

## APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN BASADA EN BONDS DE LA TEORÍA PERIDINÁMICA A LA MECÁNICA DE FRACTURA

Néstor O. Rossi Cabral<sup>a</sup>, María A. Invaldi<sup>a</sup>, Bruno Uberti<sup>a</sup>, Ricardo Barrios D’Ambra<sup>a</sup> e  
Ignacio Iturrioz<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste, Las Heras 727, 3500 Resistencia,  
Argentina, nrossicabral@gmail.com, <http://ing.unne.edu.ar/mecap/>

<sup>b</sup>Grupo de Mecánica Aplicada, Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Sarmiento Leite 425,  
90050170 Porto Alegre, Brasil, ignacio@mecanica.ufrgs.br, <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br/>

**Palabras Clave:** Teoría peridinámica, mecánica de fractura, tenacidad.

**Resumen.** El estudio de estructuras que presentan fisuras y la respuesta que brindan los materiales en estas circunstancias se puede realizar mediante los fundamentos que brinda la mecánica de fractura. La misma cuantifica la combinación crítica de tres variables: la tensión aplicada, la tenacidad a la fractura y el tamaño del defecto. La tenacidad es la propiedad del material que caracteriza el comportamiento ante la falla y su valor es medido con los denominados parámetros fractomecánicos, por lo que resulta fundamental para el diseño contra la fractura poder determinarlos. Dos de los parámetros fractomecánicos más utilizados son la energía específica de fractura y el factor de intensidad de tensiones. La teoría peridinámica es una reformulación de la descripción matemática básica de la mecánica del continuo en la cual se utilizan las mismas ecuaciones exista o no una discontinuidad en el cuerpo ya que reemplaza la divergencia del tensor de tensiones por ecuaciones integrales en la ecuación de movimiento. Con el objetivo de explorar sus potencialidades, en este trabajo se aborda la aplicación de la teoría peridinámica para el cálculo de parámetros fractomecánicos estáticos, además del modelado de la propagación inestable de fisuras y el mapeo de la redistribución de la energía de deformación debido a la presencia de discontinuidades. También se propone una nueva ley constitutiva del material con el propósito de lograr una mejora del comportamiento simulado. Se comparan los resultados obtenidos con los brindados por la bibliografía y con los logrados por otros autores con otros métodos para la validación de la metodología implementada y se discuten sus ventajas e inconvenientes.

## 1 INTRODUCCIÓN

La predicción de la iniciación de fisuras y su crecimiento en los materiales es todavía un desafío para la ingeniería. Existen actualmente concepciones de diseño basadas en los principios que brinda la mecánica de fractura, donde se evalúa si la tenacidad de los materiales, medida por los parámetros fractomecánicos, alcanza valores críticos que implican la propagación de la falla.

El método de los elementos finitos (FEM) es la principal herramienta utilizada dentro de la mecánica del continuo clásica presentando una probada aptitud para determinar campos tensiones y deformaciones y para el modelado de geometrías y condiciones de carga complejas. Sin embargo, la hipótesis de continuidad del campo de deformaciones representa una limitación para la estimación de procesos de falla en los que intervienen superficies de fisuras.

Es por esto que para el tratamiento de la mecánica de fractura lineal elástica (LEFM) se necesitan elementos especiales dentro del FEM para capturar correctamente el comportamiento del material en presencia de una fisura que complejizan el modelo. Se pueden mencionar los elementos de zona cohesiva (CZE), propuestos por [Hillerborg et al. \(1976\)](#) para modo I de fractura y [Xu y Needleman \(1994\)](#) para un modo de fractura mixto, y el método de elementos finitos extendido (XFEM), introducidos por [Belytschko y Black \(1999\)](#) y [Moes et al. \(1999\)](#).

La inclusión de elementos especiales con ciertos inconvenientes (como ser en el caso de los CZE la dependencia del mallado) sumado a las limitaciones propias de la teoría, como se mencionó previamente, dificulta el cálculo preciso del factor de intensidad de tensiones (FIT) y de la tasa de energía liberada como parámetros fractomecánicos más relevantes.

Como técnica alternativa para la obtención de dichos parámetros, diversos trabajos han mostrado que el método de los elementos discretos con barras (MED) logra excelentes resultados. [Kosteski et al. \(2008\)](#) evalúan el FIT estático y dinámico de una placa en dos dimensiones con una fisura pasante según distintas metodologías, mientras que [Kosteski et al. \(2009\)](#) extienden las técnicas implementadas a geometrías más complejas y para distintos estados de carga, además de aplicarlas en cuerpos de tres dimensiones. También [Kosteski et al. \(2012\)](#) utilizan exitosamente el MED para la obtención de configuraciones de rotura, detección de velocidades de propagación de fisuras y mapeo de tensiones durante el proceso de falla.

En el caso de modelos no locales del continuo, el estado de una partícula depende de los puntos materiales dentro de una región de radio finito, el cual en determinados casos puede ser asociado a distancias características como el tamaño de los agregados en un mortero, el tamaño los poros en el suelo o el tamaño medio de las astillas de un aglomerado de madera.

La teoría peridinámica (PD), propuesta originalmente por [Silling \(2000\)](#) y generalizada luego por [Silling et al. \(2007\)](#), consiste en una teoría no local en la cual las derivadas en el espacio de la mecánica del continuo se reemplazan por integrales de funciones de respuesta en términos de desplazamientos, logrando un modelo simple con mayor aptitud para la predicción de iniciación y crecimiento de fisuras al ser las integrales definidas en las discontinuidades.

