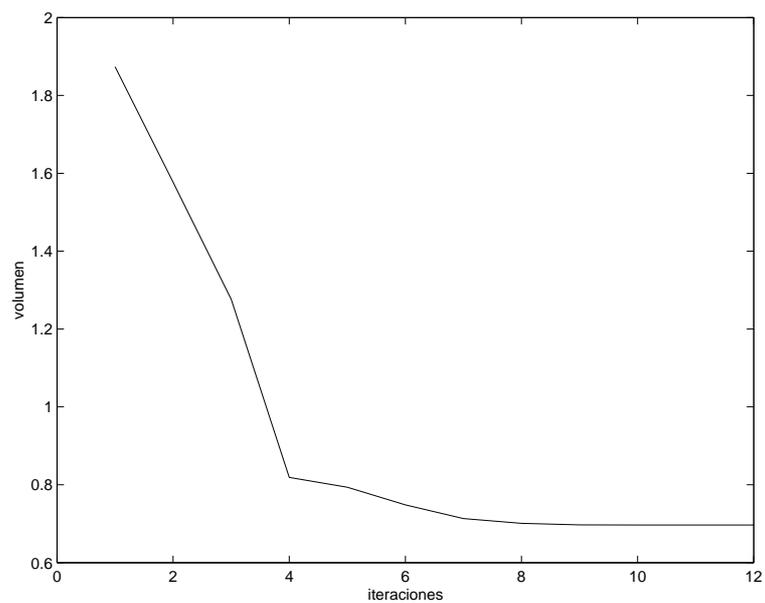


Figura 5: Pórtico de seis pisos y dos vanos de diferente altura; volumen en función de la cantidad de iteraciones. Caso de 2 conjuntos de restricciones

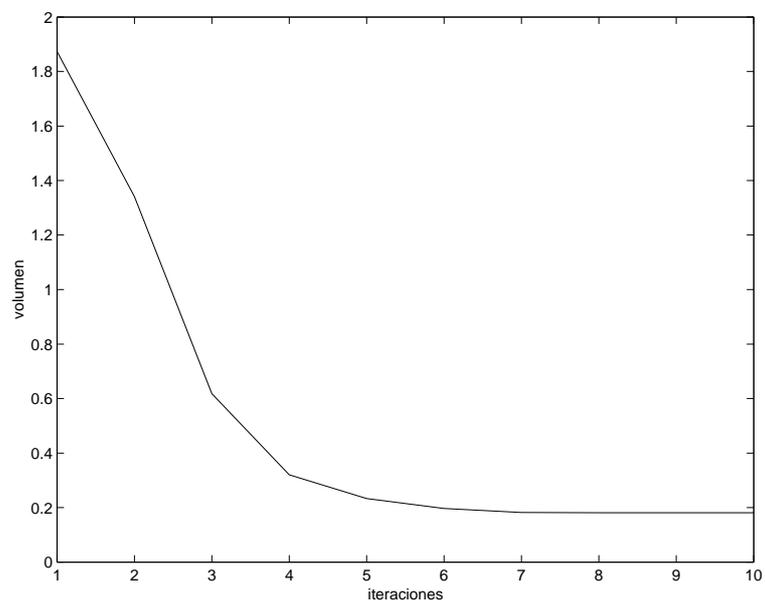


Figura 6: Pórtico de seis pisos y dos vanos de diferente altura; volumen en función de la cantidad de iteraciones. Caso de 1 conjunto de restricciones

Las variables de diseño en el punto óptimo tomaron todas el valor de 0,10 m para la altura y 0,05 m para el ancho de ala. Estos valores son los fijados como cota inferior de la variable de diseño. En este caso el nodo 17 alcanza un corrimiento aproximado de 1,7 m, lo cual genera un diseño inviable en realidad debido a los elevados corrimientos que presenta la estructura.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado algunos resultados preliminares de aplicación de un procedimiento para optimización de estructuras aporricadas sometidas a movimientos sísmicos. Se ha utilizado la técnica denominada FAIPA, que utiliza algoritmos de punto interior para resolver la optimización con restricciones de desigualdad. Este procedimiento ya ha sido utilizado en problemas de respuesta estática y en este caso se aplica por primera vez a un problema de respuesta sísmica. Los casos de estudio presentados son, por ahora, ejemplos académicos destinados a comprobar el desempeño de los algoritmos. Se aplicó a pórticos planos de acero.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se hizo con apoyo económico de las siguientes instituciones: Universidad Nacional del Litoral, a través del CAI+D 2005/65; Universidad Tecnológica Nacional, por medio de una beca doctoral; CONICET mediante el proyecto PIP 5271; y ANPCyT a través del proyecto PICT 14573.

REFERENCIAS

- J. Herskovits. A two-stages feasible directions algorithm for nonlinear constrained optimization. *Mathematical Programming*, 36:19–38, 1986.
- J. Herskovits. A view on nonlinear optimization. In *Advances in Structural Optimization*, volume 25, pages 71–116. Kluwer Academic Publishers - Holland, 1995.
- J. Herskovits y G. Santos. Feasible arc interior point algorithms for nonlinear optimization. In *Proc. IV World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires*, 1998.
- M. Papadrakakis, N.D. Lagaros, Y. Tsompanakis, y V. Plevris. Large scale structural optimization: computational methods and optimization algorithms. *Archives of Computational Mechanics*, 8(3):239–302, 2001.
- V. Sonzogni y A. Queizan. Simultaneous analysis and design of large structures by domain decomposition methods. In *Proc. 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*.
- V. Sonzogni, A. Queizan, y Herskovits J. Interior point algorithms for constrained optimization problems. In *Proc. XI Reunión en Procesamiento de la Información y Control (RPIC)*, 2005.