

## **CONTROL ADAPTABLE PID E IDENTIFICACION NEURONAL DE UN VEHICULO AEREO AUTONOMO (UAV) CUATRIROTOR USANDO FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO.**

**Claudio D. Rosales<sup>a</sup>, Juan M. Gimenez<sup>b</sup>, Carlos M. Soria<sup>a</sup> y Francisco G.  
Rossomando<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto de Automática (INAUT-CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan. Av. Libertador 1109 (Oeste), Capital, San Juan, Argentina CP 5400.*

*{crosales, csoria, frosoma}@inaut.unsj.edu.ar <http://www.inaut.unsj.edu.ar/>*

<sup>b</sup>*CONICET CCT-San Juan, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan. Av. Libertador 1112 (Oeste), Capital, San Juan, Argentina CP 5400.*

*[gimenezalvarez@gmail.com](mailto:gimenezalvarez@gmail.com)*

**Palabras Clave:** PID adaptable; Identificación; Redes neuronales; Análisis de Estabilidad Discreto; cuatrirotor.

**Resumen:** En este artículo se presenta un nuevo algoritmo de seguimiento de trayectorias para un vehículo aéreo de cuatro rotores (cuatrirotor). El controlador PID propuesto se desarrolla siguiendo una técnica neuronal adaptable y su estabilidad es verificada por la teoría de Lyapunov aplicada en tiempo discreto. Además, se presenta la identificación neuronal del Vehículo aéreo autónomo (UAV, Unmanned Aerial Vehicles) de modelo dinámico, además es utilizado un filtro de Kalman extendido (EKF Extended Kalman Filter) para poder filtrar las señales del vehículo aéreo que están contaminadas por ruidos de medición y que pueden afectar a las señales intervinientes en la identificación. A continuación, los errores de salida son retropropagados a través de la red neuronal que fue identificada para ajustar las ganancias PID para reducir los errores de control. Finalmente, los resultados experimentales se presentan utilizando un vehículo aéreo cuatrirotor, y además se realizó una comparación de la propuesta presentada con un controlador PID clásico de ganancia fija.

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los vehículos aéreos autónomos o no tripulados (UAV, Unmanned Aerial Vehicles) de cuatro rotores, denominado cuatrirotor o quadrotor por su término en inglés, su uso se tornó muy popular debido a su estructura simple, su bajo costo y que poseen una gran maniobrabilidad. Además estos vehículos poseen la capacidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL, vertical take-off and landing), que incluye también la posibilidad de realizar vuelo estacionarios y con la ventaja de un costo de mantenimiento reducido (Islam et.al. 2015). Los cuatrirotores en la actualidad son más populares que los helicópteros convencionales, debido a que sus mecanismos son más simples (a que no poseen plato cíclico y las hélices son de paso fijo) y mucho más fáciles de controlar. Aunque todavía el control de estos vehículos es un desafío principalmente por las no-linealidades inherentes al sistema y el acoplamiento cruzado entre las variables producidos por el momento giroscópico y a que son sistemas subactuados (Bouabdallah et. al. 2004).

En artículos recientes, un gran número de estrategias de control se han utilizado para abordar el problema de la estabilidad de estas aeronaves. Muchas de las cuales están fundamentadas en enfoques basados en modelo, donde precisan información del modelo matemático del sistema y de los parámetros que lo describen. Donde algunas de estas estrategias son basadas en métodos numéricos y álgebra lineal (Rosales et.al. 2015), control predictivo basado en modelo (Raffo et. al. 2008), basado en superficie deslizante (Reinoso et. al. 2011, Xiong et. al. 2017), basados en dinámica inversa, linealización por retroalimentación, etc. Muchas veces el desempeño del sistema de control depende de la exactitud del modelo matemático. Esto motivo el desarrollo de controladores diseñados basados en el PID clásico (Khan & Kadri 2014, Saet.al. 2013) donde no se requiere conocimiento previo del modelo de la planta, pero su desempeño depende de que no existan cambios en los parámetros del vehículo. Como consecuencia de ello algunos trabajos de la literatura presentan estrategias de control basadas en un PID pero que tienen características dinámicas e inteligencia artificial (An et. al. 2016), lo cual mejora el desempeño frente a los controladores estáticos. Las redes neuronales artificiales (NN, Neural Networks) tienen varias características como son su no linealidad, autoaprendizaje y adaptabilidad. El control basado en redes neuronales artificiales es una de las estrategias de control inteligentes, donde se necesita una red neuronal artificial como controlador o identificador para resolver el problema de control del sistema no lineal e incierto en un entorno incierto (Chen et. al. 2015, Amine et.al. 2017). Algunos sistemas híbridos de control PID y NN han sido estudiadas ampliamente, donde se utiliza la estructura neuronal para poder retropropagar el error de control y poder ajustar las ganancias de los controladores PID. En (Wang et.al. 2013) se presenta un controlador que combina una estructura PID y una red neuronal de base radial (RBF-NN) para retropropagar el error de control y ajustar las ganancias de controlador. El mismo se enfoca en el control del ángulo de cabeceo (pitch) del vehículo aéreo, el cual genera el desplazamiento longitudinal del mismo. En dicho trabajo no se demuestra la estabilidad del sistema de control y se verifica su desempeño a través de simulaciones. En (Chenet.al. 2015) se proponen dos lazos anidados de controladores PID desarrollados en tiempo continuo. En el lazo interno se propone un controlador PID Neuronal para cada grado de libertad rotacional (pitch, roll y yaw), donde cada PID esta acoplado a una red neuronal multicapa. Además se utiliza un lazo de control externo para alcanzar las referencias de trayectoria basado en cuatro PID, uno para cada grado de libertad (x, y, z). Se prueba la estabilidad del lazo de control PID Neuronal y se valida utilizando simulaciones numéricas.

En este trabajo se presenta un esquema de control PID Neuronal que está completamente diseñado en tiempo discreto, lo que hace su implementación más eficiente y se evitan los problemas de implementar en forma directa controladores diseñados en tiempo continuo en sistemas digitales. El controlador ajusta las ganancias del controlador PID sin la necesidad de contar con conocimiento previo de la planta, que en nuestro caso es un UAV de cuatrirotor. El presente controlador disminuye las incertidumbres en el UAV y las perturbaciones creadas por el ambiente, y no se requiere conocimiento exacto del modelo dinámico del cuatrirotor, lo que garantiza robustez frente a perturbaciones y dinámicas no modeladas. Muchos trabajos se han desarrollado en el diseño de estructuras de control PID Neuronales en tiempo continuo, pero en la mayoría de ellos se implementan en tiempo discreto, donde la discretización directa puede producir inestabilidad o errores de control. Por lo tanto, el presente controlador al ser diseñado en tiempo discreto mejora su desempeño frente a otras propuestas. De esta forma, en (Rossomando & Soria 2015), se muestra un PID Neuronal utilizado para controlar un vehículo terrestre de tracción diferencial. El controlador se valida experimentalmente con un buen desempeño, sin embargo el análisis de estabilidad puede mejorarse cuando se considera las ganancias del PID dentro de la función candidata de Lyapunov. El objetivo de este trabajo es mostrar el diseño e implementación de un controlador PID Neuronal Adaptable sobre un vehículo aéreo tipo cuatrirotor, donde los parámetros del mismo pueden variar (por diferentes causas) durante la ejecución de la tarea.

El trabajo se organiza de la siguiente manera, en la sección II se muestra el modelo dinámico utilizado para describir el comportamiento del vehículo aéreo utilizado. La sección III presenta el identificador neuronal utilizado para realizar la estimación de algunas variables del vehículo y su correspondiente demostración de estabilidad. En la sección IV se presenta el desarrollo del controlador PID Neuronal Adaptable y en la sección V se muestra el desarrollo de la demostración de estabilidad. Por último, la sección VI presenta los resultados experimentales utilizados para validar la propuesta de control desarrollada, y en la sección VII se muestran las conclusiones obtenidas.

## 2 MODELO DINÁMICO DE UN CUATRIROTOR

Los autopilotos que se utilizan para el control de estas aeronaves tienen en cuenta los efectos aerodinámicos para conseguir la estabilización del vuelo, pero no es posible tener acceso a los parámetros para poder ajustarlos en línea (Santa et.al. 2015). Sin embargo, en varios trabajos de la literatura, (Krajnıket.al. 2011, Hernandez et. al. 2013, Santana et.al. 2016), es viable analizar la respuesta de los cuatrirotor basado en la respuesta de sus sensores internos, en lugar de lidiar con la dinámica compleja que describe su comportamiento. La relación más importante de esta plataforma es la relación entre las acciones de control y la posición del cuatrirotor. Esta relación se estima mediante un modelo lineal de dos estados (Chenet.al. 2015). De esta forma, se representa la dinámica del cuatrirotor de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{q}}^w = \mathbf{R}\mathbf{K}_u\mathbf{u} - \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}}^w \quad (1)$$

el superíndice  $w$  de  $\mathbf{q}$  indica sistema de referencia fijo de un punto en el suelo, siendo el vector  $\mathbf{q}^w = [x^w, y^w, z^w, \psi^w]^T$  donde  $x^w, y^w, z^w$  indica la posición del vehículo con respecto al referencial fijo, y  $\psi^w$  es el ángulo de ascenso. Además, el vector  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z, u_\psi]^T$  representan las acciones de control normalizadas. A su vez, las matrices diagonales  $\mathbf{K}_u = \text{diag}[k_1 k_3 k_5 k_7]$  y  $\mathbf{K}_v = \text{diag}[k_2 k_4 k_6 k_8]$  son definidas

positivas. En la Figura 1 se presenta el vehículo aéreo utilizado para validar la ley de control propuesta y los sistemas de referencia asociados.

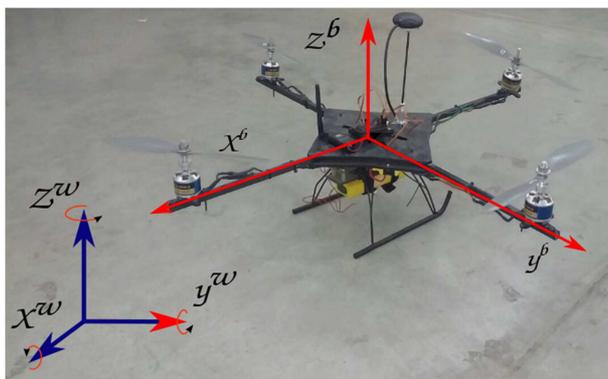


Figura 1. Cuatrirotor y sus sistemas de referencias asociados, el sistema inercial  $\langle w \rangle$  y el sistema asociado al vehículo  $\langle b \rangle$ .