Esta teoría ha sido implementada en diversos estudios entre los cuales se puede mencionar las simulaciones del experimento de Kalthoff-Winkler realizadas por [Silling et al. \(2003\)](#), simulaciones de daño por impacto efectuadas por [Silling y Askari \(2004\)](#), la captura del fenómeno de branching de las fisuras por [Ha y Bobaru \(2011\)](#), la determinación de la velocidad de propagación de una fisura dinámica por [Bobaru y Hu \(2012\)](#) y la realización de

diversos problemas benchmark llevados a cabo por Madenci y Oterkus (2014) donde se evalúan las deformaciones de cuerpos isotrópicos y laminados y cuerpos con diferentes configuraciones de fisuras sometidos a estados de cargas diversos, además de problemas de impacto, comparando en todos los casos con resultados de FEM.

El éxito de la aplicación teoría PD al fenómeno de fractura para la obtención de diversos resultados motivó su utilización en este trabajo para la determinación de los parámetros fractomecánicos estáticos como ser el FIT y la tasa de energía liberada. Se muestra también la capacidad del método para la medición de energías y se ilustran el mapeo de la energía de deformación dentro del cuerpo estudiado y los patrones de fisuración logrados. Finalmente se discute la posibilidad de implementar una nueva ley constitutiva con los beneficios que esta implicaría y se presentan las conclusiones del trabajo.

## 2 TEORÍA PERIDINÁMICA

Estando un cuerpo constituido por partículas materiales, la teoría peridinámica considera que dichas partículas se relacionan entre sí a través de interacciones directas denominadas ligaduras o *bonds*. Estas interacciones ocurren entre puntos dentro de un entorno definido por un radio  $\delta$  llamado horizonte y no únicamente entre puntos vecinos como en una teoría local.

Como se esquematiza en la Figura 1, cada partícula  $x$  se vincula a través de *bonds* a las partículas  $x'$  que se encuentran a una distancia menor al horizonte, llamándose a este conjunto de partículas familia de  $x$  o  $H_x$ .

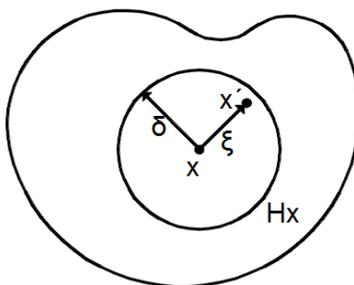


Figura 1: Interacción de puntos materiales dentro del horizonte

La ecuación de movimiento que utiliza la teoría PD (ver Ec.(1)) se mantiene válida exista o no una discontinuidad en el cuerpo, ya que reemplaza la divergencia del tensor de tensiones por ecuaciones integrales:

$$\rho \ddot{u}(x, t) = \int_{H_x} f(u(x', t) - u(x, t), x' - x) dH_x + b(x, t) \quad (1)$$

En la que  $f$  representa la fuerza que ejerce una partícula sobre otra (en unidades de fuerza por unidad de volumen<sup>2</sup>), denominada *pairwise force function*,  $\rho$  es la densidad y  $b$  es el campo de fuerzas de masa. La integral se define dentro de la familia de cada partícula.

Según se observa en la Figura 1, el vector de posición relativa entre dos partículas en la configuración inicial o no deformada se define como

$$\xi = x' - x \quad (2)$$

Mientras que el vector de desplazamientos relativos en una configuración deformada es:

$$\eta = u(x', t) - u(x, t) \quad (3)$$

Se dice que un material es micro-elástico (Silling, 2000) si es posible derivar la función  $f$  de un micro-potencial  $w$ :

$$f(\eta, \xi) = \frac{\partial w}{\partial \eta}(\eta, \xi) \quad (4)$$

El micro-potencial es la energía en un bond individual (en unidades de energía por unidad de volumen<sup>2</sup>). Por lo que la densidad de energía de deformación (energía por unidad de volumen) en un punto de cuerpo se obtiene de:

$$W(x) = \frac{1}{2} \int_{H_x} w(\eta, \xi) dH_x \quad (5)$$

El factor  $1/2$  que precede a la integral se debe a que a cada uno de los puntos conectados por el bond le corresponde solo la mitad de la energía de éste. Un micro-potencial lineal se obtiene como:

$$w = \frac{c s^2 |\xi|}{2} \quad (6)$$

Siendo  $s$  la deformación específica del *bond*, es decir:

$$s = \frac{|\xi + \eta| - |\xi|}{|\xi|} \quad (7)$$

Además,  $c$  (que para este trabajo se considera constante) se puede entender como el módulo de elasticidad de la interacción o bond (ver Figura 2).

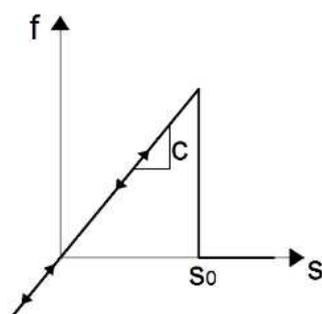


Figura 2: Ley constitutiva del *bond* propuesta por Silling (2000)

El valor de  $c$  se obtiene de igualar los valores de densidad de energía de deformación en un cuerpo sometido a deformación isotrópica calculados según teoría peridinámica y teoría de elasticidad. De esta calibración surgen los valores:

$$c = \begin{cases} 3D & \frac{6E}{\pi\delta^4(1-2\nu)} \\ 2D & \frac{6E'}{\pi\delta^3(1-\nu')e} \end{cases} \quad (8)$$

Donde  $e$  es el espesor del cuerpo considerado de dos dimensiones. Además,  $E' = E$  y  $\nu' = \nu$  para un estado plano de tensiones (EPT) y  $E' = E/(1-\nu^2)$  y  $\nu' = \nu/(1-\nu)$  para un estado plano de deformaciones (EPD). En la teoría PD basada en *bonds* dos partículas interactúan a través de

un potencial que es totalmente independiente del resto de condiciones locales. Esta hipótesis resulta en un módulo de Poisson efectivo de 1/3 para EPT y 1/4 para EPD y 3D. Esta limitación es superada mediante la implementación de la teoría peridinámica basada en *states* (Silling et al., 2007). En este trabajo, sin embargo, se utilizó la teoría basada en *bonds* por lo que se impusieron las condiciones mencionadas.

