

## OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÃO T UTILIZANDO ALGORITMOS EVOLUCIONÁRIOS

Rubens S. Correia<sup>a</sup>, Giuliana F. F. Bono<sup>a,b</sup> e Gustavo Bono<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Laboratório de Engenharia Computacional (LECOM), Núcleo de Tecnologia – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Rod. BR-104 km 59, Caruaru-PE, CEP 55002-970, Brasil, [rubenssilvacorreia@gmail.com](mailto:rubenssilvacorreia@gmail.com), <http://www.ufpe.br/caa>

<sup>b</sup>Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Rod. BR-104 km 59, Caruaru-PE, CEP 55002-970, Brasil, [giuliana.franca@gmail.com](mailto:giuliana.franca@gmail.com), [bonogustavo@gmail.com](mailto:bonogustavo@gmail.com), <http://www.ufpe.br/ppgecam>

**Palavras Chave:** Otimização, Vigas, Concreto Armado, Seção T, Solver.

**Resumo.** Para a obtenção de elementos estruturais econômicos, técnicas de otimização foram incorporadas no dimensionamento das diversas estruturas presentes na engenharia. Vários elementos, com diferentes geometrias, são passíveis de otimização. Assim, o presente estudo visa otimizar vigas de concreto armado com seção T. A função objetivo é custo, tendo como variáveis de projeto as dimensões da seção, e como restrições as imposições das normas técnicas. O problema de otimização, formulado em uma planilha do *Microsoft Excel*, é solucionado através da ferramenta de otimização *Analytic Solver Platform*, utilizando algoritmos evolucionários. Tais métodos são os *Algoritmos Genéticos* e a *Scatter Search* (Busca Dispersa). São obtidos os valores ótimos da seção da viga, os custos otimizados e são feitas análises comparativas dos dois métodos empregados, em diferentes situações.

## 1 INTRODUÇÃO

Comumente, nos edifícios de concreto armado, a laje é apoiada sobre as vigas. No caso de lajes maciças apoiadas por vigas, tais elementos não são independentes uns dos outros. Como as estruturas de concreto são monolíticas, seus elementos trabalham de forma conjunta. Quando a viga sofre deformação, parte da laje, que se encontra próxima, também é afetada e se deforma, de modo que laje e viga se comportam como se fossem a mesma estrutura. Assim, a viga incorpora parte da laje, formando uma viga de seção T (Carvalho; Filho, 2014).

As vigas de seção T também são formadas em lajes nervuradas moldadas no local e lajes pré-fabricadas. Também são comuns as vigas de seção T pré-fabricadas, largamente utilizadas em diversas construções tais como pontes rodoviárias.

Para dimensionar vigas de seção T, bem como outros elementos estruturais de concreto armado, convencionalmente, estima-se as dimensões da seção, e realiza-se a análise estrutural, determinando as áreas de aço. Se a análise resultar que, com as dimensões estimadas, a estrutura atende aos critérios de segurança e utilização, tais dimensões são adotadas como solução. Caso contrário, estimam-se novos valores e a análise é repetida. Deste modo, a solução encontrada pode ser uma boa solução, no entanto, podem existir outras dimensões que resultem em uma solução ainda melhor.

Na construção de edifícios de concreto armado, frequentemente busca-se minimizar custos. Para tanto, umas das formas de reduzir gastos, é através da otimização dos elementos estruturais. O engenheiro estrutural deve então definir a solução ótima no dimensionamento da estrutura. Porém, por meio do dimensionamento convencional, fica difícil determinar esta solução, já que resultaria em um processo de tentativa e erro.

Para encontrar a solução ótima no dimensionamento estrutural, os conceitos da otimização matemática podem ser trazidos para a engenharia civil. Em um problema de otimização deseja-se encontrar os valores que minimizem (ou maximizem) uma função, podendo estar submetida a restrições. Estes valores são chamados de variáveis de projeto e a função de função objetivo. No caso do dimensionamento de vigas de seção T, as variáveis de projeto podem ser as dimensões da seção, a função objetivo ser a minimização dos custos e as restrições, podem ser as imposições das normas técnicas. Portanto, resolvendo o problema, é possível encontrar a solução ótima para a seção T. Alguns estudos, com este objetivo, foram realizados com diferentes metodologias, dos quais citam-se Ferreira, Barros e Barros (2003), Jasim et al. (2005), Silva, Falcón e Garcia (2010) e Tliouine e Fedghouche (2010).

Atualmente, existem diversos métodos de otimização. Um desses métodos são os algoritmos evolucionários, geralmente aplicados em situações de grande complexidade. Fazem parte desse grupo os Algoritmos Genéticos e a Busca Dispersa (*Scatter Search*). Tais técnicas estão presentes em algumas ferramentas de otimização, como o Solver. O Solver é um otimizador, largamente utilizado no Microsoft Excel, capaz de resolver problemas de otimização descritos em planilhas do Excel.

Devido a necessidade de se conceber projetos estruturais mais econômicos, este estudo tem por objetivo otimizar seções T de vigas de concreto armado. Busca-se determinar as dimensões ótimas da seção que minimizem o custo da viga, composto pelos custos dos insumos (aço, fôrmas e concreto). O problema é submetido as restrições da Norma Brasileira de Estruturas de Concreto (ABNT NBR 6118:2014). Para resolver o problema formulado, utiliza-se os algoritmos evolucionários presentes no Solver: Algoritmos Genéticos (AG) e Busca Dispersa (BD). São feitas análises comparativas dos dois métodos, a obtenção das dimensões ótimas da viga e os custos otimizados.

## 2 DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES T

O cálculo das áreas de aço de uma viga de seção transversal retangular, conhecidas as propriedades do concreto, do aço e as dimensões da seção, é feito de maneira simples, por meio do equilíbrio das forças atuantes na seção (Carvalho; Filho, 2014). Da mesma forma, o cálculo das armaduras de uma seção T é realizado através das equações de equilíbrio na seção.

A seção T possui as características apresentadas na Figura 1.

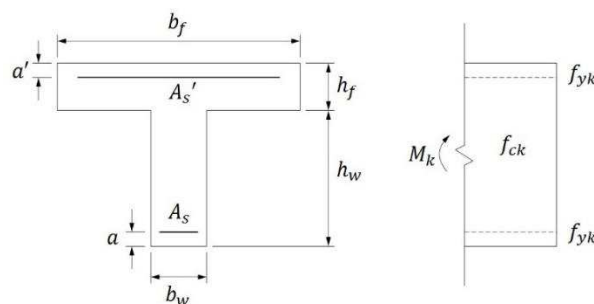


Figura 1: Seção T

A seção T (Figura 1) é composta por mesa e nervura. A mesa possui base  $b_f$  e altura  $h_f$ . A nervura possui base  $b_w$  e altura  $h_w$ . A distância do centro da armadura tracionada ( $A_s$ ) até a borda de concreto tracionado é a dimensão  $a$ . Já a distância do centro da armadura comprimida ( $A_s'$ ) até a borda de concreto comprimido é a dimensão  $a'$ . A seção possui concreto com classe de resistência  $f_{ck}$  e aço com resistência característica à tração  $f_{yk}$ . Um momento fletor positivo  $M_k$  atua na seção.