Siendo  $\mathbf{R}$  la matriz de rotación:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi^b & -\sin \psi^b & 0 \\ \sin \psi^b & \cos \psi^b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde  $\ddot{x}^w$ ,  $\ddot{y}^w$  y  $\ddot{z}^w$  son las aceleraciones en los ejes  $x^w$ ,  $y^w$  y  $z^w$ , respectivamente, en el referencial  $\langle w \rangle$  y  $\ddot{\psi}^w$  representa la aceleración angular relacionada al eje  $z$ . Las señales de control  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$  son las variables de entradas conectadas con los ejes  $x^w$ ,  $y^w$  y  $z^w$ , respectivamente, mientras que  $u_{\dot{\psi}}$  es la variable de entrada asociada con el movimiento angular alrededor del eje  $z^b$ .

Con el objetivo de obtener un modelo discreto del modelo dinámico, se utilizó una discretización directa con  $\dot{x} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_o}$  y  $\ddot{x} = \frac{x(k+1) - 2x(k) + x(k-1)}{T_o^2}$ , y lo mismo para  $y$ ,  $z$  y  $\psi$ . De este modo, se expresa la ecuación (1) en tiempo discreto:

$$\mathbf{q}^w(k+1) = \Lambda_2 \mathbf{u} - \Lambda_1 \mathbf{q}^w(k) + \Lambda_0 \mathbf{q}^w(k-1) + \Delta(k) \quad (3)$$

donde  $\Lambda_2 = \Lambda_o^{-1} \mathbf{R} \mathbf{K}_u T_o^2$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda_o^{-1} (2\mathbf{I} + \mathbf{K}_v T_o)$  y  $\Lambda_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_v T_o)$ . El último término adicionado en la ecuación (3) ( $\Delta(k)$ ) representa todas las incertidumbres dinámicas y perturbaciones que puedan afectar al cuatrirotor.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}^w(k) \\ \mathbf{q}^w(k+1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(k+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \Lambda_0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}^w(k-1) \\ \mathbf{q}^w(k) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta(k) \end{pmatrix}}_{\delta(k)} \quad (4)$$

Para obtener el modelo completo solo se requiere la identificación de los parámetros  $k_1, k_2, \dots, k_8$ . La identificación de estos parámetros, considerando el cuatrirotor utilizando en este trabajo se detalla en la sección III.

La ecuación (4) puede representarse como un modelo lineal en espacio de estados donde  $\mathbf{u}(k)$  y  $\mathbf{x}(k+1)$  son la entrada y la salida medida, respectivamente, y  $\mathbf{x}(k)$  es el vector de estado.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (5)$$

El modelo discreto obtenido en (3) sus parámetros son constantes para uso en ambientes cerrados (indoor) o sin perturbaciones. Si utilizamos el UAV en ambientes

externos (outdoor), el aparato estará sometido a perturbaciones, donde las matrices  $\mathbf{K}_u$  y  $\mathbf{K}_v$  serán variantes en el tiempo. Y los para metros de (3) quedaran representados por:

$$\begin{aligned}\Lambda_2(k) &= \Lambda_o^{-1} \mathbf{R} \mathbf{K}_u(k) T_o^2 \\ \Lambda_1(k) &= \Lambda_o^{-1} (2\mathbf{I} + \mathbf{K}_v(k) T_o) \\ \Lambda_o(k) &= (\mathbf{I} + \mathbf{K}_v(k) T_o)\end{aligned}\quad (6)$$

Y (3) queda representada por:

$$\mathbf{q}^w(k+1) = \Lambda_2(k)\mathbf{u} - \Lambda_1(k)\mathbf{q}^w(k) + \Lambda_o(k)\mathbf{q}^w(k-1) + \Delta(k) \quad (7)$$

En la sección siguiente se identificará el modelo del UAV

### 3 IDENTIFICACIÓN EN LINEA DEL MODELO

La implementación del control PID con ganancias adaptables requiere una buena estimación de los estados, y su correspondiente realimentación de los errores de control para obtener un buen ajuste de las ganancias del PID. El vector de errores de estimación se define de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{q}}(k) = \mathbf{q}^w(k) - \hat{\mathbf{q}}^w(k) = \left( \tilde{q}_x(k), \tilde{q}_y(k), \tilde{q}_z(k), \tilde{q}_\psi(k) \right)^T \quad (8)$$

Donde  $\hat{\mathbf{q}}^w(k)$  es el vector de señales estimadas del drone y  $\tilde{q}_x(k) = x^w(k) - \hat{x}^w(k)$ ,  $\tilde{q}_y(k) = y^w(k) - \hat{y}^w(k)$ ,  $\tilde{q}_z(k) = z^w(k) - \hat{z}^w(k)$  y  $\tilde{q}_\psi(k) = \psi^w(k) - \hat{\psi}^w(k)$  son sus componentes.

El modelo no lineal de un vehículo aéreo descrito en (7) puede ser representado por una red neuronal, denotado por:

$$\mathbf{q}^w(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{q}^w(k) + W^{*T} \xi(\bar{\mathbf{q}}(k)) + \varepsilon(k) \quad (9)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz Hurwitz diagonal, definiendo  $\mathbf{A} = \text{diag}[a_x, a_y, a_z, a_\psi]$ . Debido a que los estados de salida son afectados por perturbaciones y ruido, por lo tanto, exista la necesidad de estimar estos valores. A continuación se propone un estimador de estado basado en (9)

$$\hat{\mathbf{q}}(k) = \mathbf{A}\mathbf{q}^w(k) + \hat{\mathbf{W}}^T(k) \xi(\bar{\mathbf{q}}(k)) \quad (10)$$

De (8) y realizando la diferencia entre (9) y (10), el error de identificación puede describirse como

$$\tilde{\mathbf{q}}(k+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}(k) + \hat{\mathbf{W}}^T(k) \xi(\bar{\mathbf{q}}(k)) + \varepsilon(k) \quad (11)$$

expresando la ecuación anterior en forma escalar

$$\tilde{q}_i(k+1) = a_i \tilde{q}_i(k) + \hat{\mathbf{W}}_i^T(k) \xi(\bar{\mathbf{q}}(k)) + \varepsilon_i(k) \quad (12)$$

el subíndice  $i$  denota el número de fila de  $\tilde{\mathbf{q}}(k)$ , además  $\xi$  es la función de base radial (RBF) que representa cada neurona in las capas ocultas (hiddenlayers).

$$\xi_l(\bar{\mathbf{q}}(k)) = \exp\left(-\frac{(\bar{\mathbf{q}}(k) - c_l)^T(\bar{\mathbf{q}}(k) - c_l)}{2\sigma_l}\right) \quad (13)$$

les el número de la neurona de la capa oculta,  $c_l$  es la posición central de la neurona  $l$ -ésima, y  $\sigma_l$  es el factor de ancho (igual a uno en este caso) de la función Gaussiana. El vector  $\bar{\mathbf{q}}(k)$  es el regresor del modelo neuronal, definido por:

$$\bar{\mathbf{q}}(k) = [\hat{\mathbf{q}}(k), \hat{\mathbf{q}}(k-1), \mathbf{u}(k), \mathbf{q}_{ref}(k+1)] \quad (14)$$

El filtrado mediante Kalman proporciona una estima del estado  $\hat{q}_i(k)$  y su error de covariancia  $\mathbf{P}_i(k)$  de forma recursiva. La calidad de la estimación depende de los parámetros del sistema y sus perturbaciones. Para la identificación, la salida está contaminada por ruidos de medición, pero esta información proviene del cuatrorotor y debe filtrarse, pero debido al hecho que la aproximación de la red neuronal es no lineal, se requiere un filtro de Kalman extendido (Rossomando et al. 2013).

$$\hat{\mathbf{W}}_i(k+1) = [\hat{\mathbf{W}}_i(k) + \eta \mathbf{K}_i \tilde{q}_i(k)] \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_i(k) = \mathbf{P}_i(k) \mathbf{H}_i(k) \mathbf{M}_i(k) \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_i(k+1) = \mathbf{P}_i(k) - \mathbf{K}_i(k) \mathbf{H}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) + \mathbf{Q}_i(k) \quad (17)$$

con

$$\mathbf{M}_i(k) = [\mathbf{R}_i(k) + \mathbf{H}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) \mathbf{H}_i(k)]^{-1} \quad (18)$$

donde  $\tilde{q}_i(k)$  es el error del estado estimado,  $\mathbf{P}_i(k) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es la matriz de covariancia de error estimada en el paso  $k$ ,  $\hat{\mathbf{W}}_i(k)$  es el vector de peso,  $m$  es el respectivo número de pesos de las redes neuronales,  $q_i^w(k)$  es el estado  $i$ -ésimo del UAV,  $\hat{q}_i(k)$  es el  $i$ -ésimo estado de la red neuronal,  $n$  es el número de estados (en este caso  $n = 4$  y  $m = 5$ ),  $\mathbf{K}_i(k) \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de ganancias Kalman,  $\mathbf{Q}_i(k) \in \mathfrak{R}^m$  es vector de peso de la matriz de covarianza estimada,  $\mathbf{R}_i(k) \in \mathfrak{R}^m$  es la covarianza del ruido medido;  $\mathbf{H}_i(k) \in \mathfrak{R}^m$  es un vector en donde cada elemento  $H_{ij}$  es la derivada del estado  $\hat{q}_i(k)$  de la red neuronal con respecto al peso de la red  $\hat{W}_{ij}(k)$

$$\mathbf{H}_i(k) = \left[ \frac{\partial \hat{q}_i(k+1)}{\partial \hat{W}_{ij}(k)} \right]^T = \boldsymbol{\xi}^T(\bar{\mathbf{q}}(k)) \quad (19)$$

donde  $i = x, y, z, \psi$  y  $j = 1, 2, \dots, m$ . En este caso  $\mathbf{P}_i(k)$  y  $\mathbf{Q}_i(k)$  se inicializan como matrices diagonales con valores de los elementos aleatorios. Además, el conjunto de las matrices  $\mathbf{H}_i(k)$ ,  $\mathbf{K}_i(k)$  y  $\mathbf{P}_i(k)$  para la ley de ajuste del EKF están acotadas; los principios teóricos de los EKF pueden verse en (Song & Grizzle 1992, Alanis et al. 2010).