Partiendo entonces de un micro-potencial lineal es posible expresar la fuerza  $f$  para puntos separados a una distancia menor al horizonte como:

$$f(\eta, \xi) = \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} f(|\xi + \eta|, \xi) \quad (9)$$

Donde  $f$  es una función escalar definida:

$$f = c s \mu \quad (10)$$

En esta expresión  $\mu$  es una función escalar que determina el daño local  $\varphi$  en un punto. Éste varía entre los límites 0, que significa que el punto no tiene daño, y 1 que significa una completa desconexión del punto del resto del cuerpo. Se los define como:

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } s < s_0 \\ 0 & \text{si } s \geq s_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu dH_x}{\int_{H_x} dH_x} \quad (11)$$

El valor  $s_0$  permite introducir falla en la teoría. Es una deformación específica crítica la cual una vez alcanzada el bond se quiebra y pierde toda capacidad de resistir carga, por lo que caracteriza un comportamiento frágil. Silling y Askari (2005) relacionan este valor a la tasa de energía liberada crítica  $G$ , ya que es la energía necesaria para separar en dos partes un cuerpo a lo largo de un área de fractura. Esta energía se iguala a la necesaria para quebrar todos los *bonds* que atraviesan dicha superficie (condición necesaria para lograr el mismo resultado).

El trabajo requerido para quebrar un bond individual se denomina  $w_0$  y está representado por el área bajo la curva  $f$ - $s$  (Figura 3), se lo define como:

$$w_0 = \frac{c s_0^2 |\xi|}{2} \quad (12)$$

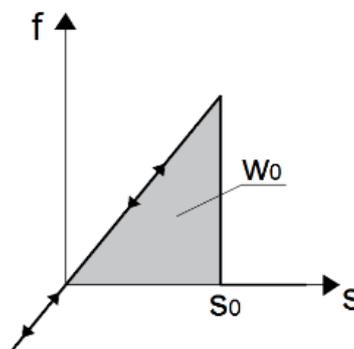


Figura 3: Trabajo requerido para quebrar un *bond*  $w_0$

Considerando el trabajo total necesario para quebrar todos los *bonds* por unidad de área de

fractura, a partir del valor  $w_0$ , y operando algebraicamente se obtiene:

$$s_0 = \begin{cases} 3D \sqrt{\frac{5G(1-2\nu)}{3E\delta}} \\ 2D \sqrt{\frac{2G(1-\nu')}{3E'\delta}} \end{cases} \quad (13)$$

## 2.1 Modelación de fisuras y daño

Dentro de la teoría PD el daño material equivale a la eliminación o rompimiento de las interacciones entre puntos materiales de manera irreversible. Esto es válido tanto para la generación de fisuras iniciales como para la propagación posterior de las mismas.

Es por esto, que una fisura se modela “quebrando” todas las ligaduras o *bonds* que atraviesan el plano de la misma como puede verse en la Figura 4, asegurando la no interacción entre puntos materiales a uno y otro lado de la superficie de la fisura. Esto implica un daño inicial al cuerpo, a diferencia de otras metodologías en las que se constituye la fisura como una geometría. Este daño generado se refleja precisamente en la medición de la energía disipada por daño en el material que, como se presentará luego, posee un valor inicial no nulo, sin significar esto el avance de la fisura.

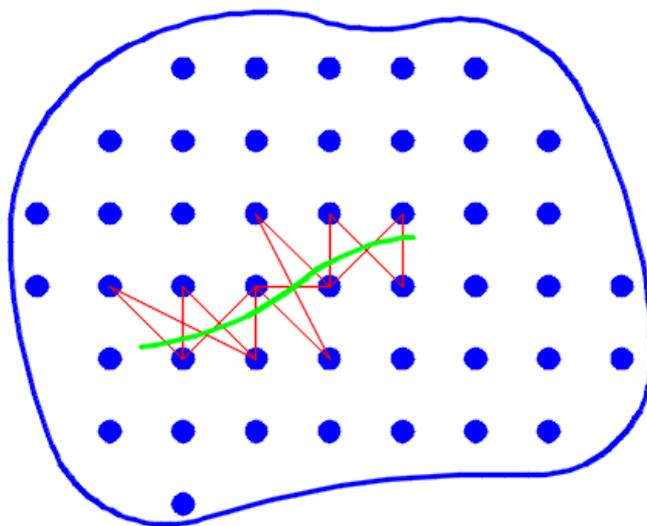


Figura 4: Rompimiento de *bonds* para el modelado de una fisura

En la Figura 4 se representan los puntos materiales en los que se subdivide el cuerpo como puntos azules. Cada punto se relaciona con los puntos de su familia a partir de las ligaduras (están implícitas en la imagen). En verde se observa el camino de una fisura y las líneas rojas representan las ligaduras rotas por el paso de la misma.

