

ANÁLISIS DINÁMICO DE ARCOS CIRCULARES DELGADOS POR EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADO

Samanta J. Escanes^a, Diana V. Bambill^{a,b}, Daniel H. Felix^a

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur,
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina,*

sescanes@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, dhfelix@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina*

Palabras Clave: Cuadratura Diferencial, Arcos Circulares, Frecuencias Naturales, Formas Modales.

Resumen. El comportamiento dinámico de arcos circulares delgados, es tema de interés de un gran número de investigaciones. En este trabajo se presenta un primer estudio utilizando el Método de Cuadratura Diferencial Generalizado (GDQM su sigla en inglés), que ha renovado su vigencia en presentaciones actuales.

Se analizan las posibilidades que este método permite. Los puntos de la malla son generados de dos diferentes maneras, una con un mallado regular más la inclusión de puntos- δ y otra con un mallado irregular, mediante los denominados puntos de Gauss-Lobatto-Chebyshev.

Se determinaron tanto frecuencias naturales como formas modales de los modos normales de vibración en el plano. En el sistema estructural analizado se consideraron los efectos de la inercia rotatoria así como también los de las deformaciones axiales del arco. Los arcos se consideraron elásticamente vinculados en los extremos, y se modelaron con ellos condiciones de borde clásicas.

1 INTRODUCCIÓN

En años recientes se ha incrementado el uso del Método de Cuadratura Diferencial Generalizado (GDQM su sigla en inglés), que consiste en discretizar el dominio en análisis en una serie de puntos, denominados puntos de malla o ponderación. El Método fue propuesto inicialmente por los conocidos autores R. Bellman y J. Casti, (Bellman and Casti 1971), y después de dos décadas de uso relativamente moderado, fue ampliamente difundido por Charles Bert, (Bert and Malik, 1996).

En medio de técnicas numéricas de resolución tan efectivas y poderosas como el método de elementos finitos por un lado o procedimientos analíticos de resolución por otro, el método de cuadratura diferencial muestra tener su espacio propio como alternativa de cálculo. La razón fundamental de acuerdo al criterio de reconocidos autores en la materia (Bert, 1994, Liu and Wu, 2001) parece radicar en el hecho de que comparándole con el de elementos finitos requiere un mínimo esfuerzo computacional. En el presente trabajo, se obtienen resultados que convergen rápidamente hacia la solución, utilizando una cantidad relativamente escasa de los mencionados puntos de malla. No obstante, teniendo en cuenta el actual estado del arte en la materia, la utilización parece ser más apropiada para resolver problemas estructurales de complejidad intermedia.

Actualmente se dispone de una extensa bibliografía que describe detalladamente el método, su evolución, sus diversas variantes, entre otros aspectos, que pueden hallarse tanto en presentaciones, publicaciones en revistas científicas, e inclusive en libros de texto.

El presente trabajo presenta el análisis de vibraciones naturales en el plano de arcos circulares delgados utilizando las características mencionadas anteriormente, del método de GDQM tanto para determinar frecuencias como formas modales.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

Los algoritmos se desarrollaron para ser aplicados a arcos circulares delgados de sección constante, con bordes elásticamente vinculados. En el presente estudio se usaron para resolver arcos vinculados con condiciones de vínculo clásicas: Articulado–Articulado y Empotrado–Empotrado.

El modelo analizado de arco circular, es el que se muestra en la Figura 1 con las distintas condiciones de borde. El centroide de una sección transversal genérica de arco queda ubicada por la coordenada angular θ , medida desde el extremo derecho (en sentido anti-horario) y por la coordenada radial a , constante en este caso particular. O bien, por la coordenada de longitud de arco, $s = a\theta$, medida a lo largo del eje centroidal del arco con origen en el extremo derecho. El parámetro θ_0 define la máxima amplitud de la coordenada angular θ . En tanto que los desplazamientos tangencial y radial de una sección genérica del eje del arco, se notan con v y w , respectivamente.

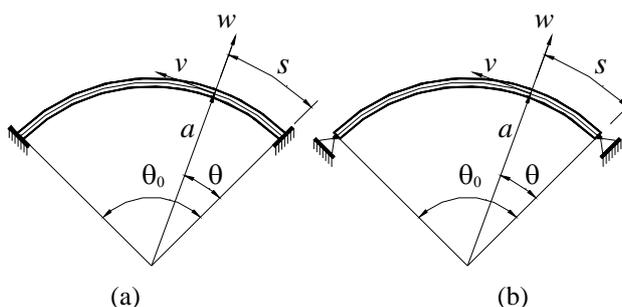


Figura 1: Arco: (a) Empotrado-Empotrado, (b) Articulado-Articulado.

3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El estudio se realizó con un modelo aplicable al análisis dinámico de arcos circulares delgados de sección constante. El sistema de ecuaciones gobernantes que se utilizó, es el propuesto por Federhofer, (Kang et al, 1995) que considera tanto la extensibilidad del eje del arco como el efecto de la inercia rotatoria. En este análisis no se incluyó el efecto de la deformación por corte.

Al considerar la extensibilidad del eje del arco, el desplazamiento radial w y el desplazamiento tangencial v que sufre cada sección son desplazamientos independientes. El sistema diferencial gobernante queda conformado por dos ecuaciones diferenciales con dos variables, y cuatro condiciones de borde para w y dos para v .

3.1 Sistema de ecuaciones gobernante

Para realizar el análisis matemático del problema se define la siguiente coordenada adimensional:

$$x = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (1)$$

que varía entre 0 y 1.

Considerando que el arco vibra en uno de sus modos normales y llamando $W = W(x)$ y $V = V(x)$ a las amplitudes de $w(x,t)$ y $v(x,t)$ respectivamente, el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el modelo propuesto es lineal, de cuarto orden y resulta de acuerdo a Federhofer:

$$W'''' + \left[2\theta_0^2 + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] W'' + \left[\theta_0^4 + \theta_0^2 \left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \right] W + \left[\left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] \theta_0 V' = 0 \quad (2a)$$

$$V'' + \left[\theta_0^2 \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] V + \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 \right] \theta_0 W' = 0 \quad (2b)$$

El símbolo ' denota un orden de derivada con respecto a la variable espacial x . $S = a\theta_0$ es la longitud máxima del eje del arco, r el radio de giro de la sección transversal, y λ el parámetro adimensional relacionado con la frecuencia circular de vibración del sistema en estudio p , cuya expresión es:

$$p = \frac{\lambda}{S^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (3)$$

E es el módulo de elasticidad del material, I el momento de inercia de la sección transversal de arco, y m es la masa por unidad de longitud.