Por lo tanto, el vector de errores estimados  $\tilde{\mathbf{W}}_i(k+1)$  se define de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{W}}_i(k+1) = \mathbf{W}_i^* - \hat{\mathbf{W}}_i(k+1) = \mathbf{W}_i^* - [\hat{\mathbf{W}}_i(k) + \eta \mathbf{K}_i \tilde{q}_i(k)] = \tilde{\mathbf{W}}_i(k) - \eta \mathbf{K}_i \tilde{q}_i(k) \quad (20)$$

el índice  $i$  denota la  $i$ -ésima fila de  $\hat{\mathbf{W}}(k)$ .

**Hipótesis:** El error de aproximación óptimo  $\varepsilon$  está acotado  $\|\varepsilon\| \leq \varepsilon_{\max}$ .

**Teorema:** Considerando el sistema definido por (7) y el modelo del estimador (10) utilizando una ley de ajuste EKF definida por (15). El observador neuronal basado en un EKF es semi-globalmente uniformemente acotado (SGUUB, semiglobally uniformly ultimate bounded).

**Demostración:** Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_i(k) = \tilde{q}_i^2(k) + (\tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k)) \quad (21)$$

Realizando la diferencia en tiempo discreta,  $\Delta V_i$  se escribe como:

$$\begin{aligned} \Delta V_i(k) &= V_i(k+1) - V_i(k) - \\ &= \tilde{q}_i^2(k+1) - \tilde{q}_i^2(k) \\ &\quad + \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k+1) \mathbf{P}_i(k+1) \tilde{\mathbf{W}}(k+1) \right) \\ &\quad - \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Reemplazando (12) y (20) en (22):

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= \left( a_i \tilde{q}_i(k) + \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) \varepsilon_i(k) \right)^2 - \tilde{q}_i^2(k) \\ &\quad + \left( \left[ \tilde{\mathbf{W}}_i(k) - \eta \mathbf{K}_i \tilde{q}_i(k) \right]^T \mathbf{P}_i(k+1) \left[ \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta \mathbf{K}_i \tilde{q}_i(k) \right] \right) - \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

de (17)  $\mathbf{P}_i(k+1) = \mathbf{P}_i(k) - \mathbf{B}_i(k)$  donde  $\mathbf{B}_i(k) = -\mathbf{Q}_i(k) + \mathbf{K}_i(k) \mathbf{H}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k)$ , y reorganizando (23) se obtiene,

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right) - \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{B}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right) \\ &\quad + \eta^2 \tilde{q}_i^2(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{P}_i(k) \mathbf{K}_i - \eta^2 \tilde{q}_i^2(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{B}_i(k) \mathbf{K}_i \\ &\quad - 2\eta \tilde{q}_i(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{P}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) + 2\eta \tilde{q}_i(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{B}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \\ &\quad - \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{P}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right) - \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) \right)^2 \\ &\quad + 2\tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) \varepsilon_i(k) + \varepsilon_i^2(k) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) a_i \tilde{q}_i(k) + 2\varepsilon_i(k) a_i \tilde{q}_i(k) + a_i^2 \tilde{q}_i^2(k) \\ &\quad + \tilde{q}_i^2(k) \end{aligned} \quad (24)$$

considerando la siguiente desigualdad vectorial  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \geq 2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} \geq -2\mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ , donde  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$  y reorganizando la ecuación (24),  $\Delta V_i$  se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta V_i &\leq \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{B}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) + \eta^2 \tilde{q}_i^2(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{P}_i(k) \mathbf{K}_i \\ &\quad - \eta^2 \tilde{q}_i^2(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{B}_i(k) \mathbf{K}_i + \eta^2 \tilde{q}_i^2(k) \mathbf{K}_i^T \mathbf{P}_i(k) \mathbf{P}_i^T(k) \mathbf{K}_i \\ &\quad + \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) + \eta^2 \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \mathbf{B}_i^T(k) \mathbf{K}_i \mathbf{K}_i^T \mathbf{B}_i(k) \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \\ &\quad + \tilde{q}_i^2(k) + 3 \left( \tilde{\mathbf{W}}_i^T(k) \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) \right)^2 + 3\varepsilon_i^2(k) + 3a_i \tilde{q}_i(k) \\ &\quad - \tilde{q}_i^2(k) \end{aligned} \quad (25)$$

Operando matemáticamente la ecuación anterior y aplicando norma,

$$\begin{aligned} \Delta V_i &\leq \left\| \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right\|^2 \left\| \mathbf{B}_i(k) \right\| + \eta^2 \left| \tilde{q}_i^2(k) \right| \left\| \mathbf{K}_i \right\| \left\| \mathbf{P}_i(k) \right\|^2 \\ &\quad - \eta^2 \left| \tilde{q}_i^2(k) \right| \left\| \mathbf{B}_i(k) \right\| \left\| \mathbf{K}_i \right\|^2 \\ &\quad - \eta^2 \left| \tilde{q}_i^2(k) \right| \left\| \mathbf{P}_i(k) \right\|^2 \left\| \mathbf{K}_i \right\|^2 + \left\| \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right\|^2 \\ &\quad + \eta^2 \left\| \mathbf{B}_i(k) \right\|^2 \left\| \mathbf{K}_i \right\|^2 \left\| \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right\|^2 \\ &\quad + 3 \left\| \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right\|^2 \left\| \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) \right\|^2 + 3 \left| \varepsilon_i(k) \right|^2 + 3a_i \left| q_i(k) \right|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Considerando  $\left\| \boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}(k)) \right\|^2 \leq 1$  entonces (26) resulta

$$\Delta V_i \leq -\alpha_i \left| \tilde{q}_i(k) \right|^2 + \beta_i \left\| \tilde{\mathbf{W}}_i(k) \right\|^2 + \gamma_i \leq 0 \quad (27)$$

con  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $\gamma_i$  que pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\alpha_i = -(1 + \left\| \mathbf{P}_i(k) \right\|) \eta^2 \left\| \mathbf{P}_i(k) \right\| \left\| \mathbf{K}_i \right\|^2 + \eta^2 \left\| \mathbf{B}_i(k) \right\| \left\| \mathbf{K}_i \right\|^2 - 3a_i^2 \quad (28)$$

$$\beta_i = (1 - \eta^2 \|\mathbf{B}_i(k)\| \|\mathbf{K}_i\|^2) \|\mathbf{B}_i(k)\| - 4$$

$$\gamma_i = 3\varepsilon_{Max}^2$$

Entonces, existe un  $\eta$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_i(k)$  y  $\tilde{\mathbf{R}}_i(k)$  tal que  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_i > 0$  y  $\gamma_i > 0$ . Esta condición para  $\Delta V_i < 0$  implica que  $\tilde{q}_i(k)$  y  $\|\tilde{\mathbf{W}}_i(k)\|$  están finalmente acotadas por

$$|\tilde{q}_i(k)| \geq \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} o \|\tilde{\mathbf{W}}_i(k)\| \geq \sqrt{\frac{\gamma_i}{\beta_i}} \tag{29}$$

La ecuación (29) prueba que el modelo del UAV es semi-globalmente uniformemente acotado y es estable. De esta manera, puede utilizarse como retropropagación del error del controlador PID adaptable que se explayará en la siguiente sección.

#### 4 CONTROLADOR PID NEURONAL ADAPTABLE (AN-PID)

Para el diseño del propuesto controlador PID neuronal adaptable (AN-PID) es necesario obtener la acción de control  $\mathbf{u}$  en cada periodo de muestreo ( $k$ ), cuya condición es cumplir con un error de seguimiento mínimo. Para alcanzar este objetivo, se utiliza un método de auto-sintonía empleando un controlador PID neuronal adaptable, para que la posición del cuatrirotor ( $x^w, y^w, z^w, \psi^w$ ) siga lo más fielmente las referencias deseadas. El error de control se define la siguiente manera:

$$e(k) = (e_1(k), e_2(k), e_3(k), e_4(k))^T \tag{30}$$

donde  $e_1(k) = (x_{ref}(k+1) - x^w(k+1))$ ,  $e_2(k) = (y_{ref}(k+1) - y^w(k+1))$ ,  $e_3(k) = (z_{ref}(k+1) - z^w(k+1))$  y  $e_4(k) = (\psi_{ref}(k+1) - \psi^w(k+1))$ . En la figura 2 se presenta la estructura de control utilizada en este trabajo.

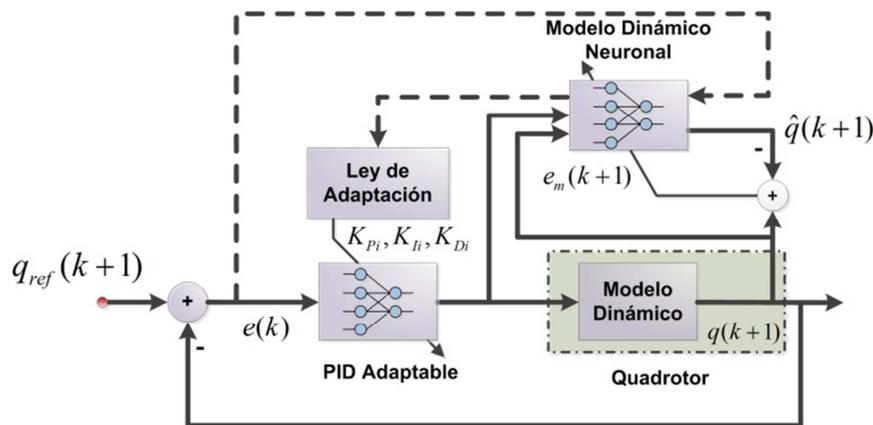


Figura 2. Esquema propuesto para el controlador PID Neuronal Adaptable.