Se determinó que para los puntos ubicados sobre la superficie de la fisura el daño local  $\phi$  alcanza un valor cercano a 0,40 en cuerpos 2D. De esto se desprende que, para las simulaciones realizadas, el criterio adoptado para definir el instante en que la fisura propaga consiste en determinar el tiempo para el que los puntos materiales inmediatamente próximos a la punta de la fisura alcanzan dicho valor de daño local crítico.

### 3 OBTENCIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

En este trabajo se propone implementar dos de las metodologías disponibles en la bibliografía para el cálculo del factor de intensidad de tensiones a la teoría peridinámica. Estas son el método del balance de energías y el método del *crack opening displacement* o COD.

Se explica brevemente en qué consiste cada uno de ellos y la forma numérica en que serán utilizados.

#### 3.1 Método del balance energético

La energía específica de fractura  $G$  se define como la tasa de variación de la energía potencial total  $\Pi$  ante una extensión de la superficie de fractura.

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \quad (14)$$

Donde  $W$  es el potencial de las fuerzas externas,  $dA$  es el aumento diferencial de área de la fisura,  $U$  es la energía de deformación elástica y  $E_K$  es la energía cinética.

Para poder utilizar la ecuación (14) en forma numérica se la expresa de manera incremental. Siendo  $a$  la longitud inicial de una fisura alojada en una placa de espesor  $B$  resulta:

$$G(\sigma) = \frac{W_{(a+\Delta a)} - W_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{E_{K(a+\Delta a)} - E_{K(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (15)$$

La expresión (15) se utiliza para un valor determinado de tensión aplicada  $\sigma$ . Es posible simplificar esta ecuación si se tiene en cuenta que las cargas se aplican de manera suficientemente lenta para considerar un caso estático y despreciar el término de energía cinética. Además, si se aplican tensiones prescriptas es posible demostrar que  $dW/dA = 2 dU/dA$ , por lo que la ecuación (15) se reduce a:

$$G(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (16)$$

Ya que la formulación peridinámica permite contabilizar la energía de deformación elástica dentro del cuerpo es posible realizar este cálculo en forma numérica mediante la ecuación (16). Para ello se determinan las energías  $U(a)$  y  $U(a+\Delta a)$  para dos placas de igual geometría sometidas al mismo nivel de tensiones externas  $\sigma$  pero que difieren en la longitud de fisura  $\Delta a$ . Una vez obtenido el valor de  $G$  es posible calcular el factor de intensidad de tensiones  $K$  utilizando la ecuación (17). Durante el desarrollo del presente trabajo se utilizará el valor de FIT normalizarlo respecto de  $K_0$ , siendo este el FIT para un caso general, según se presentará en cada situación. Considerando estado plano de deformaciones se obtiene:

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot E}{1 - \nu^2}} \quad (17)$$

#### 3.2 Extrapolación de $K$ a partir del COD

El segundo método que se tratará en este trabajo es el del COD. Teniendo presente que en las proximidades del extremo de la fisura la curvatura de la superficie fisurada varía

linealmente con la distancia a la misma, es posible relacionar el factor de intensidad de tensiones con la apertura de la fisura según:

$$K = \delta \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (18)$$

El significado de  $r$  y  $\delta$  se ilustra en la [Figura 5](#). Según en qué dirección se consideren los desplazamientos entre puntos inicialmente enfrentados, pero en lados opuestos de la fisura, es posible calcular el FIT para los tres modos de carga. En este trabajo sólo se determinará el asociado al modo de carga I o  $K_I$ . Análogamente a lo mencionado en el método del balance energético, se normalizarán los valores calculados con respecto a  $K_0$ , que variará según la situación analizada, siendo función del nivel de cargas aplicado  $\sigma$  y del tamaño relevante de la fisura  $a$  (ver [Figura 5](#)).

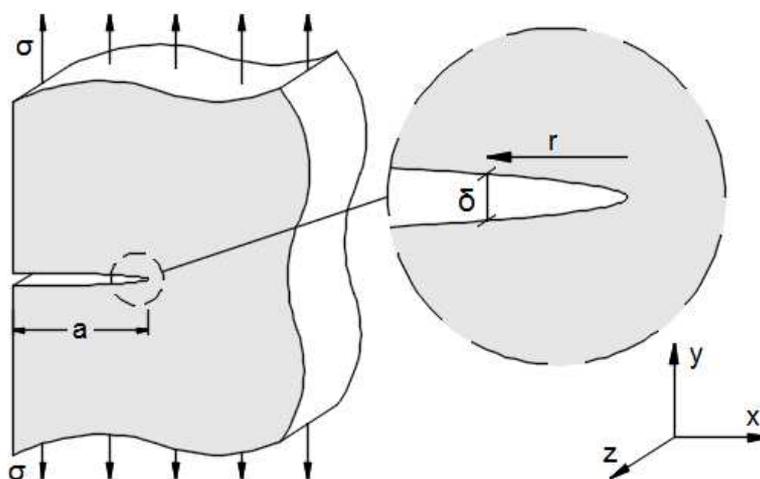


Figura 5: Esquema genérico para determinación de valores  $\delta$ ,  $r$  y la dimensión relevante de la fisura  $a$

Para implementar este método en la teoría PD, una vez discretizado el cuerpo en una grilla de nodos distribuidos de manera regular, se medirá para cada escalón de tiempo en la integración, la separación entre los puntos más próximos al extremo de la fisura ubicados a uno y otro lado de la misma. Luego, aplicando la ecuación (18), se determinará  $K$  para cada una de las distancias  $r$  a la que se encuentran dichos puntos. Por último, luego de normalizar los resultados, se extrapola el valor para  $r = 0$ .