Las condiciones de borde que se deben satisfacer en arcos Articulado-Articulado son:

$$V = W = W'' = 0 \Big|_{x=0} ; \quad V = W = W'' = 0 \Big|_{x=1} \quad (4a-f)$$

en el caso de arcos Empotrado- Empotrado las condiciones de borde son:

$$V = W = W' = 0 \Big|_{x=0} ; \quad V = W = W' = 0 \Big|_{x=1} \quad (5a-f)$$

4 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL

Básicamente, la aplicación del método de cuadratura diferencial requiere de los siguientes pasos básicos:

1. Discretizar el dominio, generando una malla de *puntos de prueba o nodos*.
2. Obtener los *coeficientes de peso* asociados a la malla de puntos generada.
3. Plantear las *ecuaciones análogas de cuadratura del sistema diferencial gobernante*.
4. Plantear las *ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde del sistema*.
5. Resolver del sistema lineal de ecuaciones resultante.

4.1 Malla de puntos

La discretización del dominio bajo análisis, consiste en generar una distribución convenientemente elegida de puntos sobre el eje del arco denominados *puntos de prueba o nodos*, que conforma la base del método. Esta distribución forma una malla regular de puntos, cuando se aplica la siguiente expresión :

$$x_i = \frac{i-2}{n-3} \quad \text{con } i = 3, 4, \dots, n-2 \quad (7a)$$

siendo n el número total de puntos de la malla.

Debido a que el GDQM impide plantear en un mismo punto las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde, resulta necesario colocar los dos primeros puntos en cada extremo bien próximos entre sí, definiendo la distancia entre dichos puntos mediante el parámetro δ . Con esto se puede lograr una mayor estabilidad numérica al incrementar el número de puntos del mallado y mejores condiciones de convergencia. En consecuencia, agregando las coordenadas adimensionales restantes al mallado regular se tiene:

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = \delta \quad ; \quad x_{n-1} = 1 - \delta \quad ; \quad x_n = 1 \quad (7b)$$

También se puede utilizar un mallado irregular de puntos del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu and Chen, 1999), que se genera mediante la siguiente expresión:

$$x_i = \frac{1 - \cos \left[(i-1) \pi / (n-1) \right]}{2} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

La Figura 2 muestra sobre el eje del arco, para el caso de un arco Empotrado-Empotrado: a) Una distribución regular de puntos de mallado con inclusión de puntos δ y b) Una distribución irregular de puntos.

Las expresiones (7a, b) y (8) generan una malla de puntos de coordenadas adimensionales para los que se calculan los coeficientes de peso. Las coordenadas de los puntos sobre el eje del arco en coordenadas polares, se determinaron mediante la aplicación de coordenada angular x , expresión (1), y radio igual a a .

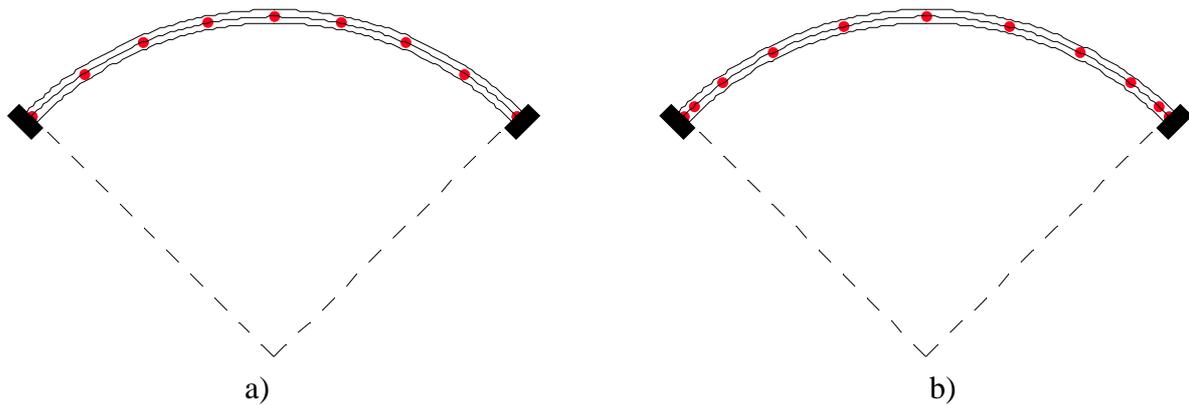


Figura 2: Distribución de puntos sobre el eje del arco: a) Regular, b) Irregular.

4.2 Reglas de cuadratura y coeficientes de peso

Las reglas de cuadratura diferencial, permiten expresar de manera sencilla, las derivadas de las variables independientes, W y V , mediante una combinación lineal de “coeficientes de peso”, (Bellman and Casti, 1971), en la forma:

$$V^{(q)}(x_i) = \left. \frac{d^q V}{dx^q} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} V_k, \quad W^{(q)}(x_i) = \left. \frac{d^q W}{dx^q} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(q)} W_k \quad (9a, b)$$

Los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (9) se determinan por medio de una serie de expresiones explícitas, (algunas de ellas recursivas), cuyo detalle puede verse en las referencias presentadas, por ej. (Bert and Malik, 1996). A continuación se presenta un resumen de las mismas.

- Se parte de la malla adimensional generada, (puntos de coordenadas x_i), y se calculan los siguientes polinomios:

$$\Pi(x_i) = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq i}}^n (x_i - x_v) \quad (10)$$

- En base a los polinomios de la expresión anterior se determinan los coeficientes correspondientes a las derivadas de primer orden ($q=1$):

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k) \Pi(x_k)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k \neq i, \text{ elementos fuera de la diagonal} \end{array} \quad (11a)$$

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^n A_{ik}^{(1)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k = i, \text{ elementos en la diagonal} \end{array} \quad (11b)$$

- Los términos correspondientes a derivadas de segundo orden y superiores, $q > 1$. son dados por la siguiente expresión recursiva (Bert and Malik, 1996).

$$A_{ik}^{(q)} = A_{ii}^{(q-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(q-1)}}{x_i - x_k} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k \neq i, \text{ elementos fuera de la diagonal} \end{array} \quad (12a)$$

$$A_{ii}^{(q)} = - \sum_{\substack{k=1 \\ \text{con } k \neq i}}^n A_{ik}^{(q)} \quad \begin{array}{l} \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n \\ \text{y } k = i, \text{ elementos en la diagonal} \end{array} \quad (12b)$$

4.3 Ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones diferenciales

Mediante la aplicación de las reglas de cuadratura a las ecuaciones (2a, b) se obtienen las ecuaciones diferenciales análogas de cuadratura siguientes (Kang et al, 1995):

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(4)} W_k + \left[2\theta_0^2 + \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} W_k + \left[\theta_0^4 + \theta_0^2 \left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \right] W_i + \left[\left(\frac{S}{r} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 \right] \theta_0 \sum_{k=1}^n A_{ik} V_k = 0 \quad (13a)$$

con $i = 3, 4, \dots, n-2$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(2)} V_k + \left[\lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^2 + \theta_0^2 \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 \right] V_i + \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{r}{S} \right)^4 \right] \theta_0 \sum_{k=1}^n A_{ik} W_k = 0 \quad (13b)$$

con $i = 2, 3, \dots, n-1$

4.4 Ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde

Las ecuaciones análogas de las condiciones de borde se obtienen a partir de las ecuaciones (4), (5) y (6) y de las reglas de cuadratura dadas en las expresiones (9).