O procedimento do dimensionamento de seções T de vigas de concreto armado, conforme a ABNT NBR 6118:2014, sujeitas a flexão simples, é apresentado a seguir. Tal procedimento é esquematizado na Figura 2.

### 2.1 Definição da Solução: armadura simples ou dupla

Com as dimensões e dados da seção ( $b_f$ ,  $h_f$ ,  $h_w$ ,  $b_w$ ,  $a$  e  $a'$ ), as propriedades dos materiais ( $f_{ck}$  e  $f_{yk}$ ) e o valor do momento positivo atuante ( $M_k$ ), é possível determinar as áreas de aço necessárias.

Inicialmente é preciso saber se a seção necessita apenas de armadura simples, com aço tracionado, ou de armadura dupla, com aço tracionado e comprimido. Para tanto, é necessário calcular o momento que a seção consegue resistir, com armadura simples, trabalhando no limite da linha neutra. Esse momento é chamado de  $M_{dlim}$ . Se o momento atuante de cálculo ( $M_d$ ) for menor ou igual a  $M_{dlim}$  (Eq.(1)), a seção consegue resistir a  $M_d$  apenas com armadura simples. Caso contrário, é necessária armadura dupla.

$$M_d \leq M_{dlim} \quad (1)$$

O limite da posição da linha neutra é determinado de acordo com as condições de ductilidade expostas no item 14.6.4.3 da ABNT NBR 6118:2014. Conforme a norma citada, a posição da linha neutra, para concretos com  $f_{ck}$  menor ou igual a 50 MPa, deve ser menor ou igual a 0,45 da altura útil ( $d$ ). Assim, o limite da linha neutra ( $x_{lim}$ ) é dado pela Eq.(2).

$$x_{lim} = 0,45d \quad (2)$$

A limitação da linha neutra restringe os possíveis domínios de deformação da seção apenas

ao domínio 2 e parte do domínio 3 (Carvalho; Filho, 2014). Conforme o item 17.2.2 ABNT NBR 6118:2014, a tensão na armadura tracionada, nesses domínios, é a tensão de escoamento do aço ( $f_{yd}$ ).

Através das equações de equilíbrio, é obtido o  $M_{dlim}$  (Eq.(3)). Na Eq.(3),  $\lambda$  e  $\alpha_c$  são parâmetros definidos de acordo com o item 17.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, e  $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do concreto.

$$M_{dlim} = \left[ b_f h_f \left( d - \frac{h_f}{2} \right) + b_w (\lambda x_{lim} - h_f) \left( d - \frac{\lambda x_{lim}}{2} - \frac{h_f}{2} \right) \right] \alpha_c f_{cd} \quad (3)$$

## 2.2 Armadura Simples

Caso a solução para a seção seja armadura simples, existem duas situações possíveis de dimensionamento: a seção pode ser calculada como uma seção T fictícia ou verdadeira.

Se a linha neutra da seção estiver passando pela mesa, a região de concreto comprimido é retangular e não há colaboração da nervura, que está tracionada (Carvalho; Filho, 2014). Assim, é considerado que a seção T é fictícia. A verificação do tipo de seção é feita através do momento resistente da mesa ( $M_{df}$ ), calculado conforme a Eq.(4). Se o  $M_d$  for menor ou igual ao  $M_{df}$  (Eq.(5)), a mesa resiste sozinha a sollicitação, e a seção T é fictícia. Caso contrário, é necessário a contribuição da nervura e a seção T é considerada verdadeira.

$$M_{df} = \alpha_c f_{cd} \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \quad (4)$$

$$M_d \leq M_{df} \quad (5)$$

Para a seção T fictícia, o dimensionamento é realizado considerando uma seção retangular de base  $b_f$  e altura útil  $d$ . Assim, por meio das equações de equilíbrio, as equações obtidas para o cálculo da linha neutra ( $x$ ) e da área de aço ( $A_s$ ) são:

$$x = \frac{d}{\lambda} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2M_d}{\alpha_c f_{cd} b_f d^2} \right)} \right] \quad (6)$$

$$A_s = \frac{\alpha_c f_{cd} \lambda x b_f}{f_{yd}} \quad (7)$$

Para a seção T verdadeira, o dimensionamento é realizado considerando a mesa e a nervura. Através das equações de equilíbrio, são calculados o valor de  $x$  (Eq.(8)) e  $A_s$  (Eq.(9)). A Eq.(8) é uma equação do 2º grau, sendo adotada a solução de  $x$  coerente com as dimensões da seção.

$$M_d - \left[ b_f h_f \left( d - \frac{h_f}{2} \right) + b_w (\lambda x - h_f) \left( d - \frac{\lambda x}{2} - \frac{h_f}{2} \right) \right] \alpha_c f_{cd} = 0 \quad (8)$$

$$A_s = \frac{[b_f h_f + b_w (\lambda x - h_f)] \alpha_c f_{cd}}{f_{yd}} \quad (9)$$

### 2.3 Armadura Dupla

Caso a solução seja armadura dupla, a posição da linha neutra é igual ao seu limite máximo permitido pela norma **ABNT NBR 6118:2014** (Eq.(2)) e deve ser adicionada uma armadura de compressão para contribuir na resistência ao momento solicitante.

Para calcular as áreas de aço, é necessário determinar a tensão na armadura comprimida ( $\sigma_s'$ ). Se a deformação de  $A_s'$  ( $\epsilon_s'$ ) for menor que a deformação de escoamento do aço ( $\epsilon_{yd}$ ),  $\sigma_s'$  deve ser calculado a partir de  $\epsilon_s'$ , conforme a Eq.(10). Na Eq.(10),  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço. Caso  $\epsilon_s'$  seja maior ou igual a  $\epsilon_{yd}$ ,  $A_s'$  está em escoamento e a tensão  $\sigma_s'$  será igual a tensão de escoamento do aço ( $f_{yd}$ ), conforme a Eq.(11).

$$\sigma_s' = \epsilon_s' E_s \tag{10}$$

$$\sigma_s' = f_{yd} \tag{11}$$

Determinada a tensão  $\sigma_s'$ , é possível calcular as áreas de aço  $A_s'$  e  $A_s$ , conforme as Equações (12) e (13), respectivamente. Tais equações são obtidas por meio das equações de equilíbrio da seção analisada.

$$A_s' = \frac{M_d - M_{dlim}}{\sigma_s'(d - d')} \tag{12}$$

$$A_s = \frac{[b_f h_f + b_w(\lambda x_{lim} - h_f)]\alpha_c f_{cd} + \sigma_s' A_s'}{f_{yd}} \tag{13}$$

### 2.4 Fluxograma do Dimensionamento

O procedimento de cálculo, descrito anteriormente, é esquematizado na forma de fluxograma (Figura 2):