El modelo clásico del controlador PID en tiempo discreto está definido por la siguiente ecuación,

$$o_i(k) = K_{Pi}e_i(k) + K_{Ii} \sum_{j=1}^k e_i(j)T_o + \frac{K_{Di}}{T_o} (e_i(k) - e_i(k-1)) \tag{31}$$

donde el subíndice  $i$  indica la variable del vehículo aéreo. Considerando la acción de control en el instante de tiempo ( $k-1$ ), resulta:

$$o_i(k-1) = K_{Pi}e_i(k-1) + K_{Ii} \sum_{j=1}^{k-1} e_i(j)T_o + \frac{K_{Di}}{T_o}(e_i(k-1) - e_i(k-2)). \quad (32)$$

A continuación se realiza la diferencia entre  $o_i(k)$  y  $o_i(k-1)$  de las ecuaciones (31) y (32) respectivamente. La señal de control  $o_i(k)$  puede expresarse como:

$$o_i(k) = o_i(k-1) + K_{Pi}(e_i(k) - e_i(k-1)) + K_{Ii}e_i(k)T_o + \frac{K_{Di}}{T_o}(e_i(k) - 2e_i(k-1) + e_i(k-2)). \quad (33)$$

El objetivo de ajustar las ganancias del controlador PID va detrás de la premisa de obtener un error de control menor y mayor velocidad de convergencia. Sin embargo, el PID convencional es un controlador estático, dado que las ganancias son valores fijos constantes definidos previamente por el diseñador. Como resultado, las acciones no tienen la capacidad de adaptarse frente a las variaciones que pueden surgir en la planta a controlar. Por lo tanto, se debe aplicar una técnica de ajuste en las ganancias del controlador con el objetivo de minimizar el error de control del cuatrirotor. El controlador propuesto permite resolver este problema dado que las ganancias del PID son sintonizados para minimizar el error de control con capacidad de robustez, rechazando perturbaciones y acciones externas sobre el sistema. Para obtener un controlador basado en la estructura de un PID es esencial definir una función de activación del controlador. Por lo tanto, se utiliza la tangente hiperbólica  $\tanh(\cdot)$  como función de saturación continua. De este modo, la acción de control es menor que el máximo admisible o posible de lograr por parte del actuador. De acuerdo con la hipótesis 1 de la sección anterior:

$$|u_i(k)| \leq u_{iMax} \quad (34)$$

La principal ventaja del uso de la función para cada neurona es que se garantiza la estabilidad, que será probada en la sección V.

Definición 1: La función de activación  $\varphi(\cdot)$  está definida de la siguiente manera:

$$u_i(k) = \varphi(o_i(k)) = u_{iMax} \tanh\left(\frac{o_i(k)}{u_{iMax}}\right) \quad (35)$$

Aplicando la función de activación en cada acción de (33) resulta,

$$o_i(k) = \varphi(o_i(k-1)) + K_{Pi}\varphi(e_i(k) - e_i(k-1)) + \dots + K_{Ii}\varphi(e_i(k))T_o + \frac{K_{Di}}{T_o}\varphi(e_i(k) - 2e_i(k-1) + e_i(k-2)) \quad (36)$$

Para asegurar la convergencia y el desempeño de la función de optimización, se define el índice  $E(k)$  que es una función de los errores de posición del cuatrirotor.

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 e_i^2(k) \quad (37)$$

Los parámetros  $K_{Di}$ ,  $K_{Ii}$  y  $K_{Pi}$  para el controlador AN-PID deben sintonizarse utilizando el método del gradiente descendiente, similar a los pesos de una red neuronal tipo perceptrón cuyo esquema se presenta en la figura 3.

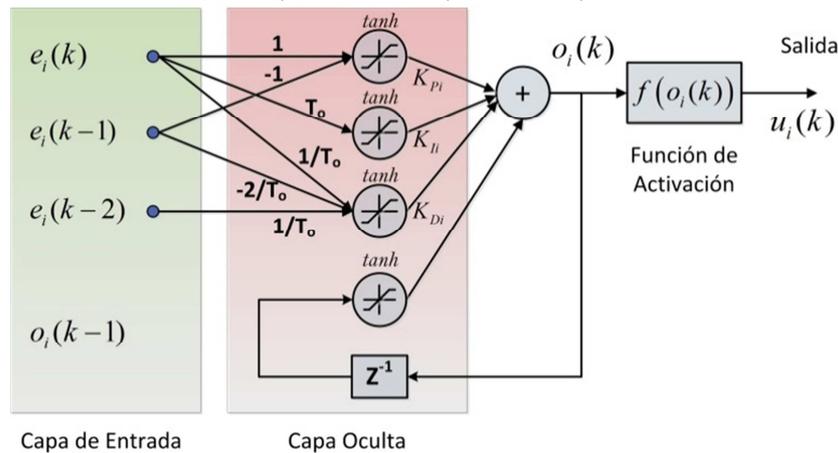


Figura 3. Estructura interna del controlador red PID neuronal adaptivo.

Las reglas para adaptar los parámetros del controlador se definen a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\theta i}(k + 1) &= \mathbf{K}_{\theta i}(k) + \Delta \mathbf{K}_{\theta i} = \dots \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{Pi}(k + 1) \\ \mathbf{K}_{Ii}(k + 1) \\ \mathbf{K}_{Di}(k + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{Pi}(k) \\ \mathbf{K}_{Ii}(k) \\ \mathbf{K}_{Di}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{Pi} \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{K}_{Pi}} \\ \eta_{Ii} \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{K}_{Ii}} \\ \eta_{Di} \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{K}_{Di}} \end{pmatrix} \quad (38)
 \end{aligned}$$

Los parámetros  $\eta_{Pi}$ ,  $\eta_{Ii}$  y  $\eta_{Di}$  son los factores de aprendizaje del controlador PID neuronal. De la ecuación (38) y utilizando la regla de la cadena, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{K}_{Pi}} &= \frac{\partial E(k)}{\partial q_i^w(k + 1)} \frac{\partial q_i^w(k + 1)}{\partial u_i(k)} \frac{\partial u_i(k)}{\partial o_i(k)} \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{Pi}} \\
 \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{K}_{Ii}} &= \frac{\partial E(k)}{\partial q_i^w(k + 1)} \frac{\partial q_i^w(k + 1)}{\partial u_i(k)} \frac{\partial u_i(k)}{\partial o_i(k)} \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{Ii}} \\
 \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{K}_{Di}} &= \frac{\partial E(k)}{\partial q_i^w(k + 1)} \frac{\partial q_i^w(k + 1)}{\partial u_i(k)} \frac{\partial u_i(k)}{\partial o_i(k)} \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{Di}} \quad (39)
 \end{aligned}$$

Los valores de las derivadas parciales de (39) son:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial q_i^w(k + 1)} = -e_i(k) \quad (40)$$

Para  $\frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)}$  la dinámica es desconocida, por lo tanto, debe estimarse utilizando la dinámica identificada por la red neuronal de (10), donde se obtiene  $\frac{\partial \hat{q}_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)}$

$$\frac{\partial \hat{q}_i^w(k + 1)}{\partial u_i(k)} = \hat{\mathbf{W}}_i(k) \xi(\bar{\mathbf{q}}(k)) \left[ (\bar{\mathbf{q}}(k) - \mathbf{c}_i) \frac{\partial \zeta^T(k)}{\partial u_i(k)} \right] \quad (41)$$

De (14) donde  $\frac{\partial \zeta^T(k)}{\partial u_i(k)}$  es  $[0, 0, 1, 0]^T$ . Porque  $\hat{\mathbf{q}}(k - 1)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}(k)$  and  $\mathbf{q}_{ref}^w(k)$  no dependen de  $\mathbf{u}(k)$  y las derivadas de los términos  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}}(k)$  y  $\varepsilon(k)$  con respecto a  $u(k)$  es cero.

La relación  $\frac{\partial u_i}{\partial o_i}$  es la derivada de la función de activación  $\tanh(\cdot)$ . Esta derivada parcial es solo valida dentro del rango lineal de la función, donde las acciones de control no producen niveles que puedan dañar el vehículo aéreo. Esta operación se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u_i(k)}{\partial o_i(k)} = \frac{\partial f(o_i(k))}{\partial o_i(k)} = u_{iMax} [1 - \varphi^2(o_i(k))] \quad (42)$$

Por último, considerando las derivadas parciales con respecto a las ganancias del controlador:

$$\begin{aligned} \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{Pi}} &= \varphi(e_i(k) - e_i(k-1)) \\ \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{Li}} &= \varphi(e_i(k) T_o) \\ \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{Di}} &= \varphi \left( \frac{e_i(k) - 2e_i(k-1) + e_i(k-2)}{T_o} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

La ecuación se escribe del siguiente modo,

$$\begin{aligned} K_{Pi}(k+1) &= K_{Pi}(k) - \eta_{Pi} e_i(k) \left( \frac{\partial \hat{q}_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)} \right) \\ u_{iMax} [1 - \varphi^2(o_i(k))] f(e_i(k) - e_i(k-1)) \\ K_{Li}(k+1) &= K_{Li}(k) - \eta_{Li} e_i(k) \left( \frac{\partial \hat{q}_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)} \right) \\ u_{iMax} [1 - \varphi^2(o_i(k))] f(e_i(k) T_o) \\ K_{Di}(k+1) &= K_{Di}(k) - \eta_{Di} e_i(k) \left( \frac{\partial \hat{q}_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)} \right) \\ u_{iMax} [1 - \varphi^2(o_i(k))] f \left( \frac{e_i(k) - 2e_i(k-1) + e_i(k-2)}{T_o} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

## 5 ANALISIS DE ESTABILIDAD DEL AN-PID

**Hipótesis 2:** Definiendo los parámetros ideales del AN-PID  $\mathbf{K}_\theta^*$ , el error de estimación se define,

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k) = \mathbf{K}_{\theta i}(k) - \mathbf{K}_\theta^* \quad (45)$$

Donde  $\Omega_K$  y  $\Omega_q$  son conjuntos de valores acotados  $\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k)$  sobre y  $\mathbf{q}$ , respectivamente, definidas como  $\Omega_K = \{\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k) / \|\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k)\| \leq \mathbf{K}_{max}\}$  y  $\Omega_q = \{\mathbf{q}/\mathbf{q} \leq Q\}$  donde  $\mathbf{K}_{max}$  y  $Q$  son constantes positivas. Se asume que dentro de este conjunto  $\Omega_q$  el error de aproximación del AN-PID es muy pequeño cuando el vector de parámetros  $\mathbf{K}_{\theta i}(k)$  es igual al vector de parámetros optimo denominado  $\mathbf{K}_\theta^*$ .