De este modo se tiene para arcos Articulado-Articulado:

$$V_1 = W_1 = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n A_{1k}^{(2)} W_k = 0 \quad (14a)$$

$$V_n = W_n = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n A_{nk}^{(2)} W_k = 0 \quad (14b)$$

Para arcos Empotrado-Empotrado:

$$V_1 = W_1 = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n A_{1k}^{(1)} W_k = 0 \quad (15a)$$

$$V_n = W_n = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n A_{nk}^{(1)} W_k = 0 \quad (15b)$$

4.5 Sistema de ecuaciones lineales resultante

Mediante el proceso detallado previamente, se obtuvieron las ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones diferenciales gobernantes y de las condiciones de borde en cada caso. Ensamblando estas ecuaciones se obtuvo, para el problema analizado, el clásico sistema de autovalores para calcular los coeficientes de frecuencia naturales de vibración en el plano del arco y las correspondientes formas modales.

Finalmente, la representación de las componentes tangencial y radial del desplazamiento de

las formas modales $V(x)$ y $W(x)$, obtenidas para el modelo discreto, se completó interpolando el conjunto de valores obtenidos V_i y W_i para los puntos de la grilla, correspondientes a cada forma modal, con las siguientes funciones:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n V_i \times g_i(x) \quad ; \quad (16)$$

$$W(x) = \sum_{i=1}^n W_i \times g_i(x) \quad (17)$$

donde las $g_i(x)$ son funciones de interpolación de Lagrange, (Du et al, 1994), cuya expresión se transcribe a continuación:

$$g_i(x) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)}{(x - x_i) \times \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad (18)$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados corresponden a los coeficientes de frecuencia natural de vibración en el plano $\lambda = p S^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}$ de arcos delgados, tomando en consideración los efectos de la deformación axil, eje extensible, y de la inercia rotatoria, calculados por el método de cuadratura diferencial. Se resolvieron diferentes modelos, variando las condiciones de borde y la relación S/r . Se adoptó en todos los modelos resueltos una amplitud de arco de $\theta_0 = 90^\circ$.

El mallado de puntos de la grilla se generó con una distribución regular, ecuación (7a), tal como la que se observa en la Figura 2a.

El parámetro que define por la relación entre la longitud del arco S y el radio de giro de la sección transversal r , se varió en un amplio rango, desde $S/r = 25$ ó $23,56$ hasta $S/r \rightarrow \infty$.

5.1 Comparación de resultados

En una primera parte se realizaron comparaciones de los valores de frecuencia calculados, con los obtenidos por otros autores para arcos circulares delgados con vinculación en los extremos, Empotrado-Empotrado y Articulado-Articulado.

Las Tablas 1 y 2 muestran ambos casos, en la segunda columna están los valores obtenidos por Austin and Veletsos, (Veletsos et al, 1972), los que puede observarse tiene una excelente concordancia con los de este trabajo, así como con los obtenidos por (Kang et al, 1995), tercera columna, quienes utilizan el mismo método de resolución, pero con una diferente distribución de puntos de mallado en la grilla.

La convergencia del procedimiento de cuadratura diferencial en el cálculo de $\lambda = \lambda_1$, se obtuvo con 13 puntos en la grilla, $n=13$, tanto en el modelo Empotrado-Empotrado como en el Articulado-Articulado y un valor δ . El valor de $\delta = 0,00001$, se adoptó de acuerdo a lo sugerido por (Kang et al, 1995) y se corroboró para cada uno de los cálculos de frecuencia que se efectuaron y cuyos resultados se presentan.

S/r	Referencias		Presente Trabajo
	Austin and Veletsos	Kang et al	
25	37,81	37,815	37,813
50	54,98	54,973	54,985
100	55,63	55,615	55,626
150	55,74	55,732	55,742
250	55,80	55,776	55,801
350	55,83	55,812	55,817
500	55,84	55,812	55,826

Tabla 1: Comparación de valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2}$ para un arco circular delgado Empotrado-Empotrado, considerando deformaciones axiales e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $n = 13$, $\delta = 0,00001$.

S/r	Referencias		Presente Trabajo
	Austin and Veletsos	Kang et al	
23,56	32,55	33,542	32,5577
47,12	33,60	33,601	33,6047
94,25	33,87	33,867	33,8739
141,4	33,92	33,926	33,9241
251,3	33,95	33,956	33,9515
377	33,96	33,956	33,9586

Tabla 2: de valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\lambda = p S^2 (m/EI)^{1/2}$ para un arco circular delgado Articulado-Articulado, considerando deformaciones axiales e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $n = 13$, $\delta = 0,00001$.

5.2 Análisis de convergencia

El objetivo inicial del presente trabajo consistió en realizar un exhaustivo análisis de convergencia de las primeras seis frecuencias naturales de vibración en el plano del arco de cada uno de los modelos planteados. Dicho análisis se consideró justificado ya que el método carece hasta el presente de demostraciones analíticas de convergencia.

La relación entre la longitud del arco y el radio de giro de la sección del arco es uno de los parámetros que se varió para el análisis.

La Tabla 3 presenta los primeros dos coeficientes de frecuencia natural, λ_1 y λ_2 , del arco circular delgado Empotrado - Empotrado, calculados con distinta cantidad de puntos en el mallado de la grilla. Se observa que en general para $n = 15$, los coeficientes tienden a estabilizarse en un valor que se mantiene al incrementar n , por lo que ya no resulta necesario tomar mayor cantidad de puntos. En la última columna se transcriben los valores calculados por [Tüfekçi y Arpacı, 1998](#).