## 4 APLICACIONES

### 4.1 Ejemplo 1: Obtención del FIT estático a partir del balance de energías

Para el caso presentado se busca determinar el FIT estático normalizado para modo de carga I o  $K_I/K_0$  a partir del método del balance energético. También se pretende medir los valores críticos alcanzados de tasa de energía liberada  $G$  y tensión remota aplicada  $\sigma$  una vez que la fisura propaga.

Se analiza de una placa finita con una fisura central, siendo sus dimensiones las indicadas en la [Figura 6 \(a\)](#). La placa es solicitada por una carga prescrita uniforme aplicada tanto en el borde izquierdo como derecho, linealmente creciente con el tiempo y en sentido perpendicular al plano de la fisura en ambos bordes. El incremento de la carga es lo suficientemente lento para que pueda considerarse un problema estático, ya que la energía

cinética permanece muy próxima a valores nulos durante todo el proceso. Las condiciones impuestas en el modelo numérico permiten considerar un estado plano de deformaciones.

En la [Figura 6 \(b\)](#) se esquematiza el caso particular de una placa de dimensiones infinitas con una fisura pasante sometido a una tensión de tracción remota en modo de carga I. El valor de FIT en esta situación tiene una solución disponible en la bibliografía específica ([Anderson, 2005](#)) y servirá de referencia para la normalización, siendo éste:

$$K_0 = \sigma \sqrt{\pi * a} \tag{19}$$

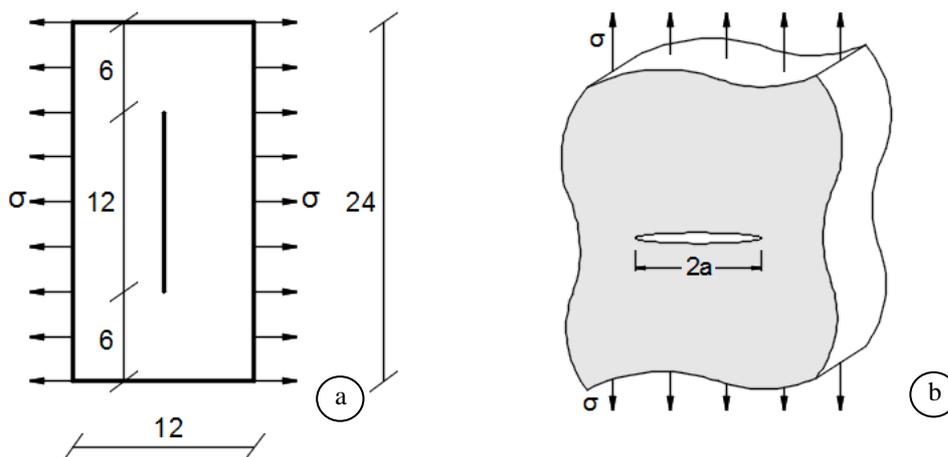


Figura 6: a) Geometría de la placa en estudio, en mm; b) Esquema de placa infinita y dimensión a

Cabe señalar que en este caso la dimensión o tamaño de la fisura que interviene para el cálculo del FIT viene dado por el semi-largo de la misma. En la [Figura 7](#) se reproduce el gráfico de [Rooke y Cartwright \(1976\)](#), el cual presenta la variación de  $K_I/K_0$  según el ancho relativo de la fisura  $a/b$  para distintos valores de la relación altura/ancho de la placa,  $h/b$ .

El factor de intensidad de tensiones normalizado para la placa analizada, obtenido del gráfico para las relaciones  $a/b = 0,50$  y  $h/b = 0,50$  resulta  $K_I/K_0 = 1,93$ .

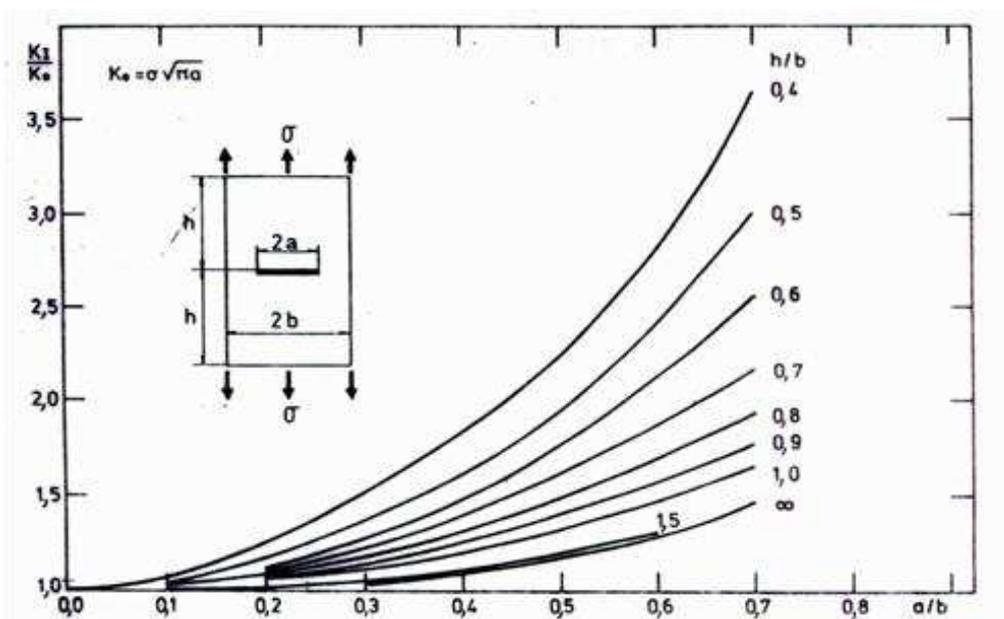


Figura 7: Factor de intensidad de tensiones normalizado propuesto por [Rooke y Cartwright \(1976\)](#)

#### 4.1.1 Modelo peridinámico

La placa fue modelada con 100 nodos de ancho, 200 nodos de alto y un nodo de espesor, por lo que la distancia internodal es  $\Delta = 1,2 \cdot 10^{-4}$  m. Al ser el largo de la fisura igual al ancho de la placa, la misma también equivale a 100 nodos. Las propiedades del material y los parámetros del modelo se resumen en la [Tabla 1](#).