**Lema 1:** La diferencia del error  $\Delta e(k)$  en el proceso de aprendizaje esta expresada por:

$$\Delta e_i(k) = \left( \frac{\partial e_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \Delta \mathbf{K}_{\theta i} = \frac{\partial e_i(k)}{\partial q_i^w(k+1)} \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \Delta \mathbf{K}_{\theta i} \quad (46)$$

Teniendo en cuenta (38) y considerando  $\bar{\eta} = \max(\eta_{Pi}, \eta_{Li}, \eta_{Di})$

$$\Delta \mathbf{K}_{\theta i} = -\bar{\eta} e_i(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \tag{47}$$

Reemplazando (47) en (46)

$$\begin{aligned} \Delta e_i(k) &= -\frac{\partial e_i(k)}{\partial q_i^w(k+1)} \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \bar{\eta} e_i(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \\ \Delta e_i(k) &= \rho_i e_i(k) \end{aligned} \tag{48}$$

la variable  $\rho_i$  se define

$$\rho_i \leq \max \left( \bar{\eta} \left\| \frac{\partial e_i(k)}{\partial q_i^w(k+1)} \right\| \left\| \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\|^2 \right) \tag{49}$$

donde

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial e_i(k)}{\partial q_i^w(k+1)} \right| = 1 \\ \left\| \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\| = \left| \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)} \right| \left\| \frac{\partial u_i(k)}{\partial o_i(k)} \right\| \left\| \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\| \end{cases}$$

De la sección III, al dinámica desconocida  $\frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)}$  se aproxima mediante  $\frac{\partial \hat{q}_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)}$ . En (29) se demuestra la estabilidad, por lo tanto la diferencia de norma de  $\|\bar{\mathbf{q}}(k) - \mathbf{c}_i\|$  y  $\|\bar{\mathbf{e}}(k) - \mathbf{c}_i\|$  son acotadas por constantes positivas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , respectivamente y las funciones RBF  $\|\xi(\bar{\mathbf{q}}(k))\|$  y  $\|\chi(\bar{\mathbf{q}}(k))\|$  están acotadas ( $\leq 1$ ). Además, teniendo en cuenta (30) la red neuronal es estable, por lo tanto los pesos de la red están acotados por una constante  $\bar{W}$ , y la norma de (41) se puede representar mediante:

$$\left| \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)} \right| \cong \left| \frac{\partial \hat{q}_i^w(k+1)}{\partial u_i(k)} \right| \leq \bar{W}. \tag{50}$$

Considerando

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_i(k)}{\partial o_i(k)} \right| &= |1 - \varphi^2(o_i(k))| \leq u_{iMax} \\ \left\| \frac{\partial o_i(k)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\| &= |\varphi(e_i(k) - e_i(k-1))| + |\varphi(e_i(k)T_o)| + \dots \\ &\quad + \left| \varphi \left( \frac{(e_i(k) - 2e_i(k-1) + e_i(k-2))}{T_o} \right) \right| \leq 3u_{iMax} \end{aligned} \tag{51}$$

A partir de las ecuaciones (50) y (51), (50) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\rho_i \leq \max \left( \bar{\eta} \left\| \frac{\partial e_i(k)}{\partial q_i^w(k+1)} \right\| \left\| \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\|^2 \right) = 9\bar{\eta}\bar{W}^2 u_{iMax}^4 \tag{52}$$

Se define la siguiente función discreta definida positiva:

$$V(k) = \sum_{i=1}^4 (e_i^2(k) + \tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k) \tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k)) \tag{53}$$

Luego, se calcula la diferencia discreta de la función

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left( (e_i^2(k+1) - e_i^2(k)) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k+1)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k+1) - \tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k)) \right)\end{aligned}\quad (54)$$

De la ecuación (47), el producto entre  $\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T$  y  $\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}$  puede determinarse

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k+1)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k+1) &= \left( \Delta \mathbf{K}_{\theta i} + \bar{\eta} e_i(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \left( \Delta \mathbf{K}_{\theta i} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\eta} e_i(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right) \left( \Delta \mathbf{K}_{\theta i} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\eta} e_i(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right) \tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k+1)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k+1) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}(k) \\ &= -2\bar{\eta} e_i(k)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \\ &\quad + \bar{\eta}^2 e_i^2(k) \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}}\end{aligned}\quad (55)$$

El valor de  $e_i(k+1)$  se puede calcular a través de la siguiente ecuación:

$$e_i(k+1) = e_i(k) + \Delta e_i(k) \quad (56)$$

Sustituyendo (56) en  $e_i^2(k+1)$  y calculando la diferencia de cuadrados

$$e_i^2(k+1) - e_i^2(k) = 2e_i(k)\Delta e_i(k) + \Delta e_i^2(k) \quad (57)$$

Donde

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= \sum_{i=1}^4 \left( 2e_i(k)\Delta e_i(k) + \Delta e_i^2(k) - \dots \right. \\ &\quad \left. - \bar{\eta}^2 e_i^2(k)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k) \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \bar{\eta}^2 e_i^2(k) \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)\end{aligned}\quad (58)$$

De la Hipótesis 1, (58) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= \sum_{i=1}^4 \left( -2\rho_i e_i^2(k) + \rho_i^2 e_i^2(k) - \dots \right. \\ &\quad \left. - 2\bar{\eta} e_i(k)\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k) \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \bar{\eta}^2 e_i^2(k) \left( \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)^T \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right)\end{aligned}\quad (59)$$

Aplicando norma a la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \Delta V(k) \leq & \sum_{i=1}^4 -2\rho_i |e_i(k)|^2 + \rho_i^2 |e_i(k)|^2 - \dots \\ & - 2\bar{\eta} |e_i(k)| \left\| \tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k) \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\| + \dots \\ & + \bar{\eta}^2 |e_i(k)|^2 \left\| \frac{\partial q_i^w(k+1)}{\partial \mathbf{K}_{\theta i}} \right\| \end{aligned} \quad (60)$$

Reemplazando (52) y (53) en la diferencia discreta de Lyapunov (60)

$$\begin{aligned} \Delta V_i(k) \leq & -2\rho_i |e_i(k)|^2 + \rho_i^2 |e_i(k)|^2 - 6\bar{\eta} |e_i(k)| \|\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k)\| \bar{W} u_{iMax}^2 \\ & - 9\bar{\eta}^2 |e_i(k)|^2 \bar{W}^2 u_{iMax}^4 \end{aligned} \quad (61)$$

De (62), se obtiene lo siguiente

$$\Delta V_i(k) \leq 0 \quad |e_i(k)| > \frac{6\bar{\eta} \|\tilde{\mathbf{K}}_{\theta i}^T(k)\| \bar{W} u_{iMax}^2}{2\rho_i - \rho_i^2 + 9\bar{\eta}^2 \bar{W}^2 u_{iMax}^4} \quad (62)$$

De la ecuación anterior (62),  $V(k)$  es acotada, lo que implica que  $e_i(k)$  finalmente uniformemente acotado (Uniformly Ultimately Bounded, UUB). Los errores en (62) permiten establecer que estos están acotados por el error de aproximación del controlador PID neuronal adaptable.

## 6 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presenta los resultados experimentales llevados a cabo para realizar la validación de la estructura de control presentada en este trabajo.

El cuatrirotor utilizado posee una estructura de bajo peso que cuenta con cuatro brazos que soportan en sus extremos a los sistemas propulsores, compuestos por un motor de corriente continua sin escobillas (BLDCM, Brushless DC Motor), su correspondiente hélice acoplada al eje del motor, y finalmente el controlador electrónico de velocidad (ESC, ElectronicSpeed Control). El autopiloto utilizado es el arducopter que tiene la característica de ser de código abierto y el mismo esta implementado sobre un Arduino Mega (Ardupilot). Además, cuenta con una IMU y un GPS integrado que permiten obtener las variables de postura de la aeronave. El sistema de control corre sobre Linux y fue implementado utilizando la SDK DroneKit-Python (DroneKit-Python). Esta SDK permite crear aplicaciones en python que pueden comunicarse con vehículos sobre el protocolo MAVLink.

Para validar la propuesta se escogió una trayectoria de referencia tipo ocho inclinado. La tarea de seguimiento se va a desarrollar utilizando el controlador PID adaptable desarrollado en la sección IV y un controlador PID con ganancias estáticas. En ambos casos, los PID fueron inicializados con ganancias arbitrarias obtenidas después de realizar varias pruebas. En el del controlador PID adaptable, las ganancias son actualizadas durante la ejecución de la tarea a través de una ley de aprendizaje a través de un modelo de identificación neuronal.

En la figura 4 se grafican los puntos GPS de la trayectoria real utilizando el software Google Earth<sup>®</sup>, donde se puede apreciar la forma tipo ocho. Las tareas se desarrollaron en un ambiente alejado de cualquier concentración urbana, por cuestiones de seguridad y las condiciones climáticas eran muy buenas casi sin viento.

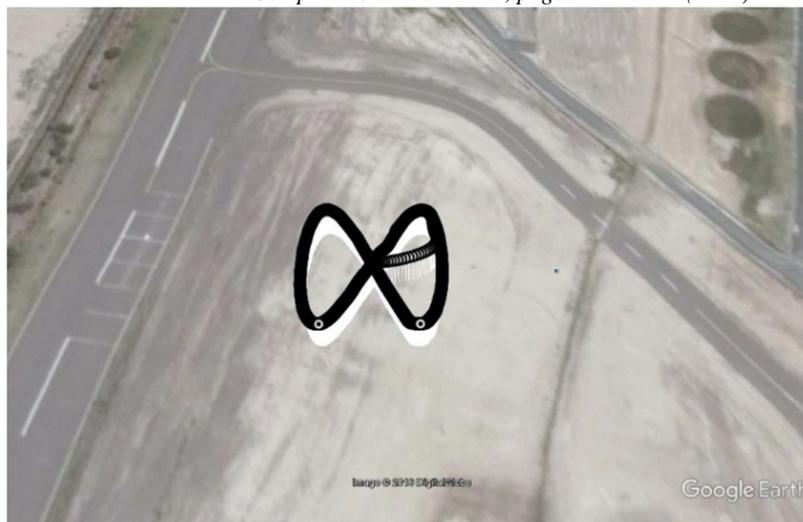


Figura 4. Vista superior de la trayectoria realizada utilizando Google Earth<sup>®</sup>.