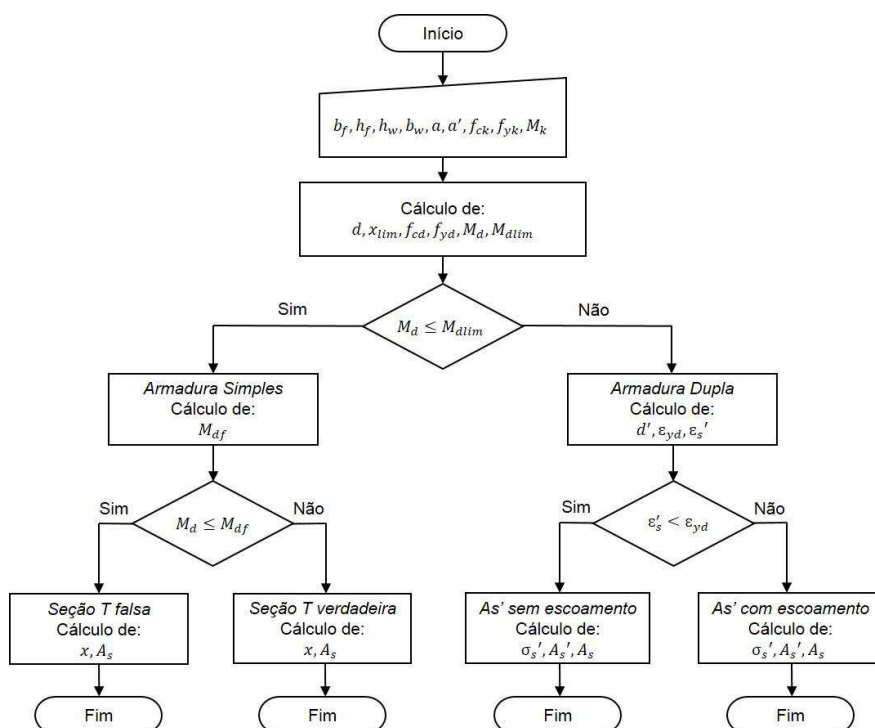


Figura 2: Fluxograma do dimensionamento de seções T de vigas de concreto armado

Com os dados de entrada ( $b_f, h_f, h_w, b_w, a, a', f_{ck}, f_{yk}$  e  $M_k$ ), calcula-se  $d, x_{lim}, f_{cd}, f_{yd}, M_d$  e  $M_{dlim}$ . Verifica-se então o tipo de solução (Eq.(1)): armadura simples ou dupla.

Caso seja armadura simples, calcula-se  $M_{df}$  (Eq.(4)) e verifica-se o tipo de seção para o dimensionamento (Eq.(5)): seção T fictícia ou verdadeira. Para a seção T fictícia, calculam-se  $x$  e  $A_s$  conforme as Equações (6) e (7), respectivamente. Para a seção T verdadeira, calculam-se  $x$  e  $A_s$  com as Equações (8) e (9), respectivamente.

Caso a solução seja armadura dupla, determinam-se  $d', \varepsilon_{yd}$  e  $\varepsilon_s'$ , e verifica-se a situação da armadura comprimida: com ou sem escoamento. Se  $A_s'$  não escoou, calcula-se  $\sigma_s', A_s'$  e  $A_s$  de acordo com as Equações (10), (12) e (13), respectivamente. Para  $A_s'$  em escoamento,  $\sigma_s', A_s'$  e  $A_s$  são calculados conforme as Equações (11), (12) e (13), respectivamente.

### 3 OTIMIZAÇÃO POR ALGORITMOS EVOLUCIONÁRIOS

Essencialmente, a otimização é uma busca do melhor objetivo, operando dentro de um conjunto de restrições. Esta situação deve ser expressa matematicamente para poder ser aplicados métodos de otimização (Venkataraman, 2009).

De forma geral, um problema de otimização pode ser enunciado, matematicamente, da seguinte maneira (Chapra e Canale, 2011):

Encontrar  $x$ , que minimiza (ou maximiza)  $f(x)$ , sujeita as restrições:

$$d_i(x) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

$$e_i(x) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (15)$$

nas quais  $x$  é um vetor que contém as variáveis de projeto,  $f(x)$  é a função objetivo e as Equações (14) e (15) são restrições.

Assim, a otimização consiste em encontrar determinados valores que minimizem (ou maximizem) uma função, atendendo certas restrições. Existem diversas técnicas de otimização, dentre as quais destacam-se os algoritmos evolucionários.

Os algoritmos evolucionários são técnicas de busca que usam modelos computacionais dos processos naturais da evolução para revolver diversos problemas, tais como os problemas de otimização. De forma geral, tais métodos têm em comum o conceito de simulação da evolução das espécies por meio da seleção, mutação e reprodução. Esses algoritmos funcionam mantendo uma população de indivíduos (soluções), nos quais são aplicados os operadores genéticos (recombinação e mutação, por exemplo). Cada indivíduo recebe uma avaliação referente a sua qualidade como solução do problema. Tendo por base esta avaliação, serão aplicados os operadores genéticos, simulando a sobrevivência do mais apto (Linden, 2008).

De forma simples, um algoritmo evolucionário consiste em buscar, dentro da população atual, as soluções com as melhores características e tentar combiná-las de forma a gerar novas soluções ainda melhores. Este processo continua até que se tenha atingido algum critério de parada (Linden, 2008).

Conforme Parreiras (2006), os algoritmos evolucionários têm como vantagens a capacidade de encontrar soluções ótimas globais em problemas de grande complexidade e o fato de não exigirem o cálculo de derivadas. No entanto, estes algoritmos são baseados em técnicas heurísticas que não garantem a obtenção da melhor solução, mas que geralmente encontram a solução ótima global ou uma solução bastante próxima (Linden, 2008).

Atualmente, existem vários tipos de algoritmos evolucionários. Como exemplo, temos os Algoritmos Genéticos e a Busca Dispersa (*Scatter Search*). Tais métodos são utilizados neste estudo e são explanados a seguir.

### 3.1 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos podem ser definidos como uma técnica de busca baseada nas ideias do processo biológico de evolução natural. Sua história tem início na década de 40, e teve seu marco com John Holland na década de 60 (Linden, 2008).

Um Algoritmo Genético básico pode ser descrito da seguinte maneira (Hillier; Lieberman, 2010):

- *Inicialização*: Comece com uma população inicial de indivíduos (soluções viáveis). Calcule a adaptação (valor da função objetivo) de cada membro dessa população;
- *Iteração*: Use um processo aleatório, que tende na direção dos membros mais adaptados da população (com melhores valores da função objetivo), para selecionar alguns indivíduos para serem pais. Emparelhe os pais aleatoriamente, e a partir deles produza novos indivíduos. As características desses filhos são uma mistura aleatória dos pais, exceto por mutações ocasionais. Quando este processo resultar em filhos inaptos (soluções inviáveis), repita o mesmo procedimento até gerar soluções viáveis. Guarde os filhos e um número suficiente dos melhores membros da população atual para formar a nova população da próxima iteração, e descarte os demais membros. Calcule a adaptação dos novos indivíduos na nova população;
- *Regra de parada*: Pare quando algum critério de parada for atendido. Este critério pode ser um número máximo de iterações, um tempo máximo de execução ou um número fixo de iterações sem melhorias na solução até então encontrada. Use a melhor solução encontrada como a solução final.