S/r	n						Ref.	
	9	11.	13	15	17	19	Tüfekçi et al.	
λ_1	25	37,807	37,814	37,813	37,813	37,813	37,813	--
	50	55,884	54,900	54,985	54,979	54,979	54,979	--
	100	56,556	55,538	55,626	55,619	55,620	55,620	--
	150	56,678	55,653	55,742	55,735	55,736	55,736	55,734
	250	56,739	55,712	55,801	55,794	55,795	55,795	--
	350	56,756	55,728	55,817	55,811	55,811	55,811	--
	500	56,765	55,737	55,826	55,819	55,819	55,819	--
	∞	56,774	55,744	55,834	55,827	55,829	55,828	--
λ_2	25	52,783	52,003	52,070	52,065	52,066	52,066	--
	50	65,012	64,752	64,772	64,771	64,771	64,771	--
	100	99,517	96,503	97,002	96,945	96,949	96,948	--
	150	101,502	103,022	103,294	103,227	103,233	103,233	103,6
	250	97,395	106,760	105,584	105,616	105,617	105,617	--
	350	95,189	108,708	106,027	106,190	106,182	106,183	--
	500	93,717	110,575	106,147	106,490	106,468	106,469	--
	∞	92,052	114,300	105,924	106,826	106,727	106,734	--

Tabla 3: Análisis de convergencia de los coeficientes λ_1 y λ_2 de un arco circular delgado Empotrado-Empotrado, considerando deformación axil e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0,00001$.

Se observa que para relaciones de S/r del orden de 100 o mayores, la primera frecuencia natural prácticamente no varía. Algo similar ocurre con el segundo coeficiente λ_2 para relaciones iguales o mayores a 150.

La Tabla 4 contiene los coeficientes de la tercera y cuarta frecuencia natural, λ_3 y λ_4 para el arco Empotrado-Empotrado. Se observa que es necesario utilizar una malla con mayor cantidad de puntos en la grilla ($n = 19$) para lograr la estabilidad numérica de los coeficientes, si se lo compara con el cálculo de las dos primeras frecuencias.

S/r	n						Ref.	
	11	13	15	17	19	21	Tüfekçi et al.	
λ_3	25	86,056	86,131	86,123	86,123	86,123	86,123	--
	50	118,278	120,418	120,129	120,153	120,152	120,152	--
	100	155,332	155,916	155,742	155,766	155,763	155,763	--
	150	218,354	186,013	193,030	191,625	191,790	191,774	191,85
	250	403,563	186,756	193,881	192,449	192,618	192,601	--
	350	248,830	186,954	194,104	192,666	192,836	192,819	--
	500	220,942	187,058	194,221	192,780	192,950	192,933	--
	∞	192,051	187,156	194,332	192,888	193,058	193,041	--
λ_4	25	107,829	110,027	109,753	109,775	109,774	109,774	--
	50	163,426	159,994	160,848	160,728	160,741	160,740	--
	100	344,579	184,396	191,124	189,790	189,947	189,932	--
	150	516,291	211,146	212,884	212,648	212,674	212,672	220,30
	250	858,726	259,895	278,786	272,035	273,036	272,904	--
	350	410,284	278,337	284,224	279,769	280,697	280,554	--
	500	573,846	320,144	280,546	283,007	283,100	283,037	--
	∞	-	-	262,287	294,545	293,603	284,987	--

Tabla 4: Análisis de convergencia de los coeficientes λ_3 y λ_4 de un arco circular delgado Empotrado-Empotrado, considerando deformación axil e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0,00001$.

La relación S/r afecta al coeficiente de la tercera frecuencia natural λ_3 hasta una relación del orden de 150, para valores mayores el coeficiente prácticamente mantiene su valor. En tanto que la cuarta frecuencia resulta ser más sensible a la variación de esa relación.

La Tabla 5 presenta los coeficientes de frecuencia natural λ_5 y λ_6 . La tendencia indicada en la tabla anterior, aumentar el número de puntos del mallado de la grilla para lograr estabilidad numérica en los valores, se manifiesta también en estos casos y es necesario llegar a n del orden de 25. Para estas frecuencias la relación S/r incide sensiblemente en los valores de los coeficientes tal como puede observarse en la Tabla.

S/r	n						<i>Ref.</i>	
	17	19	21	23	25	27	Tüfekçi et al.	
λ_5	25	160,009	160,009	160,009	160,009	160,009	160,009	--
	50	198,587	198,791	198,770	198,771	198,771	198,771	--
	100	291,085	293,754	293,382	293,421	293,417	293,417	--
	150	300,708	303,351	302,964	303,006	303,002	303,002	305,1
	250	380,177	380,687	380,536	380,561	380,558	380,558	--
	350	517,823	401,151	410,382	408,584	408,817	408,791	--
	500	769,571	401,659	410,948	409,136	409,371	409,345	--
	∞	405,357	402,128	411,463	409,643	409,880	409,852	--
λ_6	25	174,969	175,163	175,144	175,145	175,145	175,145	--
	50	276,225	278,598	278,278	278,310	278,308	278,308	--
	100	337,909	336,915	337,116	337,088	337,091	337,091	--
	150	512,435	394,756	402,722	401,219	401,413	401,392	--
	250	863,692	400,125	409,225	407,457	407,687	407,661	--
	350	1211,30	729,280	490,637	488,472	488,791	488,752	--
	500	1733,03	509,446	541,032	530,654	532,187	531,966	--
	∞	-	-	512,254	552,887	540,113	541,792	--

Tabla 5: Análisis de convergencia de los coeficientes λ_5 y λ_6 de un arco circular delgado Empotrado-Empotrado, considerando deformación axil e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0,00001$.

La tres Tablas siguientes, 6, 7 y 8, contienen los primeros seis coeficientes de frecuencia natural del arco delgado Articulado-Articulado. Los valores se comparan, con valores obtenidos por los autores (Karami et al, 2004; Liu et al., 2001).

Para el cálculo de algunos de los valores presentados en las tablas, correspondientes a la relación $S/r = 23,56$, se hizo necesario aumentar el valor de δ a 0,0001 para evitar inestabilidades numéricas, esos casos se indican con un “*” a la derecha del coeficiente.

También para los arcos Articulado-Articulado, como para los Empotrado-Empotrado, se observa que se requiere adoptar mallados con mayor cantidad de puntos en la grilla, para lograr los resultados de las frecuencias superiores.

S/r	n						<i>Ref.</i>		
	9	11	13	15	17	19	Karami et al.	Liu et al.	
λ_1	23,56	33,245*	32,506*	32,558*	32,555*	32,555*	32,555*	32,547	--
	47,12	34,376	33,547	33,605	33,602	33,602	33,602	33,601	--
	94,25	34,662	34,815	33,874	33,871	33,871	33,871	33,870	--
	141,4	34,715	33,865	33,924	33,921	33,921	33,921	--	--
	251,3	34,744	33,892	33,952	33,949	33,949	33,949	--	--
	377	34,751	33,899	33,959	33,956	33,956	33,956	33,955	--
	∞	34,757	33,904	33,964	33,962	33,961	33,967	--	33,94
λ_2	23,56	33,262*	33,296*	33,293*	33,293*	33,293*	33,293*	33,294	--
	47,12	61,920	61,553	61,589	61,587	61,587	61,587	61,587	--
	94,25	79,856	76,969	77,550	77,483	77,487	77,487	77,486	--
	141,4	76,168	78,898	79,051	79,004	79,008	79,008	--	--
	251,3	70,246	81,130	79,609	79,677	79,676	79,676	--	--
	377	67,682	83,058	79,621	79,843	79,832	79,833	79,831	--
	∞	65,039	88,600	79,164	80,033	79,949	79,955	--	79,95

Tabla 6: Análisis de convergencia de los coeficientes λ_1 y λ_2 de un arco circular delgado Articulado-Articulado, considerando deformación axil e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0,00001$.