Propiedades del material		Parámetros PD	
E	2,1 GPa	$\Delta$	$1,2 \cdot 10^{-4}$ m
$\nu$	0,25	$\delta$	$4,0 \cdot 10^{-4}$ m (3,33 $\Delta$ )
$\rho$	908 kg/m <sup>3</sup>	$s_0$	2,79%
G	500 J/m <sup>2</sup>	$\Delta t$	$1,0 \cdot 10^{-8}$ s

Tabla 1: Propiedades del material y parámetros de la simulación

Considerando las propiedades del material enunciadas en la [Tabla 1](#) y el valor  $K_I/K_0 = 1,93$  obtenido de la [Figura 7](#), es posible calcular la tensión crítica teórica combinando las ecuaciones (17) y (19), que resulta aproximadamente  $\sigma_{\text{crít}} = 4,0 \cdot 10^6$  Pa.

En la [Figura 8 \(a\)](#) se muestra la placa modelada, donde el color rojo corresponde a los puntos con mayor daño local producto de la fisura y el azul a los puntos sanos. Mientras que la [Figura 8 \(b\)](#) representa la ley constitutiva de un *bond* para los parámetros impuestos.

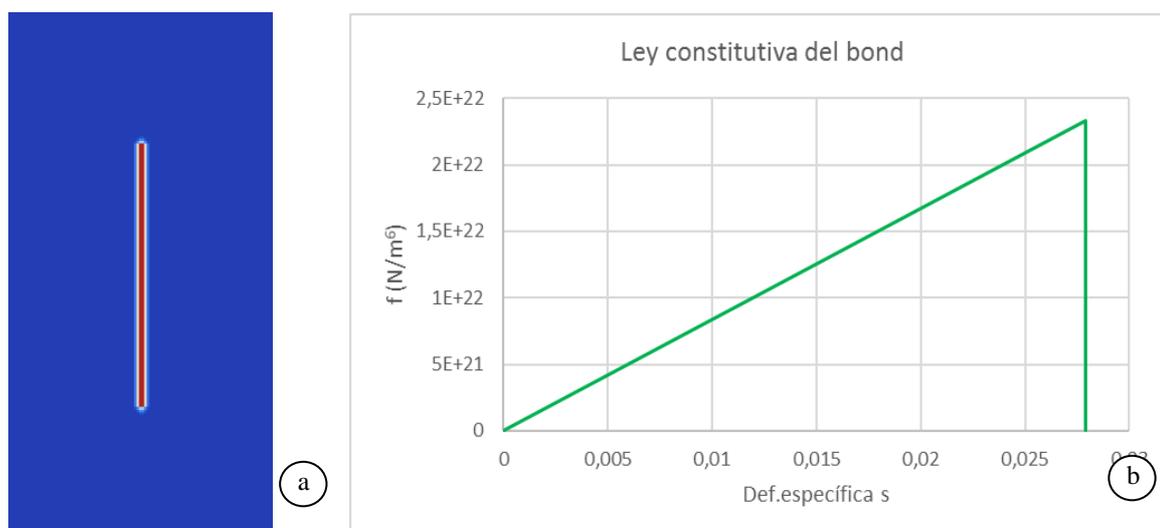


Figura 8: a) Modelo PD logrado con una distancia internodal de  $\Delta=0,12$ mm de lado; b) Ley constitutiva del *bond*

#### 4.1.2 Resultados

Siguiendo el procedimiento explicado previamente, se realizaron las dos simulaciones de la placa, de las cuales en una el tamaño de la fisura es levemente superior. Una vez obtenidas las curvas de energía de deformación para ambos casos, para cada paso de tiempo, por medio de la ecuación (16) se calculó G y normalizando luego de utilizar la ecuación (17) se determinó  $K_I/K_0$ .

En la [Figura 9](#) se presentan las curvas de energía elástica obtenidas de las dos simulaciones y las curvas de energía de daño y energía cinética de la placa con tamaño de fisura sin incrementar.

Cabe aclarar que previo a la propagación, se produce el quiebre de algunos *bonds* en las proximidades de la punta de la fisura, según se observa en el intervalo A de la Figura 9. Esto provoca aumentos en la energía disipada por daño y perturbaciones en las curvas de energía elástica, las cuales se reflejan en consecuencia en las curvas de  $G$  y  $K_I/K_0$ . La tensión crítica se ocurre una vez que el daño local alcanza el valor 0,40 mencionado previamente, en los puntos inmediatamente próximos a la punta de la fisura, lo cual se señala en la Figura 9 como instante B.

Por esto, para obtener el valor de ambos parámetros fractomecánicos al momento en que se alcanza la tensión crítica, se analizan los sectores de las curvas previo a dichas perturbaciones y se extrapolan las mismas para el valor de tensión buscado, como se muestra en la Figura 10, donde se grafican  $G$  y  $K_I/K_0$  en función de la tensión remota aplicada.