Como visto na descrição anterior, a população é alterada por meio dos operadores genéticos de recombinação e mutação. Na recombinação um novo indivíduo é produzido utilizando apenas as características de outros dois indivíduos (os pais) selecionados aleatoriamente. Já a mutação, modifica uma das características do indivíduo (Sucupira, 2004).

### 3.2 Busca Dispersa

A Busca Dispersa (*Scatter Search*) é uma técnica de busca que apresenta semelhanças com os Algoritmos Genéticos. Seus conceitos fundamentais foram propostos na década de 70 por Fred Glover. Os estudos desenvolvidos por Fred Glover, Manuel Laguna e Rafael Martí são referências sobre a Busca Dispersa (Sosa; Galvão; Gandelman, 2007).

Com base nas exposições de Martí; Laguna e Glover (2006), um algoritmo básico de Busca Dispersa pode ser descrito como:

- *Inicialização*: Construa uma população de soluções iniciais e aplique Métodos de Melhoria para aprimorar a qualidade dessas soluções. Adicione tais soluções melhoradas a população. Construa um Conjunto de Referência com as melhores soluções da população, em qualidade e diversidade;
- *Iteração*: Crie subconjuntos do Conjunto de Referência. Combine as soluções desses subconjuntos para criar novas soluções. Aplique Métodos de Melhoria nas novas soluções. Atualize o Conjunto de Referência, com as melhores soluções existentes. Crie subconjuntos do novo Conjunto de Referência;
- *Regra de parada*: Pare quando algum critério de parada for atendido. Este critério pode ser quando o Conjunto de Referência não for atualizado na última etapa.

Assim, a Busca Dispersa é baseada em cinco métodos (Martí; Laguna; Glover, 2004):

- Método de geração de soluções diversificadas;

- Método de melhoria para aprimorar as soluções;
- Método de atualização do Conjunto de Referência;
- Método de geração de subconjuntos;
- Método de combinação de soluções.

A Busca Dispersa difere dos Algoritmos Genéticos, e de outros métodos evolutivos, por utilizar técnicas que são sistemáticas (e não aleatórias) na substituição de uma população por outra (Sucupira, 2004).

### 3.3 A Ferramenta Solver

O Solver é uma ferramenta de simulação, análise e otimização, desenvolvida pela [Frontline Systems](#), comumente utilizada no Microsoft Excel para resolver problemas de otimização escritos em planilhas.

Neste estudo, foi utilizada a versão estudantil do *Analytic Solver Platform* (Versão 2016-R3).

O Solver possui, em seus métodos de otimização, os Algoritmos Genéticos e a Busca Dispersa, abordados anteriormente. Tais técnicas estão presentes na opção *Evolutionary*. Na caixa de diálogo do *Evolutionary* (Figura 3), na configuração “Global Search”, é possível escolher o algoritmo evolucionário para resolução do problema: Algoritmos Genéticos ou Busca Dispersa.

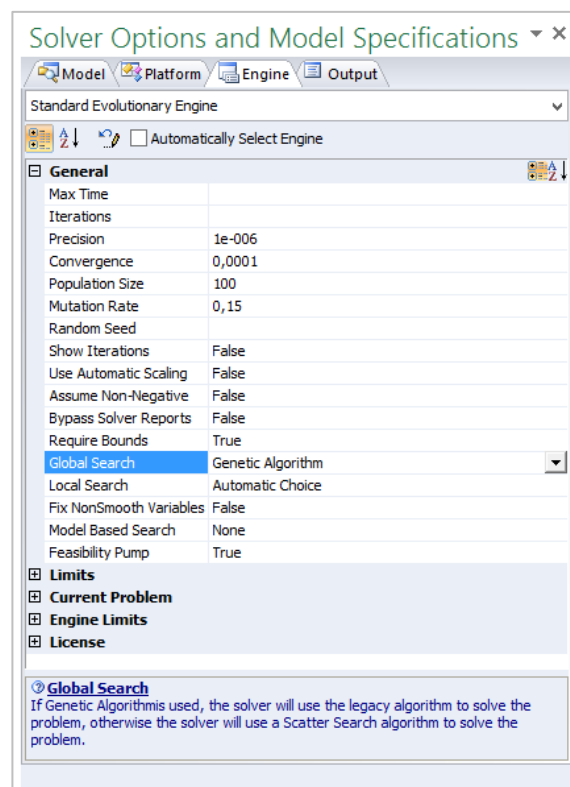


Figura 3: Caixa de diálogo do *Evolutionary*

Além da escolha do método evolucionário de otimização, existem outras configurações na caixa de diálogo do *Evolutionary* (Figura 3), tais como o “Population Size” (Tamanho da População) e a “Mutation Rate” (Taxa de Mutação).

Conforme a [Frontline Systems](#), o *Evolutionary* é recomendado em situações onde a função



objetivo e as restrições são funções não-suaves e não-convexas, já que métodos de otimização determinísticos possuem dificuldades de encontrar a solução ótima nessas situações. Além disso, o *Evolutionary* opera bem em qualquer modelo de planilha, inclusive as que contêm funções do tipo SE( ) (Ragsdale, 2014).

#### 4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste estudo, são otimizadas seções T de vigas de concreto armado, sujeitas a um momento fletor positivo. A seção T possui as características mostradas na Figura 1. Nas seções, foram adotados o valor de 4 cm para a dimensão  $a$  e 3 cm para  $a'$  (Figura 1). O aço é do tipo CA-50 ( $f_{yk}=50$  kN/cm<sup>2</sup>) e os concretos utilizados são de Classe de Resistência I ( $f_{ck}\leq 50$  MPa).

As variáveis de projeto são as dimensões da seção:  $b_f$ ,  $h_f$ ,  $h_w$  e  $b_w$ , ver Figura 1. A função objetivo é a minimização do custo (Eq.(16)), composta pelos custos dos insumos: aço, fôrmas e concreto. Esta função é dada em (R\$/m), ou seja, custo por unidade de comprimento da viga, sendo escrita da seguinte maneira:

$$C = (b_f h_f + b_w h_w) C_C + (A_s + A_s') \rho C_A + (2(h_f + h_w) + b_f) C_F \quad (16)$$

na qual  $C_C$ ,  $C_A$  e  $C_F$  são os custos unitários do concreto, do aço e das fôrmas, respectivamente. O parâmetro  $\rho$  é a massa específica do aço (7850 kg/m<sup>3</sup>). As áreas de aço ( $A_s$  e  $A_s'$ ) são calculadas conforme a metodologia apresentada no item 2.