* Calculado con $\delta = 0,0001$.

La primera frecuencia es 32,921 para la relación S/r de 23,56, y varía a 33,967 para el arco de $S/r \rightarrow \infty$. Un comportamiento similar al del arco Empotrado-Empotrado se observa para las frecuencias de este modelo.

S/r	n						<i>Ref.</i>	
	11	13	15	17	19	21	Karami et al	
λ_3	23,56	77,992*	79,724*	79,541*	79,554*	79,553*	79,553*	79,536
	47,12	87,816	89,764	89,534	89,551	89,550	89,550	89,549
	94,25	141,158	143,220	142,697	142,761	142,755	142,756	142,76
	141,4	206,175	145,102	152,687	151,267	151,415	151,403	--
	251,3	378,993	145,567	153,233	151,795	151,945	151,932	--
	377	186,449	145,686	153,371	151,929	152,079	152,067	152,06
	∞	140,770	145,780	153,481	152,036	152,186	152,173	--
λ_4	23,56	80,382*	80,542*	80,521*	80,523*	80,523*	80,523*	80,523
	47,12	155,441	137,842	142,426	141,703	141,778	141,772	141,77
	94,25	323,651	144,231	151,643	150,263	150,406	150,395	150,39
	141,4	487,120	200,056	203,034	202,698	202,742	202,738	--
	251,3	866,475	221,118	242,518	233,772	234,997	234,837	--
	377	390,779	244,147	238,384	236,291	236,970	236,856	236,86
	∞	-	-	213,768	249,994	236,684	238,133	--

Tabla 7: Análisis de convergencia de los coeficientes λ_3 y λ_4 de un arco circular delgado Articulado-Articulado, considerando deformación axil e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0,00001$.

* Calculado con $\delta = 0,0001$.

S/r	n						Ref.	
	17	19	21	23	25	27	Karami et al.	
	23,56	136,846*	136,999*	136,986*	136,987*	136,987*	136,987*	136,96
	47,12	168,755	168,888	168,875	168,876	168,876	168,876	168,88
	94,25	239,028	241,594	241,265	241,296	241,294	241,294	241,29
λ_5	141,4	249,604	252,364	251,987	252,024	252,021	252,022	--
	251,3	377,870	339,773	349,963	348,042	348,271	348,248	--
	377	565,971	340,430	350,711	348,769	349,001	348,977	348,97
	∞	330,119	340,940	351,286	349,329	349,565	349,541	--
	23,56	150,842*	150,841*	150,841*	150,841*	150,841*	150,841*	150,84
	47,12	227,786	230,113	229,821	229,848	229,846	229,846	229,84
	94,25	320,286	316,356	317,533	317,380	317,398	317,396	317,39
λ_6	141,4	486,270	336,877	346,455	344,675	344,887	344,866	--
	251,3	869,881	380,922	379,838	379,986	379,966	379,968	--
	377	1307,95	438,973	477,022	464,804	466,410	466,196	466,21
	∞	-	-	442,432	489,194	473,276	475,124	--

Tabla 8: Análisis de convergencia de los coeficientes λ_5 y λ_6 de un arco circular delgado Articulado-Articulado, considerando deformación axil e inercia rotatoria. $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0,00001$.

* Calculado con $\delta = 0,0001$.

Formas modales

A continuación se muestran figuras que contienen las formas modales de las primeras seis frecuencias naturales de vibración para los arcos Empotrado-Empotrado y Articulado-Articulado. Se han graficado por separado las componentes radial W y tangencial V de cada forma modal.

Las primeras cuatro figuras corresponden a la componente radial W de la forma modal del arco Empotrado-Empotrado para distintas relaciones S/r , Figuras 3 a 6, y las cuatro figuras siguientes a la componente tangencial V de las formas modales para las mismas relaciones S/r , Figuras 7 a 10. Según se observa las formas modales son notoriamente influenciadas por la relación S/r del arco.

Las Figuras 11 a 18 muestran las formas modales obtenidas para el arco Articulado-Articulado. También en este caso se puede observar cómo la relación S/r afecta las formas modales.

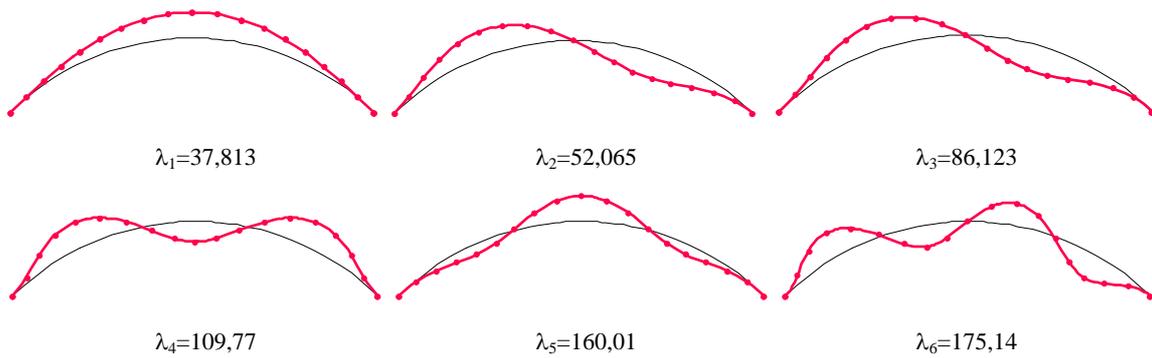


Figura 3: Componente radial de las seis primeras formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 25$

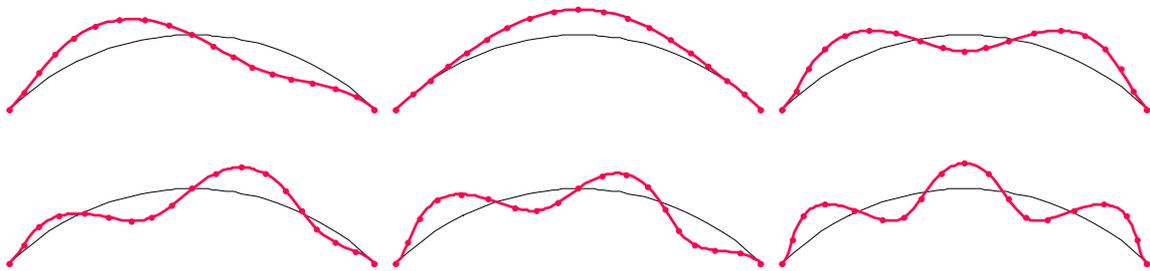


Figura 4: Componente radial de las seis primeras formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 50$