En la figura 5 se muestra la evolución 3D de las trayectorias desarrolladas por el vehículo aéreo, utilizando el controlador PID con ganancias estáticas y con ganancias adaptables en función del error de control. Se puede apreciar claramente la forma de la trayectoria y como convergen a la referencia, pero no se puede comparar el desempeño de ambos sistemas de control. Por lo tanto, en la Figura 6 se presenta la evolución de la norma del error de control, el cual contempla el error de las cuatro variables controladas ( $x, y, z, \psi$ ). Durante toda la tarea se puede observar como el error, con el controlador AN-PID, es menor que el error del controlador de PID estático. La justificación radica en el hecho de durante el desarrollo del vuelo, el controlador de ganancias adaptables AN-PID modifica el valor de las ganancias correspondientes, en función del error de la variable de control en cuestión. En cambio para el controlador PID estático, las ganancias fueron definidas al inicio de la tarea y aunque el entorno y las condiciones de la planta tengan variaciones, el sistema de control no se adaptará a estos cambios. De este modo, cualquier cambio o variación en la planta o el entorno se traduce en una degradación de la respuesta del vehículo.

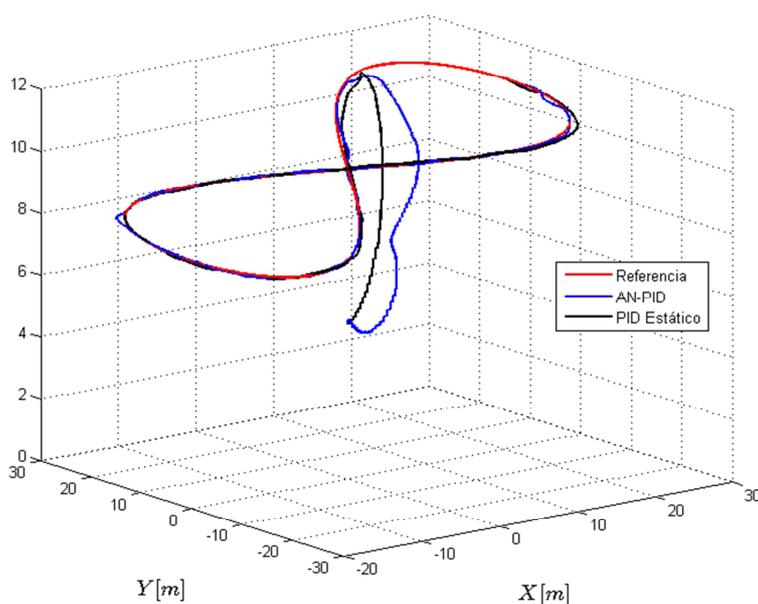


Figura 5. Evolución 3D de las trayectorias para el controlador AN-PID y un controlador PID con ganancias estáticas.

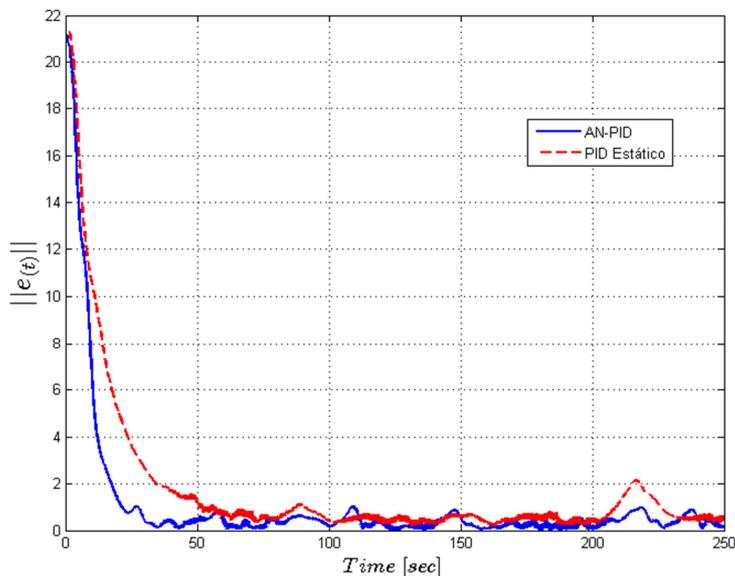


Figura 6. Norma euclidiana del error de control durante la ejecución de la tarea.

A continuación en las Figuras 7, 8, 9 y 10 se presentan la evolución temporal de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $\psi$ , respectivamente. El objetivo es ver la evolución para cada una de las variables a controlar de manera individual, dado que la norma del error presentado anteriormente sintetiza en demasía el desempeño de ambos sistemas de control.

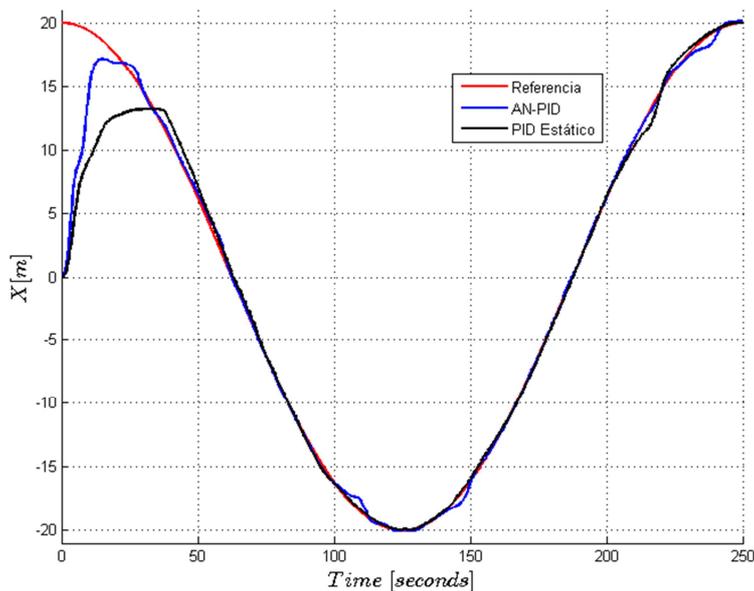


Figura 7. Valor de  $x$  durante el desarrollo de la tarea, utilizando el controlador AN-PID (azul) y un PID estático (negro).

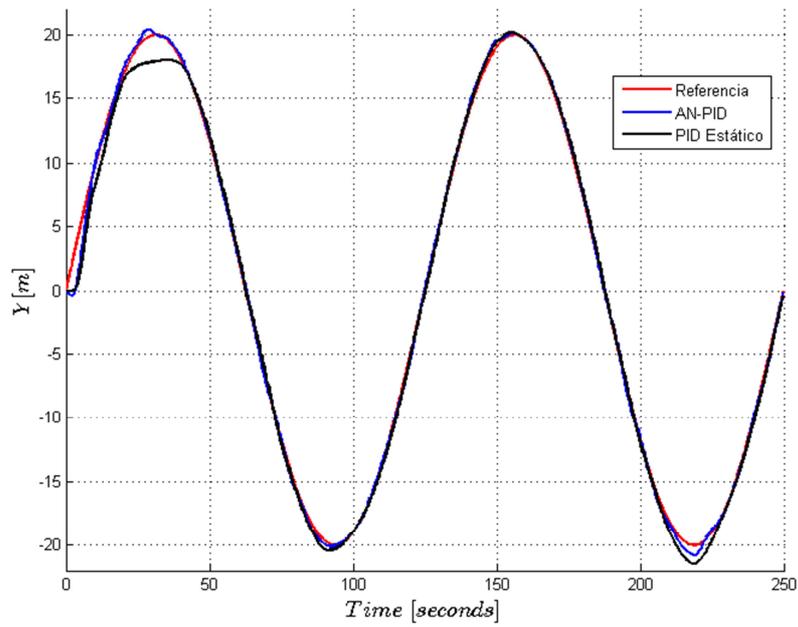


Figura 8. Valor de  $y$  durante el desarrollo de la tarea, utilizando el controlador AN-PID (azul) y un PID estático (negro).

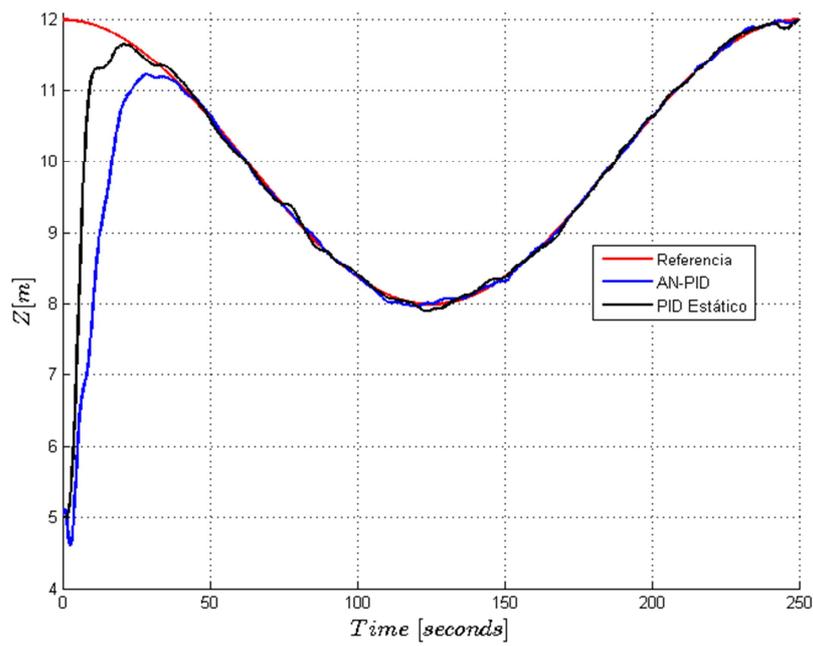


Figura 9. Valor de  $z$  durante el desarrollo de la tarea, utilizando el controlador AN-PID (azul) y un PID estático (negro).