Como restrições do problema, foram consideradas as imposições da Norma Brasileira de Estruturas de Concreto, ABNT NBR 6118:2014, e limitações arquitetônicas. Tais restrições são expostas a seguir:

- De acordo com o item 17.3.5.1 da ABNT NBR 6118:2014, a armadura tracionada ( $A_s$ ) deve atender a um valor mínimo ( $A_{smin}$ ), calculado de acordo com o item 17.3.5.2.1:

$$A_s \geq A_{smin} \quad (17)$$

- Além de uma armadura mínima de tração, a ABNT NBR 6118:2014 também especifica um valor máximo de armadura na seção. Conforme o item 17.3.5.2.4, a soma das armaduras de tração ( $A_s$ ) e compressão ( $A_s'$ ) não deve ter valor maior que 4% da área de concreto da seção ( $A_C$ ):

$$A_s + A_s' \leq 0,04 A_C \quad (18)$$

- A base das vigas, segundo o item 13.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, não pode apresentar valor menor que 12 cm. E de acordo com o item 13.4.2.1, as lajes maciças de piso não devem apresentar espessura menor que 8 cm. Supondo que a seção T é formado pela incorporação de uma laje maciça com a viga, a largura da nervura ( $b_w$ ) e a espessura da mesa ( $h_f$ ) devem atender:

$$b_w \geq 12 \quad (19)$$

$$h_f \geq 8 \quad (20)$$

- Como limitação da largura da mesa ( $b_f$ ) foi adotado que seu valor não deve ser maior que 100 cm (Eq.(21)). Além disso, para que a seção mantenha sua geometria de seção T,  $b_f$  deve ser maior que  $b_w$  (Eq.(22)).

$$b_f \leq 100 \quad (21)$$

$$b_f - b_w > 0 \quad (22)$$

- Supondo que, por questões arquitetônicas, a altura da viga ( $h_f+h_w$ ) não deve ser maior que 70 cm:

$$h_f + h_w \leq 70 \quad (23)$$

Descritos os componentes da otimização, o problema pode ser enunciado da seguinte forma:

Encontrar  $b_f$ ,  $h_f$ ,  $h_w$  e  $b_w$  tal que:

$$\text{Minimize: } C(b_f, h_f, h_w, b_w) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } & A_s \geq A_{smin} \\ & A_s + A'_s \leq 0,04A_C \\ & b_w \geq 12 \\ & h_f \geq 8 \\ & b_f \leq 100 \\ & b_f - b_w > 0 \\ & h_f + h_w \leq 70 \end{aligned}$$

Os custos unitários dos insumos foram extraídos da Tabela de preços do [SINAPI](#) (Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil), do mês de maio de 2017 para o estado de Pernambuco (Brasil). Tais custos são apresentados na [Tabela 1](#):

<i>Código do SINAPI</i>	<i>Insumo</i>	<i>Unidade</i>	<i>Custos (R\$)/Unidade</i>
34439	Aço	kg	4,24
1345	Formas	m <sup>2</sup>	33,61
34492	Concreto C20	m <sup>3</sup>	249,29
34493	Concreto C25	m <sup>3</sup>	258,96
34494	Concreto C30	m <sup>3</sup>	270,46
34495	Concreto C35	m <sup>3</sup>	282,01
34496	Concreto C40	m <sup>3</sup>	294,57
34481	Concreto C45	m <sup>3</sup>	377,50
34483	Concreto C50	m <sup>3</sup>	447,71

Tabela 1: Custos unitários dos insumos.

Para resolver o problema de otimização, foi utilizada a ferramenta Solver, apresentada no item 3. O dimensionamento da seção T, apresentado no item 2, foi implementado em uma planilha do Excel, bem como o problema de otimização da Eq.(24). Assim, foi possível encontrar as dimensões ótimas das seções T, em diferentes situações, por meio dos algoritmos evolucionários do Solver.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 Comparação dos Algoritmos Evolucionários

Para saber qual dos dois métodos evolucionários, Algoritmos Genéticos e Busca Dispersa, é o mais adequado para a resolução do problema de otimização de seções T, Eq.(24), foram obtidos os custos utilizando um  $f_{ck}$  de 25 MPa e variando o valor do momento fletor de 50 a 1200 kN.m.

Nos parâmetros do Solver (Figura 3) foram utilizadas duas configurações. Na configuração 1 (config.1) foi utilizada uma população de 50, e a taxa de mutação de 0,075. Já na configuração 2, o valor da população adotado foi de 100, e a taxa de mutação igual a 0,15.

Os resultados obtidos para os dois algoritmos são apresentados na Figura 4.

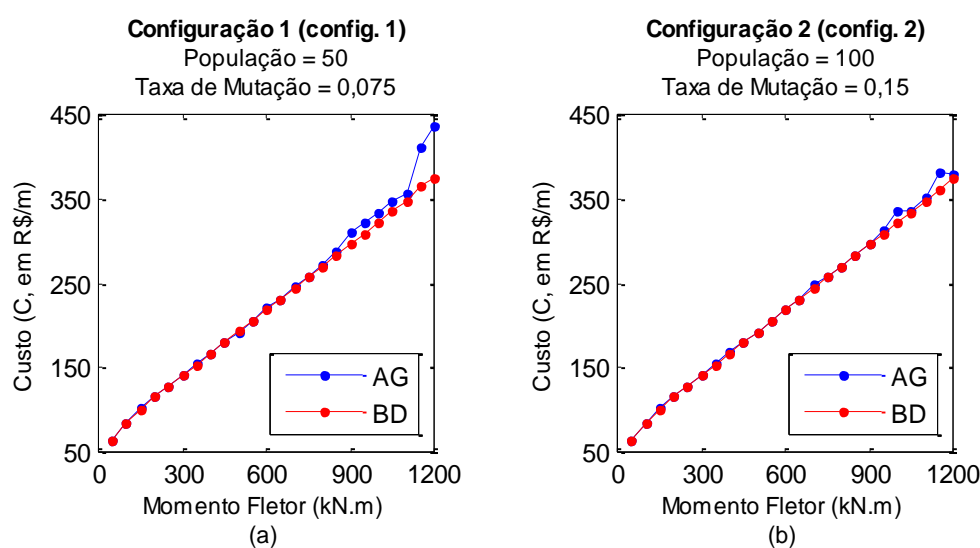


Figura 4: Custos otimizados obtidos através dos Algoritmos Genéticos (AG) e da Busca Dispersa (BD), para as configurações 1 e 2

Na Figura 4 (a), para a configuração 1, é perceptível que os custos obtidos pelo método da Busca Dispersa (BD), foram menores que os obtidos pelo método dos Algoritmos Genéticos (AG) para valores maiores de momento. Isso significa que a BD foi mais eficiente que os AG na minimização dos custos da seção T, utilizando os valores de população e taxa de mutação da configuração 1.

Na Figura 4 (b), com a configuração 2, ocorreu uma melhoria nos resultados dos AG, comparados com os obtidos com a configuração 1. Porém, observa-se que, na configuração 2, os custos da BD ainda resultaram menores que os dos AG, mostrando que a BD é mais eficiente na resolução deste problema. No entanto, como visto na Figura 4 (b), a diferença dos custos dos AG e da BD são pequenas.