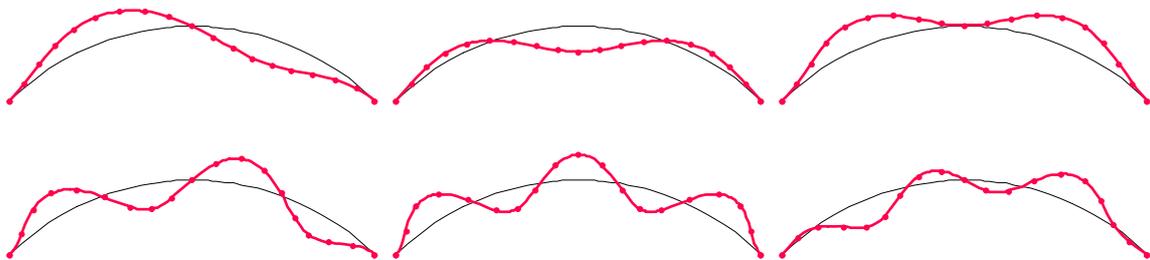


Figura 5: Componente radial de las primeras seis formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 100$

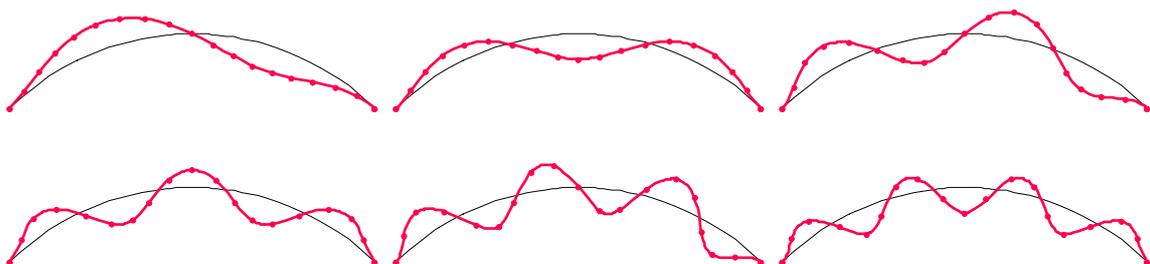


Figura 6: Componente radial de las primeras seis formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 500$

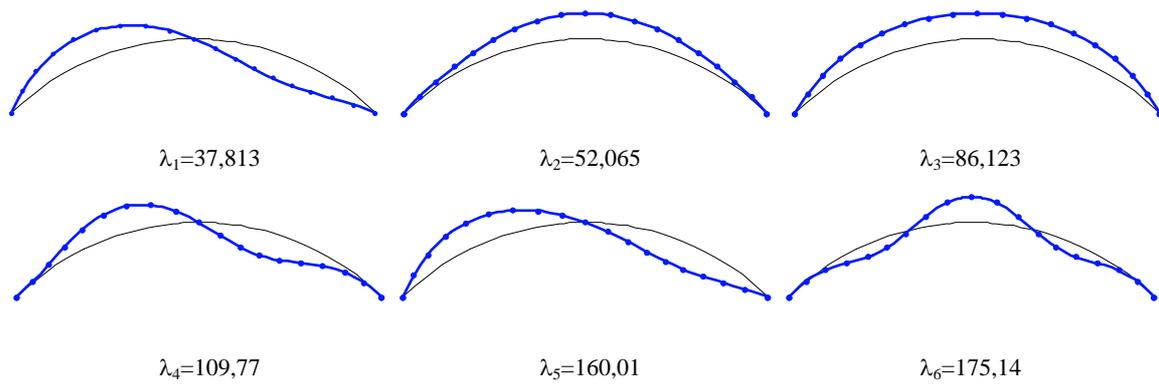


Figura 7: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 25$

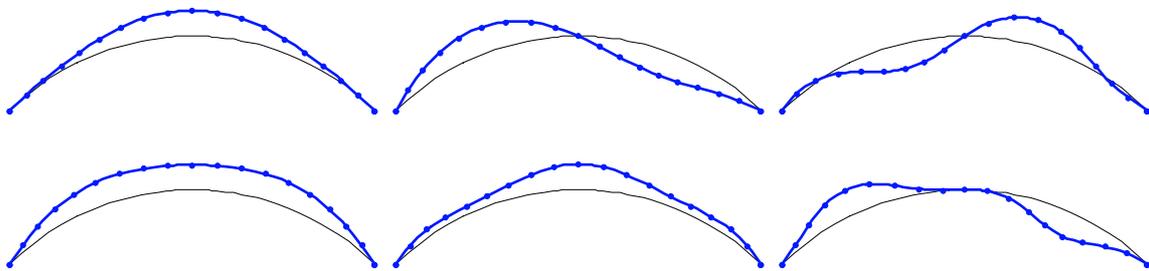


Figura 8: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 50$

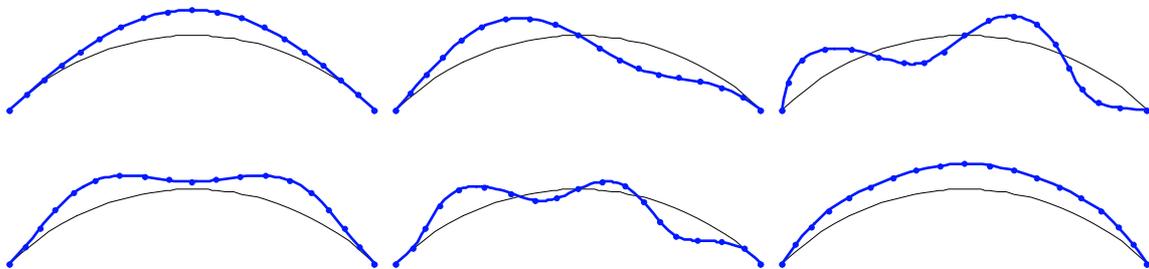


Figura 9: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 100$

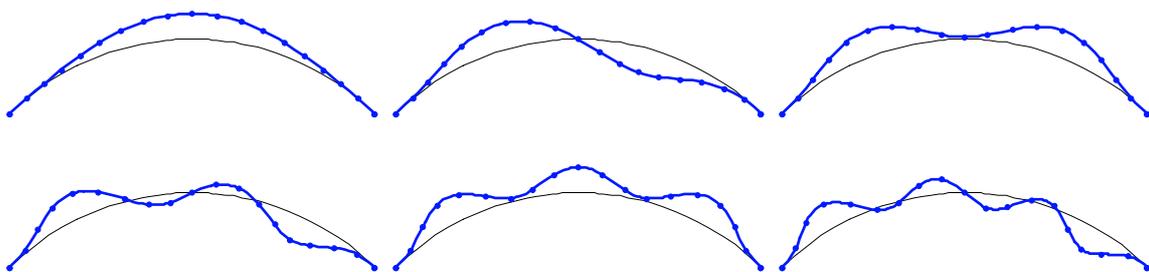


Figura 10: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Empotrado-Empotrado. $S/r = 500$