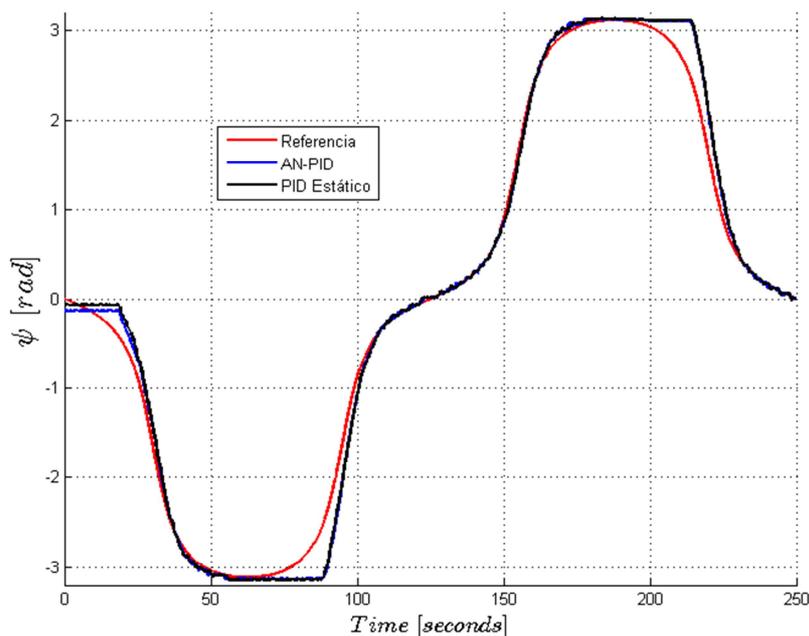


Figura 10. Valor de  $\psi$  durante el desarrollo de la tarea, utilizando el controlador AN-PID (azul) y un PID estático (negro).

En las Figuras anteriores se observa claramente la mejora que representa el controlador propuesto en la sección IV frente a un controlador clásico PID con ganancias fijas.

El estimador neuronal propuesto en la sección III utilizado para el cálculo de las acciones de control se valida en las Figuras 11, 12, 13 y 14 representan la comparativa entre la dinámica identificada por el estimador neuronal basado en EKF y la dinámica real de la aeronave.

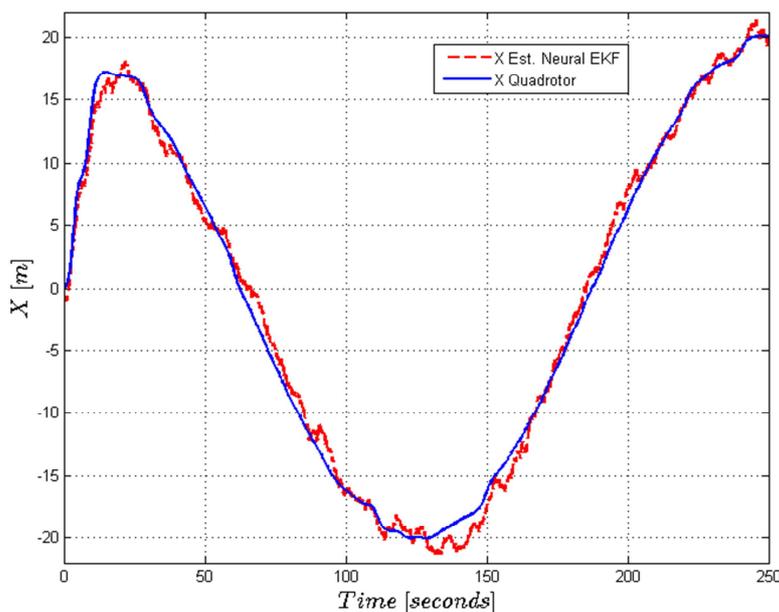


Figura 11. Evolución de la dinámica para  $x$  estimada por el identificador neuronal y la real dinámica del cuatrirotor.

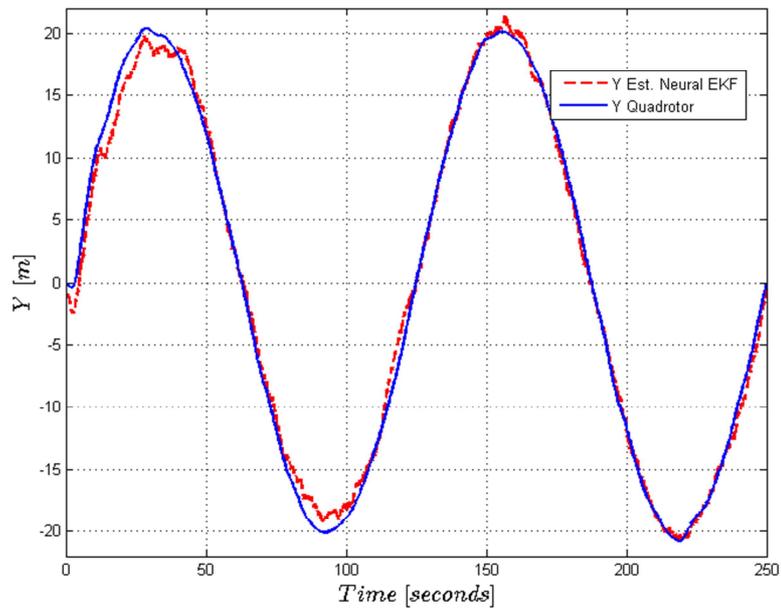


Figura 12. Evolución de la dinámica para y estimada por el identificador neuronal y la real dinámica del cuatrirotor.

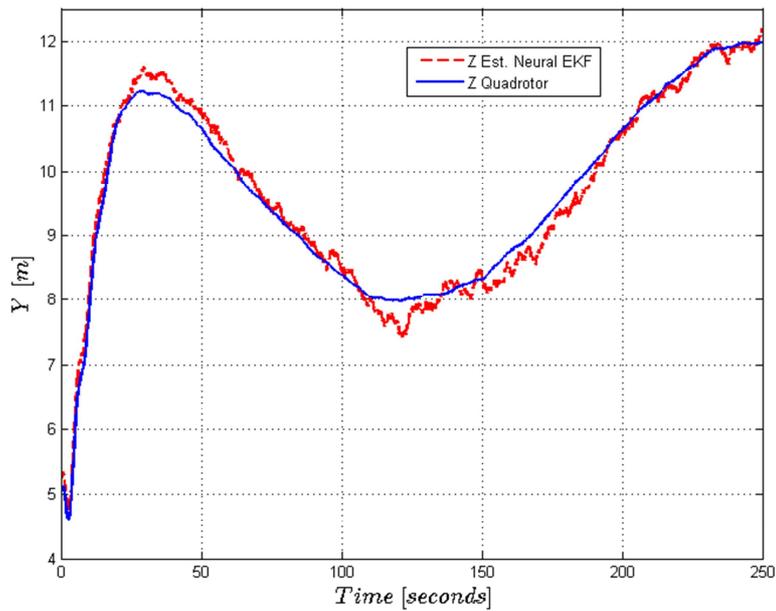


Figura 13. Evolución de la dinámica para z estimada por el identificador neuronal y la real dinámica del cuatrirotor.

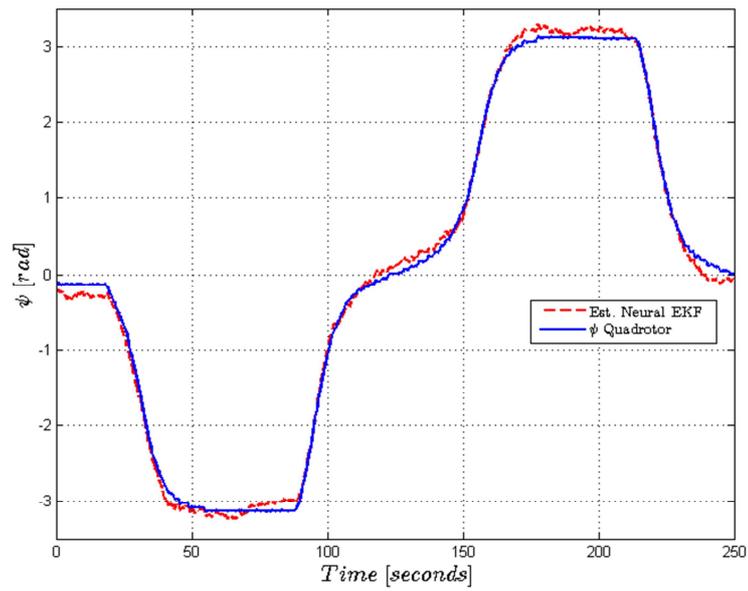


Figura 14. Evolución de la dinámica para  $\psi$  estimada por el identificador neuronal y la real dinámica del cuatrorotor.

Finalmente, se presentan las variaciones en las ganancias del controlador AN-PID para cada una de las variables.

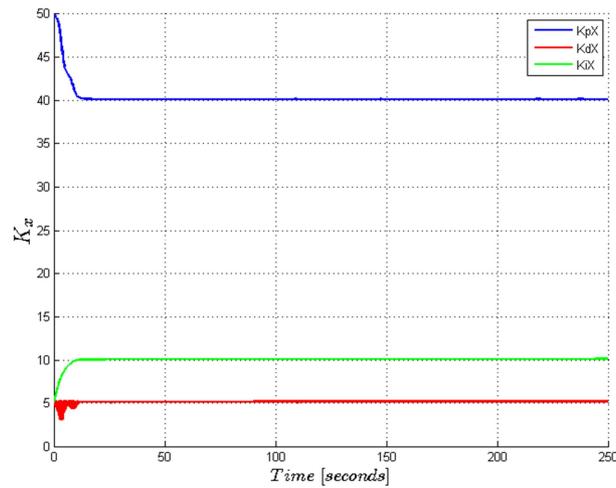


Figura 14. Ganancias para el controlador PID de la variable  $x$  durante la ejecución de la tarea.

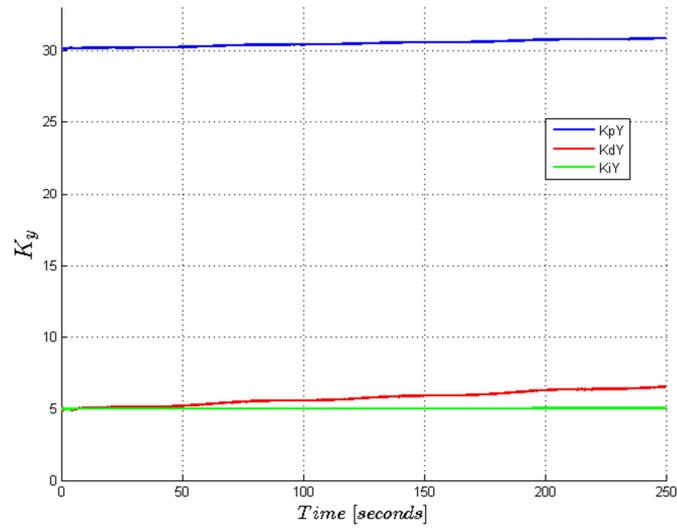


Figura 15. Ganancias para el controlador PID de la variable  $y$  durante la ejecución de la tarea.