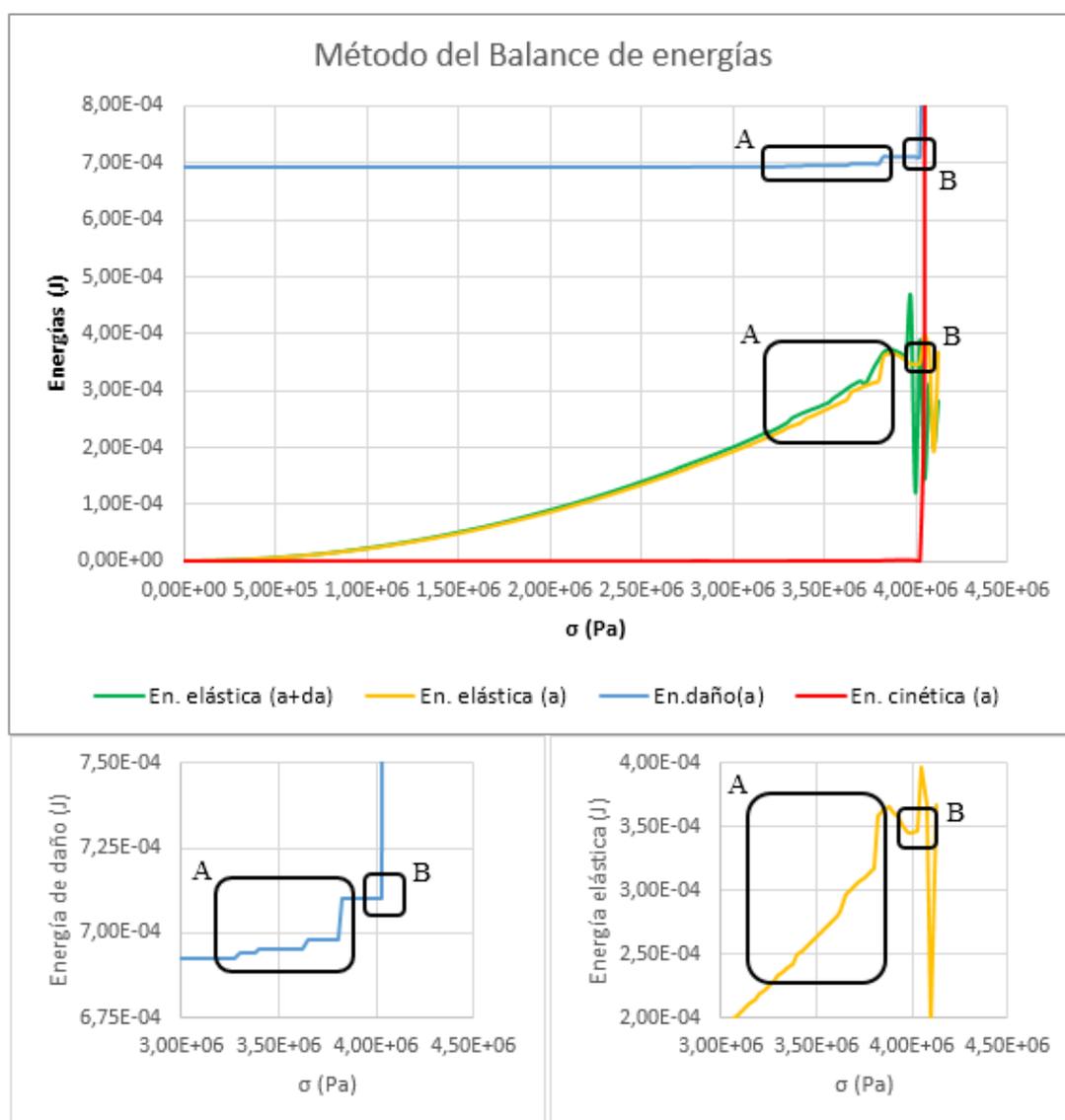


Figura 9: Inicio del proceso de daño y perturbación en curvas de energía

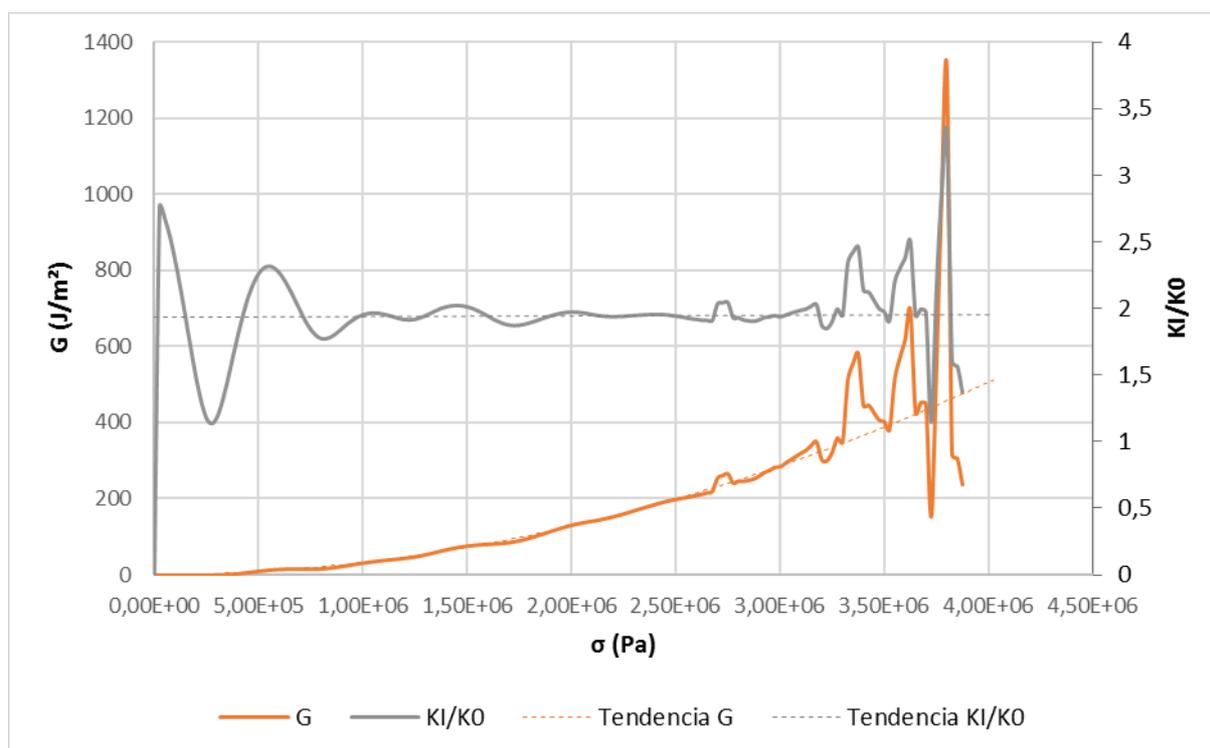


Figura 10: Resultados de G y  $K_I/K_0$ , con perturbaciones en las curvas y extrapolación por curvas de tendencia

Los resultados logrados de aplicar el método del balance energético en la teoría peridinámica se resumen en la [Tabla 2](#).

	Teórico	Teoría PD	Error (%)
$\sigma_{\text{crít}}$ (Pa)	$4,00 \cdot 10^6$	$4,02 \cdot 10^6$	0,50
G (J/m <sup>2</sup> )	500	507	1,40
$K_I/K_0$	1,93	1,94	0,52

Tabla 2: Resultados del método del balance energético

#### 4.2 Ejemplo 2: Influencia de la presencia de un hueco circular en la propagación de una fisura

En este caso se busca mostrar la capacidad de la teoría PD para capturar patrones de rotura y mapear la densidad de energía de deformación (energía por unidad de volumen) en presencia de fisuras y geometrías complejas. Particularmente la situación analizada consiste en una placa con un hueco circular que condiciona en mayor o menor medida la propagación de una fisura según la distancia entre ellos.

La geometría del cuerpo y las condiciones de borde se esquematizan en la [Figura 11](#). La placa es cargada dinámicamente con una carga normal uniforme en el borde superior y se impide el desplazamiento en el borde inferior.

El ejemplo fue estudiado por [Tabiei y Wu \(2003\)](#) mediante el código de simulación DYNA3D y posteriormente por [Kosteski et al. \(2012\)](#) implementando MED, considerando tres configuraciones iniciales en las que varía la posición de la fisura según se observa en la [Tabla 3](#).