Segundo a [Frontline Systems](#), em certos problemas de otimização, a BD pode resultar em melhores resultados, em pouco tempo, comparado com os AG. Porém, em outros modelos, os AG podem ser mais eficientes. Pelo fato de, na maioria dos modelos, a BD ser mais eficiente, é a escolha padrão do Solver. [Martí, Laguna e Campos \(2002\)](#) realizaram um estudo onde foi comprovado que tanto a BD quanto os AG são eficientes e que em determinados problemas, a BD pode obter melhores resultados. Uma das possíveis explicações dessas conclusões é que, como visto no item 3.3, a BD utiliza procedimentos sistemáticos (e não aleatórios) na substituição de uma população por outra.

Então, neste estudo de otimização de vigas de seção T, foi utilizado a BD como o método

evolucionário de resolução, já que os resultados mostraram sua superioridade em relação aos AG.

Para saber qual das configurações (config.1 e config.2) de população e taxa de mutação é mais adequada na BD do Solver, os resultados obtidos nas duas situações são comparados na Tabela 2. Observando os custos otimizados, constata-se que, de modo geral, os valores obtidos com a configuração 2 são ligeiramente menores que os da configuração 1. Assim, a configuração 2 é mais adequada por ser mais eficiente na minimização do custo das seções T.

De acordo com a [Frontline Systems](#), um tamanho maior de população possibilita uma exploração maior no espaço de busca das soluções. Porém, a experiência com algoritmos evolucionários sugere que uma população não precisa ser muito grande para se ter eficácia, sendo os valores de 70 a 100 utilizados em muitas aplicações bem sucedidas. No Solver, a taxa de mutação deve ter um valor entre 0 e 1. Um valor de taxa elevado aumenta a diversidade de soluções na população, porém, pode aumentar também o tempo de execução. De fato, ao aumentar os valores de população de 50 para 100, e taxa de mutação de 0,075 para 0,15, foi constatado uma melhoria nos resultados de ambos os métodos (AG e BD).

$M_k$ (kN.m)	Custo (R\$/m)		$M_k$ (kN.m)	Custo (R\$/m)	
	config.1	config.2		config.1	config.2
50	61,53	61,53	650	231,39	231,52
100	83,54	83,54	700	244,64	244,25
150	100,33	100,33	750	257,30	257,08
200	114,44	114,44	800	270,08	270,38
250	127,63	127,42	850	283,04	283,56
300	141,02	140,44	900	296,29	295,99
350	153,39	153,35	950	308,96	308,95
400	166,35	166,63	1000	321,92	321,95
450	179,41	179,29	1050	335,20	334,91
500	192,84	192,26	1100	348,14	348,14
550	205,27	205,23	1150	365,75	361,66
600	219,91	218,18	1200	375,76	375,50

Tabela 2: Custos otimizados obtidos da Busca Dispersa (BD), para as configurações 1 e 2.

Enfim, devido as discussões anteriores, foi escolhido o método da BD, com os valores de população e taxa de mutação iguais a 100 e 0,15, respectivamente, na resolução da otimização de vigas de seção T.

## 5.2 Dimensões Otimizadas

As dimensões otimizadas da seção T, foram obtidas para diferentes valores de momento fletor e  $f_{ck}$ . Os valores otimizados são apresentados na Figura 5.

Os valores ótimos da largura da mesa ( $b_f$ ), como visto na Figura 5(a), apresentam um crescimento com o aumento do momento fletor. Tal comportamento é esperado pois, à medida que o momento atuante na seção aumenta, é necessária uma área maior de concreto comprimido para elevar a resistência da seção. É interessante notar também que, com o aumento do momento,  $b_f$  é maior para os  $f_{ck}$  menores, pois os concretos com valores baixos de  $f_{ck}$  apresentam baixa resistência a compressão, necessitando então um aumento nas dimensões da região de concreto comprimido.

Na Figura 5(b), apresentam-se os valores otimizados da altura da mesa ( $h_f$ ).

Diferentemente do comportamento de  $b_f$ ,  $h_f$  apresenta um baixo crescimento com o aumento do momento fletor. Como visto no item 2, quando a linha neutra da seção passa pela mesa, o dimensionamento é feito considerando uma seção T fictícia, onde não se considera a contribuição do concreto da nervura, pois o mesmo se encontra tracionado (abaixo da linha neutra). Assim, espera-se que os valores ótimos de  $h_f$  não sejam altos, para não cair no caso de dimensionamento de seção T fictícia. De fato, verifica-se que os valores ótimos de  $h_f$  são pequenos.

A altura ótima da nervura ( $h_w$ ), conforme a Figura 5(c), apresenta um rápido crescimento com o aumento do momento fletor. Observa-se que a partir de 300 kN.m,  $h_w$  apresenta um comportamento aproximadamente constante, com poucas variações devido ao aumento do momento fletor. É provável que a altura ótima da nervura tenha valores elevados, devido ao fato de que valores baixos conduzem a seção T com armadura dupla, o que pode elevar os custos.

A base ótima da nervura ( $b_w$ ), contrariamente as outras dimensões, é constante em todas as situações de momento fletor e  $f_{ck}$ , como visto na Figura 5(d), sendo igual a 12 cm que é o valor mínimo (Eq.(19)). Esse resultado era esperado, pois a maior parte do concreto da nervura está tracionado e não contribui na resistência da seção ao momento fletor solicitante. Então, não é necessária uma grande largura da nervura na seção T, submetida a um momento fletor positivo.