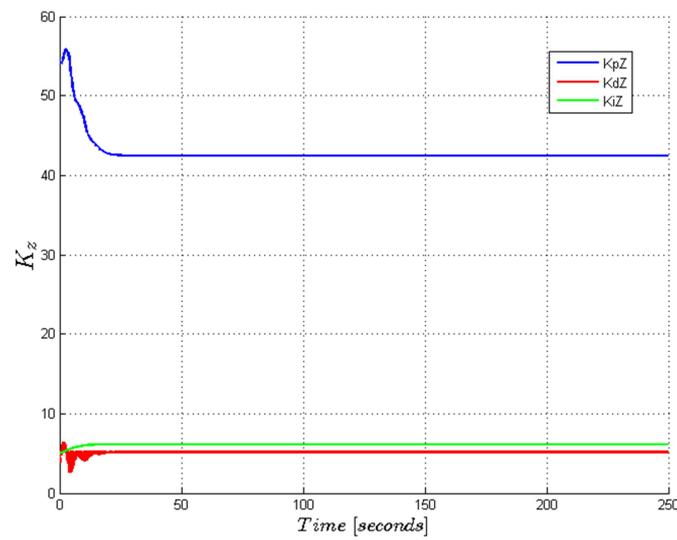


Figura 16. Ganancias para el controlador PID de la variable  $z$  durante la ejecución de la tarea.

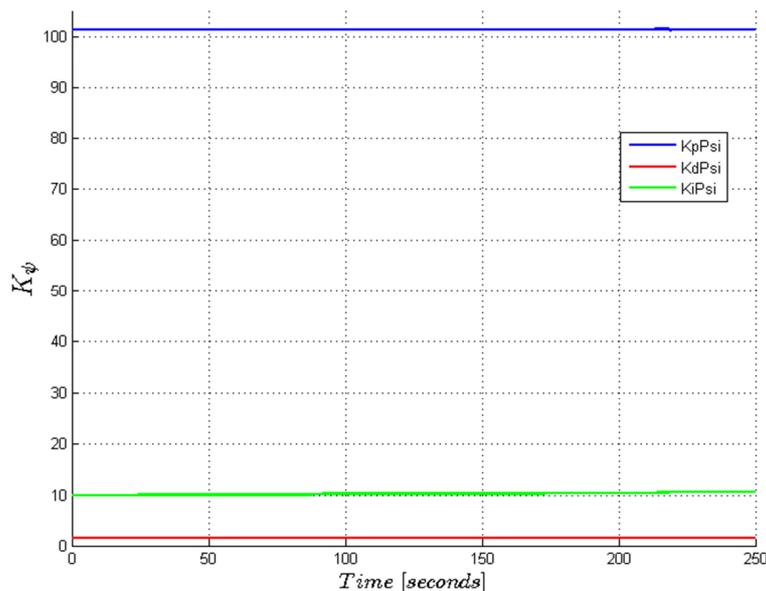


Figura 17. Ganancias para el controlador PID de la variable  $\psi$  durante la ejecución de la tarea.

Las perturbaciones no deseadas que actúan sobre el modelo van desde dinámicas no modeladas hasta variaciones en los parámetros del vehículo aéreo. Los resultados presentados demuestran la robustez del controlador neuronal PID adaptable. La estabilidad del sistema de lazo cerrado se demostró analíticamente a través de la teoría de la estabilidad de tiempo discreto de Lyapunov (Sección 5). Esta propuesta de control inteligente puede considerarse como una solución general para el control de sistemas no lineales y en particular para el caso de sistemas UAV o cuando la dinámica es variable o existen incertidumbres en el modelo. Esta área de investigación continúa abierta al modelado, al estudio de estabilidad y análisis de robustez de los sistemas de control, con el fin de diseñar controladores cada vez más precisos.

## 7 CONCLUSIONES

El controlador PID neural adaptable propuesto resuelve el problema de modificar las ganancias de un controlador PID con el objetivo de minimizar los errores de control. Se demostró que el sistema de lazo cerrado finalmente uniformemente estable (UUB).

Para retro-propagar los errores de control se utilizó una red neuronal RBF y de esta forma poder ajustar las ganancias del controlador. Debido a la capacidad adaptable del controlador, las ganancias de los AN-PID pueden ajustarse a cualquier variación de la dinámica del UAV y de esta forma mejorar el desempeño del sistema de control.

El AN-PID propuesto se aplicó en un vehículo aéreo de cuatro rotores (cuatrirotor) mejorando el rendimiento original en comparación con un PID clásico de ganancias fijas.

Los resultados experimentales han demostrado un buen desempeño del controlador PID neural adaptable y su ajuste a la dinámica del UAV. Por último, la ley de control propuesta y el modelo de identificación pueden aplicarse a cualquier sistema con dinámicas no lineales y desconocidas.

## 8 AGRADECIMENTOS

Los autores agradecen al CONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas) por el apoyo financiero otorgado a esta obra y la Universidad Nacional de San Juan.

## REFERENCIAS

- Islam, S., Liu, P. X., & El Saddik, A. (2015). Robust control of four-rotor unmanned aerial vehicle with disturbance uncertainty. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(3), 1563-1571.
- Bouabdallah, S., Noth, A., & Siegwart, R. (2004, September). PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *Intelligent Robots and Systems, 2004.(IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on* (Vol. 3, pp. 2451-2456). IEEE.
- Rosales, C., Gandolfo, D., Scaglia, G., Jordan, M., & Carelli, R. (2015). Trajectory tracking of a mini four-rotor helicopter in dynamic environments-a linear algebra approach. *Robotica*, 33(08), 1628-1652.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G., & Rubio, F. R. (2008). MPC with Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  Control for Path Tracking of a Quad-Rotor Helicopter. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 8564-8569.
- Reinoso, M. J., Minchala, L. I., Ortiz, P., Astudillo, D. F., & Verdugo, D. (2016). Trajectory tracking of a quadrotor using sliding mode control. *IEEE Latin America Transactions*, 14(5), 2157-2166.
- Bristeau, P. J., Callou, F., Vissiere, D., & Petit, N. (2011). The navigation and control technology inside the ar. drone micro uav. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 1477-1484.
- Xiong, J. J., & Zhang, G. B. (2017). Global fast dynamic terminal sliding mode control for a quadrotor UAV. *ISA transactions*, 66, 233-240.
- Khan, H. S., & Kadri, M. B. (2014, December). Position control of quadrotor by embedded PID control with hardware in loop simulation. In *Multi-Topic Conference (INMIC), 2014 IEEE 17th International* (pp. 395-400). IEEE.
- Sa, R. C., De Araujo, A. L. C., Varela, A. T., & Barreto, G. D. A. (2013, October). Construction and PID control for stability of an unmanned aerial vehicle of the type quadrotor. In *Robotics Symposium and Competition (LARS/LARC), 2013 Latin American* (pp. 95-99). IEEE.
- An, S., Yuan, S., & Li, H. (2016, August). Self-tuning of PID controllers design by adaptive interaction for quadrotor UAV. In *Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC), 2016 IEEE Chinese* (pp. 1547-1552). IEEE.
- Chen, Y. M., He, Y. L., & Zhou, M. F. (2015). Decentralized PID neural network control for a quadrotor helicopter subjected to wind disturbance. *Journal of Central South University*, 22, 168-179.
- Amin, R., Aijun, L., Khan, M. U., Shamshirband, S., & Kamsin, A. (2017). An adaptive trajectory tracking control of four rotor hover vehicle using extended normalized radial basis function network. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83, 53-74.
- Wang, S., Li, B., & Geng, Q. (2013, June). Research of RBF neural network PID control algorithm for longitudinal channel control of small UAV. In *Control and Automation (ICCA), 2013 10th IEEE International Conference on* (pp. 1824-1827). IEEE.
- Chen, Y. M., He, Y. L., & Zhou, M. F. (2015). Decentralized PID neural network control for a quadrotor helicopter subjected to wind disturbance. *Journal of Central South University*, 22, 168-179.

- Rossomando, F. G., & Soria, C. M. (2015). Design and Implementation of Adaptive Neural PID for Non Linear Dynamics in Mobile Robots. *IEEE Latin America Transactions*, 13(4), 913-918.
- Santana, L. V., Brandao, A. S., Sarcinelli-Filho, M., & Carelli, R. (2014, May). A trajectory tracking and 3d positioning controller for the ar. drone quadrotor. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference on* (pp. 756-767). IEEE.
- Krajník, T., Vonásek, V., Fišer, D., & Faigl, J. (2011, June). AR-drone as a platform for robotic research and education. In *International Conference on Research and Education in Robotics* (pp. 172-186). Springer Berlin Heidelberg.
- Hernandez, A., Copot, C., De Keyser, R., Vlas, T., & Nascu, I. (2013, October). Identification and path following control of an AR. Drone quadrotor. In *System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2013 17th International Conference* (pp. 583-588). IEEE.
- Santana, L. V., Brandão, A. S., & Sarcinelli-Filho, M. (2016). Navigation and cooperative control using the ar. drone quadrotor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 84(1-4), 327-350.
- Rossomando, F. G., Soria, C., & Carelli, R. (2013). Algoritmo compensador neuronal discreto de dinámica en robots móviles usando filtro de Kalman extendido. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 29(1), 12-20.
- Song, Y., & Grizzle, J. W. (1992, June). The extended Kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems. In *American Control Conference, 1992* (pp. 3365-3369). IEEE.
- Alanis, A. Y., Sanchez, E. N., & Ricalde, L. J. (2010). Discrete-time reduced order neural observers for uncertain nonlinear systems. *International journal of neural systems*, 20(01), 29-38.
- Ardupilot, <http://ardupilot.org/>.
- DroneKit-Python, <http://python.dronekit.io/>.