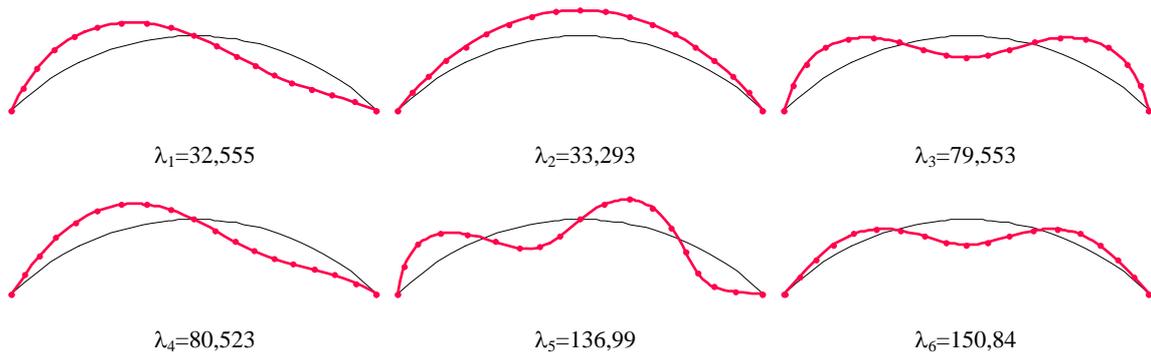


Figura 11: Componente radial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 23,56$

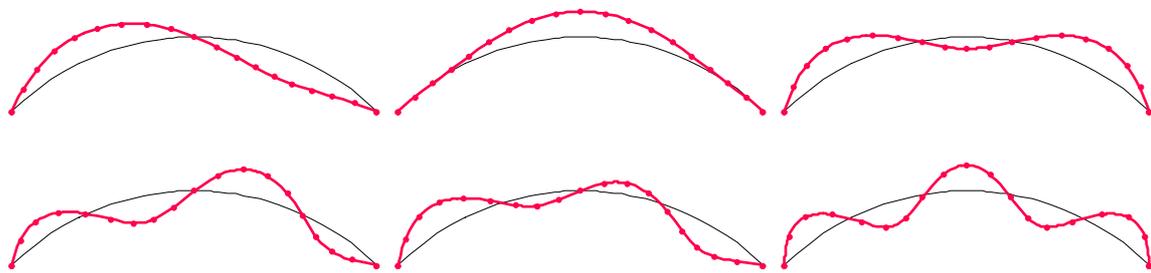


Figura 12: Componente radial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 47,12$

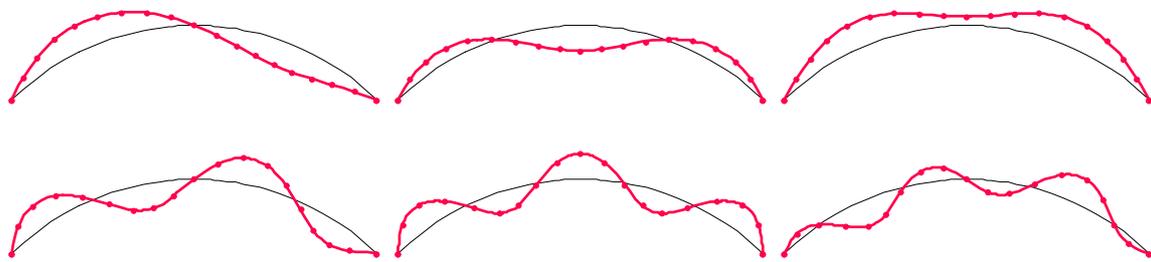


Figura 13: Componente radial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 94,25$

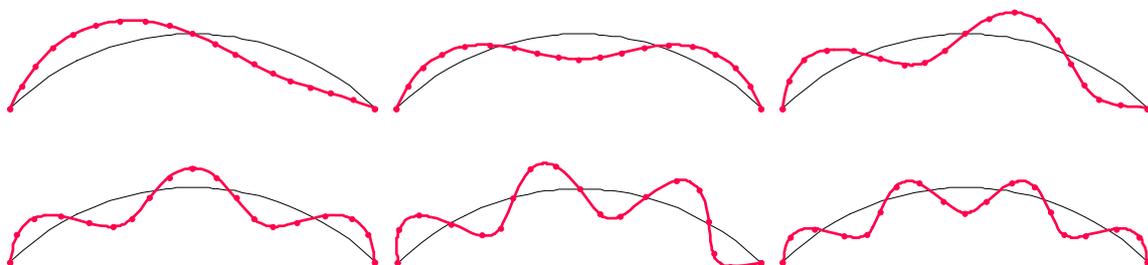


Figura 14: Componente radial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 377$