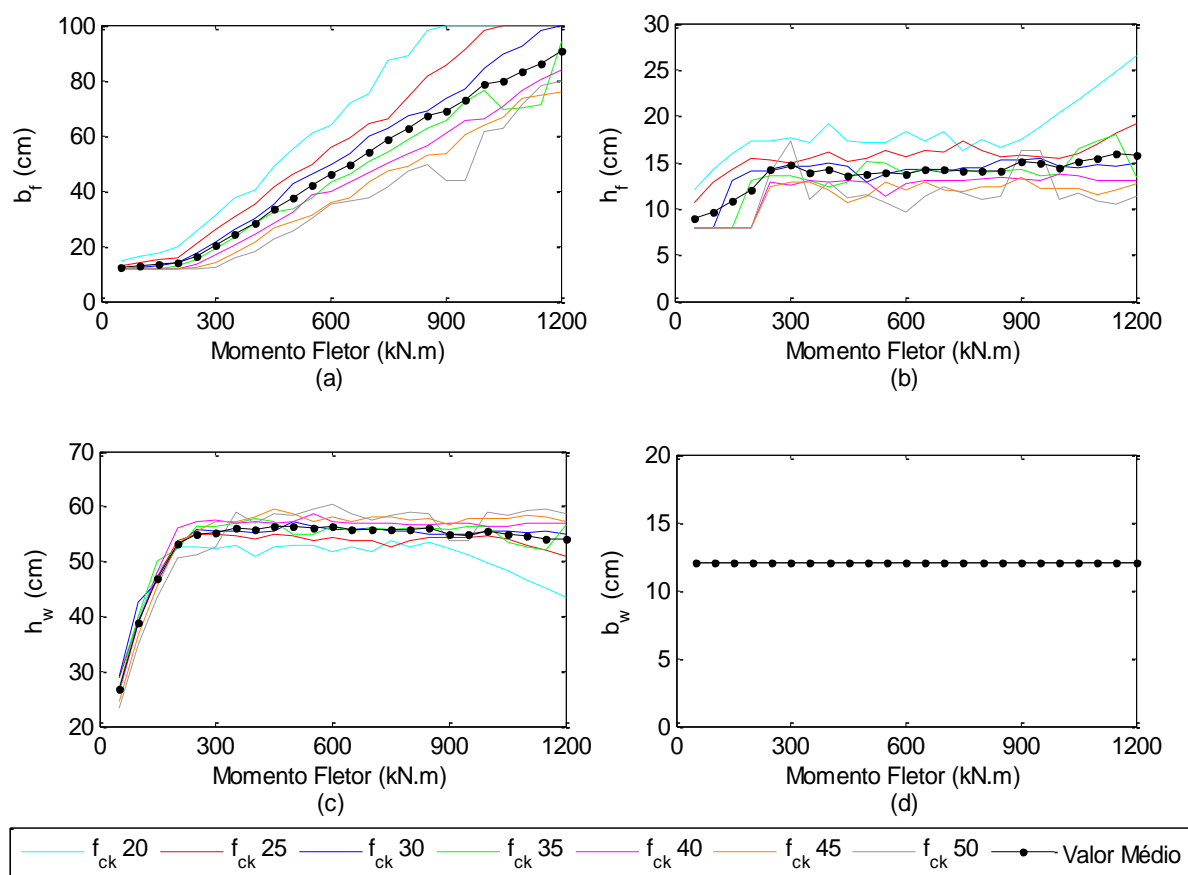


Figura 5: Dimensões otimizadas da seção T, para diferentes valores de momento fletor e  $f_{ck}$

Na Figura 5 estão representados também os valores médios das dimensões da seção T. Estes valores foram calculados fazendo-se a média das dimensões ótimas obtidas para

diferentes  $f_{ck}$ . Assim, foram obtidos as dimensões otimizadas médias, para os diferentes valores de momentos fletores. Estes valores são apresentados na [Tabela 3](#).

Em uma situação de dimensionamento de seção T, as dimensões ótimas apresentadas na [Tabela 3](#) podem servir como referência no pré-dimensionamento deste tipo de seção.

No item 2, foi apresentado os dois tipos de solução para o dimensionamento de seções T: armadura simples e armadura dupla. No caso de armadura simples, existem duas possibilidades: o cálculo considerando a seção T fictícia ou verdadeira. Na [Tabela 4](#) se encontram as porcentagens de seções T otimizadas para cada umas das soluções.

$M_k$ (kN.m)	Dimensões ótimas (cm)				$M_k$ (kN.m)	Dimensões ótimas (cm)			
	$b_f$	$h_f$	$h_w$	$b_w$		$b_f$	$h_f$	$h_w$	$b_w$
50	12,44	8,95	26,83	12,00	650	49,56	14,22	55,78	12,00
100	12,92	9,59	38,72	12,00	700	53,79	14,23	55,77	12,00
150	13,39	10,75	46,89	12,00	750	58,36	14,12	55,88	12,00
200	14,09	11,97	53,12	12,00	800	62,57	14,11	55,89	12,00
250	16,48	14,17	54,84	12,00	850	67,05	14,08	55,92	12,00
300	20,11	14,80	55,20	12,00	900	68,93	15,09	54,91	12,00
350	24,49	13,88	56,12	12,00	950	72,81	15,00	55,00	12,00
400	28,31	14,30	55,69	12,00	1000	78,38	14,38	55,62	12,00
450	33,50	13,53	56,47	12,00	1050	79,80	15,17	54,83	12,00
500	37,59	13,74	56,26	12,00	1100	83,41	15,37	54,62	12,00
550	41,91	13,81	56,19	12,00	1150	86,04	15,87	54,12	12,00
600	46,12	13,75	56,24	12,00	1200	90,44	15,85	54,15	12,00

Tabela 3: Dimensões otimizadas (valores médios).

Solução			Domínio	
AS - TF	AS - TV	AD	2	3
1,19%	89,29%	9,52%	0,60%	99,40%

Tabela 4: Porcentagens de seções T otimizadas para cada tipo de Solução e Domínio. AS-TF significa “Armadura Simples – Seção T Fictícia”. AS-TV significa “Armadura Simples – Seção T Verdadeira”. AD significa “Armadura Dupla”.

Conforme a [Tabela 4](#), 89,29% das seções otimizadas ficaram na configuração com armadura simples na seção T verdadeira. De fato, esta solução para o dimensionamento representa uma situação econômica, pois além do concreto comprimido da mesa, existe uma parte de concreto da nervura que também contribui na resistência da seção ao momento fletor solicitante. Além disso, esta é uma solução com armadura simples, onde não há necessidade de armadura de compressão.

Um outro aspecto pertinente, em relação as seções otimizadas, é o domínio de deformação onde a seção se encontra. No item 2, foi exposto que devido a limitação da linha neutra, Eq.(2), os possíveis domínios são o 2 e parte do domínio 3. Conforme a [ABNT NBR 6118:2014](#), no domínio 2, o concreto não alcança a ruptura e o alongamento do aço tracionado é o máximo permitido. Já no domínio 3, o concreto alcança a ruptura e o aço escoia. Segundo

Carvalho e Filho (2014), o domínio 3 representa uma situação ideal, pois a ruptura do concreto ocorre simultaneamente com o escoamento do aço tracionado. Assim, tanto o concreto quanto o aço atingem sua capacidade resistente máxima, sendo então aproveitados integralmente.

Na Tabela 4, é verificado que 99,40% das seções otimizadas se encontram no domínio 3. Portanto, os resultados evidenciam que, de fato, as seções otimizadas se encontram em uma situação de dimensionamento econômica, já que quase todas as seções obtidas estão no domínio 3.

### 5.3 Custos das Seções Otimizadas

Os custos das seções otimizadas, para diferentes valores de momento fletor e  $f_{ck}$ , são apresentados na Figura 6. Percebe-se que ocorre um crescimento no custo com o aumento do momento fletor atuante. Verifica-se também que não acontecem mudanças significativas no custo, devido a variação do  $f_{ck}$ . A medida que o momento fletor aumenta, os custos das seções com  $f_{ck}$  igual a 20 MPa são ligeiramente maiores que os custos das demais seções.