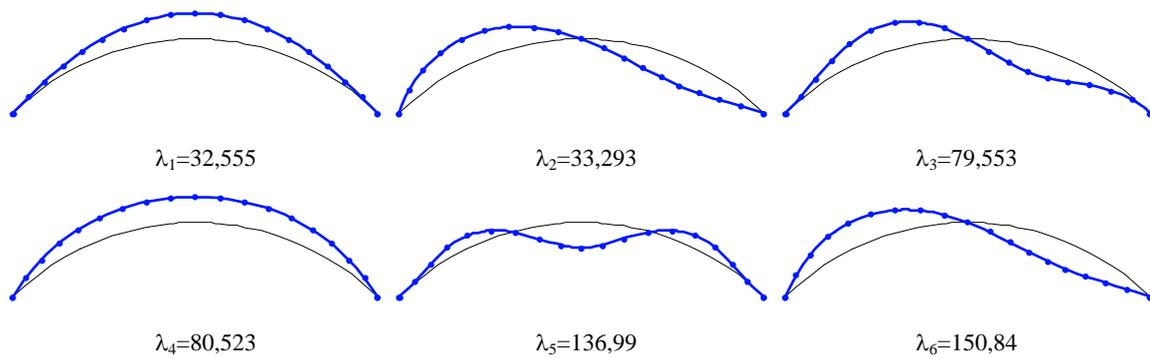


Figura 15: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 23,56$

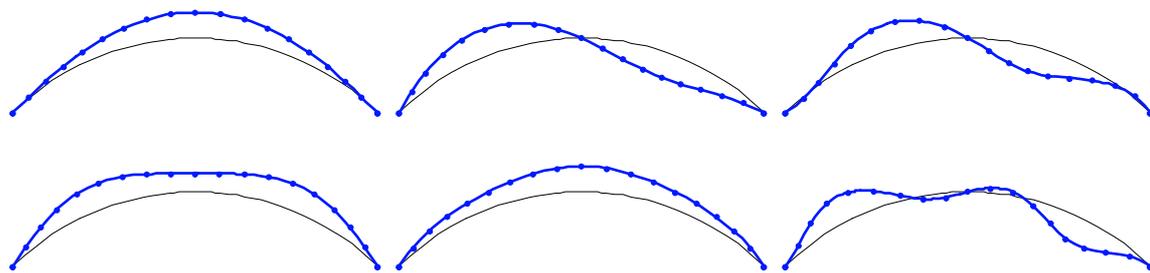


Figura 16: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 47,12$

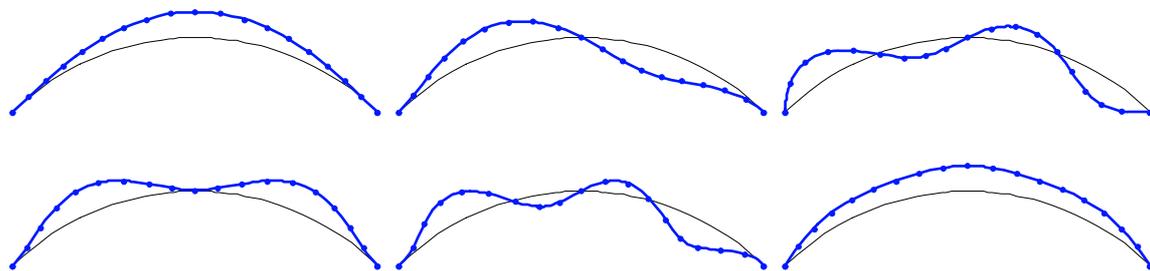


Figura 17: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 94,25$

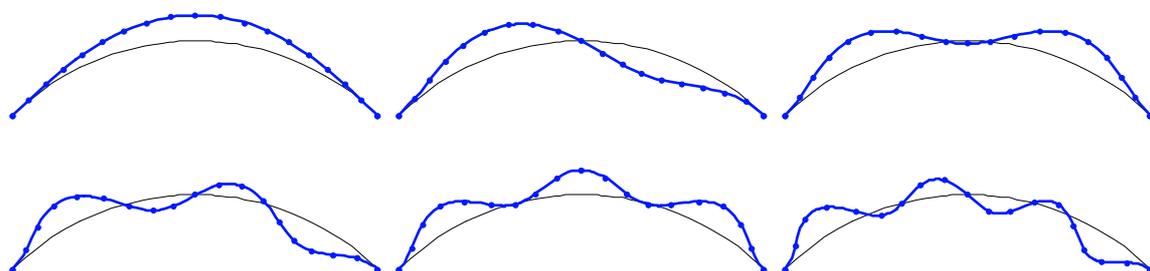


Figura 18: Componente tangencial de las primeras seis formas modales del arco Articulado-Articulado. $S/r = 377$

6 CONCLUSIONES

Los estudios de convergencia realizados para el análisis de arcos propuesto, variando el número de puntos de la malla ponen en manifiesto que la convergencia de resultados es muy rápida (con relativamente pocos puntos).

Se observó particularmente que se requiere menor número de puntos de malla en la

determinación de los coeficientes de frecuencia más bajos.

Se destaca que los resultados se obtienen con un mínimo esfuerzo computacional aún en el caso de generar la malla de un número elevado de puntos.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, en el Departamento de Ingeniería y por el programa de Investigación y Desarrollo del CONICET.

Los autores desean manifestar su agradecimiento al Dr. P. A. A. Laura por su asesoramiento y consejo.

REFERENCIAS

- W. J. Austin y A. S. Veletsos, Free vibration of arches flexible in shear. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE* 99, 735-753, 1973.
- R. Bellman y J. Casti. Differential quadrature and long-term integration. *J. Math. Anal. App.*, 34:235-238, 1971.
- C. W. Bert, X. Wang y A. G. Striz. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102:11-24, 1994.
- C. W. Bert y M. Malik. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1-28, 1996.
- H. Du, M. K. Lim y R. M. Lin. Application of generalized differential quadrature to vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), 279-293, 1995.
- R. H. Gutiérrez, P. A. A. Laura y R. E. Rossi, R. Bertero y A. Villaggi. In-plane vibrations of non-circular arcs of non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 129:181-200, 1989.
- R. H. Gutiérrez, P. A. A. Laura, y R. E. Rossi. The method of differential quadrature and its application to the approximate solution of ocean engineering problems. *Ocean Engineering*, 21(1):57-66, 1994.
- R. H. Gutiérrez y P. A. A. Laura. Vibration of non-uniform rings studied by means of quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 185: 239-257, 1995.
- K. J. Kang, C. W. Bert y A. G. Striz. Vibration and buckling analysis of circular arches using DQM. *Computers & Structures*, 60 (1):49-57, 1996.
- G. Karami y P. Malekzadeh. In-plane vibration analysis of circular arches with varying cross-sections using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 274:239-257, 2004.
- I. A. Karnovsky y O. I. Lebed. *Non-classical Vibrations of Arches and Beams*. Mc Graw-Hill Engineering Reference. 2004.
- G. R. Liu y T. Y. Wu. In-plane vibration analyses of circular arches by the generalized differential quadrature rule. *International Journal of Mechanical Science*, 43:2597-2611, 2001.
- C. Shu y W. Chen. On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239-257, 1999.
- A. G. Striz, X. Wang y C. W. Bert. Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111:85-94, 1995.
- E. Tüfekçi, y A. Arpacı. Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and*

Vibration, 209(5):845-856, 1998.

A. S. Veletsos, W. J. Austin, C. A. L. Pereira y S. J. Wung. Free in-plane vibration of circular arches. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE* 98, 311-329, 1972.

E. Viola, E. Artioli, y M. Dilella. Analytical and differential quadrature results for vibration analysis of damaged circular arches. *Journal of Sound and Vibration*, 288:887-906, 2005.

J. S. Wu y L. K. Chiang. A new approach for free vibration analysis of arches with effects of shear deformation and rotatory inertia considered. *Journal of Sound and Vibration*, 277:49-71, 2004.