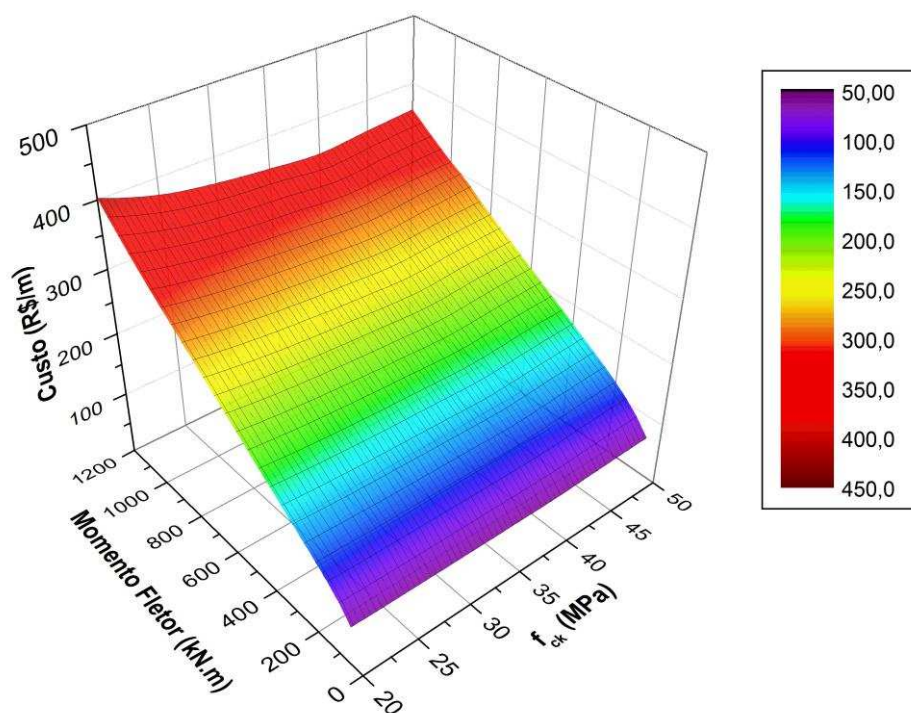


Figura 6: Custos das seções T otimizadas, para diferentes valores de momento fletor e  $f_{ck}$

## 6 CONCLUSÕES

Neste estudo, foram otimizadas seções T de vigas de concreto armado, para diferentes valores de resistência do concreto e momento fletor. O dimensionamento das seções T foi implementado em uma planilha do Excel, juntamente com o problema de otimização formulado. As variáveis de projeto foram as dimensões da seção, a função objetivo foi a minimização dos custos, e as restrições foram imposições da norma técnica e limitações arquitetônicas. O problema foi solucionado por meio dos algoritmos evolucionários Busca Dispersa e Algoritmos Genéticos, contidos na ferramenta Solver.

Em relação aos algoritmos evolucionários, a Busca Dispersa apresentou melhor desempenho que os Algoritmos Genéticos, por resultar em menores valores de custo. Um

ajuste nas configurações do Solver, por meio do aumento da população e taxa de mutação, proporcionou uma ligeira melhoria nos resultados dos algoritmos evolucionários.

Como esperado, o dimensionamento otimizado das seções T conduz a situações de cálculo que refletem economia. As seções otimizadas, em sua maioria, foram dimensionadas para a situação de armadura simples, com o concreto da mesa e parte da nervura contribuindo na resistência ao esforço solicitante. Além disso, as seções otimizadas se encontram no domínio de deformação 3, que representa uma situação de grande aproveitamento do concreto e do aço.

A medida que o momento fletor atuante aumenta na seção, os custos também aumentam. Porém, existe pouca variação nos custos devido a mudança do valor da resistência do concreto à compressão.

Por fim, a metodologia apresentada para a otimização de seções T de vigas de concreto armado, pode ser facilmente aplicada em diferentes situações de dimensionamento de seções T. Assim, é possível obter dimensões ótimas para as vigas, trazendo economia nos custos totais da construção, e abandonar o uso de parâmetros e dimensões estimados.

## 7 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a *Frontline Systems* por concederem a versão educacional do *Analytic Solver Platform* (Versão 2016-R3) para a realização desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, NBR 6118*. Rio de Janeiro: ABNT, 2014, 238 p.
- Carvalho, R. C.; Filho, J. R. de F. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014. São Carlos: EdUFSCar, 2014.
- Chapra, C. C.; Canale, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- Frontline Systems. *Frontline Solvers*. Disponível em <<http://www.solver.com>>. Acesso em 23 de maio, 2017.
- Ferreira, C. C.; Barros, M. H. F. M.; Barros, A. F. M. Optimal design of reinforced concrete T-sections in bending. *Engineering Structures*, 25: 951-964, 2003.
- Hillier, F. S.; Lieberman, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. Porto Alegre: AMGH, 2010.
- Jasim, N. A; et al. Optimal Design of Reinforced Concrete T-Beam Floors. *Basrah Journal for Engineering Science*, 5:1-6, 2005.
- Linden, R. *Algoritmos genéticos*. Rio de Janeiro: Brasport, 2008.
- Martí, R.; Laguna, M.; Campos, V. *Scatter Search Vs. Genetic Algorithms: An Experimental Evaluation with Permutation Problems*. 2002. Disponível em <<http://www.uv.es/~rmarti/paper/docs/heur2.pdf>>. Acesso em 5 de junho, 2017.
- Martí, R.; Laguna, M.; Glover, F. Principles of scatter search. *European Journal of Operational Research*, 169: 359-372, 2006.
- Parreiras, R. O. *Algoritmos Evolucionários e Técnicas de Tomada de Decisão em Análise Multicritério*. 2006. 166 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Ragsdale, C. T. *Modelagem de planilha e análise de decisão*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Silva, A. B. C. e; Falcón, G. A. S.; Garcia, S. L. G. Dimensionamento ótimo de Vigas de



- Concreto Armado com Seção T. *Mecánica Computacional*, XXIX: 9217-9230, 2010.
- SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil. Caixa Econômica Federal, Maio, 2017.
- Sosa, N. G. M.; Galvão R. D.; Gandelman, D. A. Algoritmo de busca dispersa aplicado ao problema clássico de roteamento de veículos. *Pesquisa Operacional*, 27: 293-310, 2007.
- Sucupira, I. R. *Métodos Heurísticos Genéricos: Meta-heurísticas e hiper-heurística*. Universidade de São Paulo. 2004. Disponível em <<https://www.ime.usp.br/~igorrs/monografias/metahiper.pdf>>. Acesso em 5 de junho, 2017.
- Tliouine, B.; Fedghouche, F. *Optimal Design of Reinforced Concrete T-Beams under Ultimate Loads*. 2010. Disponível em <[http://www1.dem.ist.utl.pt/engopt2010/Book\\_and\\_CD/Papers\\_CD\\_Final\\_Version/pdf/01/01555-01.pdf](http://www1.dem.ist.utl.pt/engopt2010/Book_and_CD/Papers_CD_Final_Version/pdf/01/01555-01.pdf)>. Acesso em 5 de junho, 2017.
- Venkataraman, P. *Applied optimization with MATLAB programming*. New Jersey: Wiley, 2009.