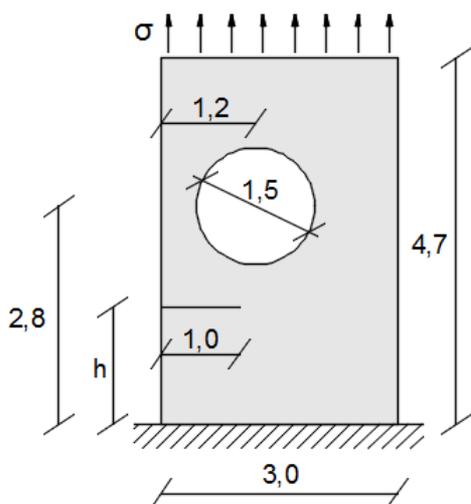


Figura 11: Ejemplo analizado con dimensiones en mm.

	h (mm)
Modelo A	1,5
Modelo B	1,0
Modelo C	0,5

Tabla 3: Valores de h para las configuraciones analizadas

#### 4.2.1 Modelo peridinámico

Las tres configuraciones presentadas en la Figura 11 se analizaron con las propiedades del material y parámetros peridinámicos que se indican en la Tabla 4. La placa se discretizó con nodos separados a una distancia de  $\Delta=3,33 \cdot 10^{-4}$  m, es decir que se utilizaron 90 nodos en el ancho y 141 en el largo, mientras que al tratarse de un cuerpo 2D el espesor se constituye de un solo nodo. El horizonte considerado fue de  $1,01 \cdot 10^{-3}$  m. La fisura se modeló siguiendo los lineamientos explicados anteriormente.

Propiedades del material		Parámetros PD	
E	71,4 GPa	$\Delta$	$3,33 \cdot 10^{-4}$ m
$\nu$	0,25	$\delta$	$1,01 \cdot 10^{-3}$ m (3,02 $\Delta$ )
$\rho$	$2.700 \text{ kg/m}^3$	$s_0$	0,43%
G	$1.000 \text{ J/m}^2$	$\Delta t$	$1,0 \cdot 10^{-8}$ s

Tabla 4: Propiedades del material y parámetros de la simulación

#### 4.2.2 Resultados

En la Figura 12 se comparan las configuraciones de rotura obtenidos por Tabiei y Wu (2003) y Kostas et al. (2012) con los logrados mediante la teoría peridinámica, para los modelos A, B y C; observándose la gran similitud entre los resultados.

Al adoptarse una grilla de puntos con disposición regular existe una dificultad en la modelación de curvas, la cual tiene una mayor o menor influencia según el nivel de discretización. Debido a esta imperfección se generan concentraciones de energía en las aristas.

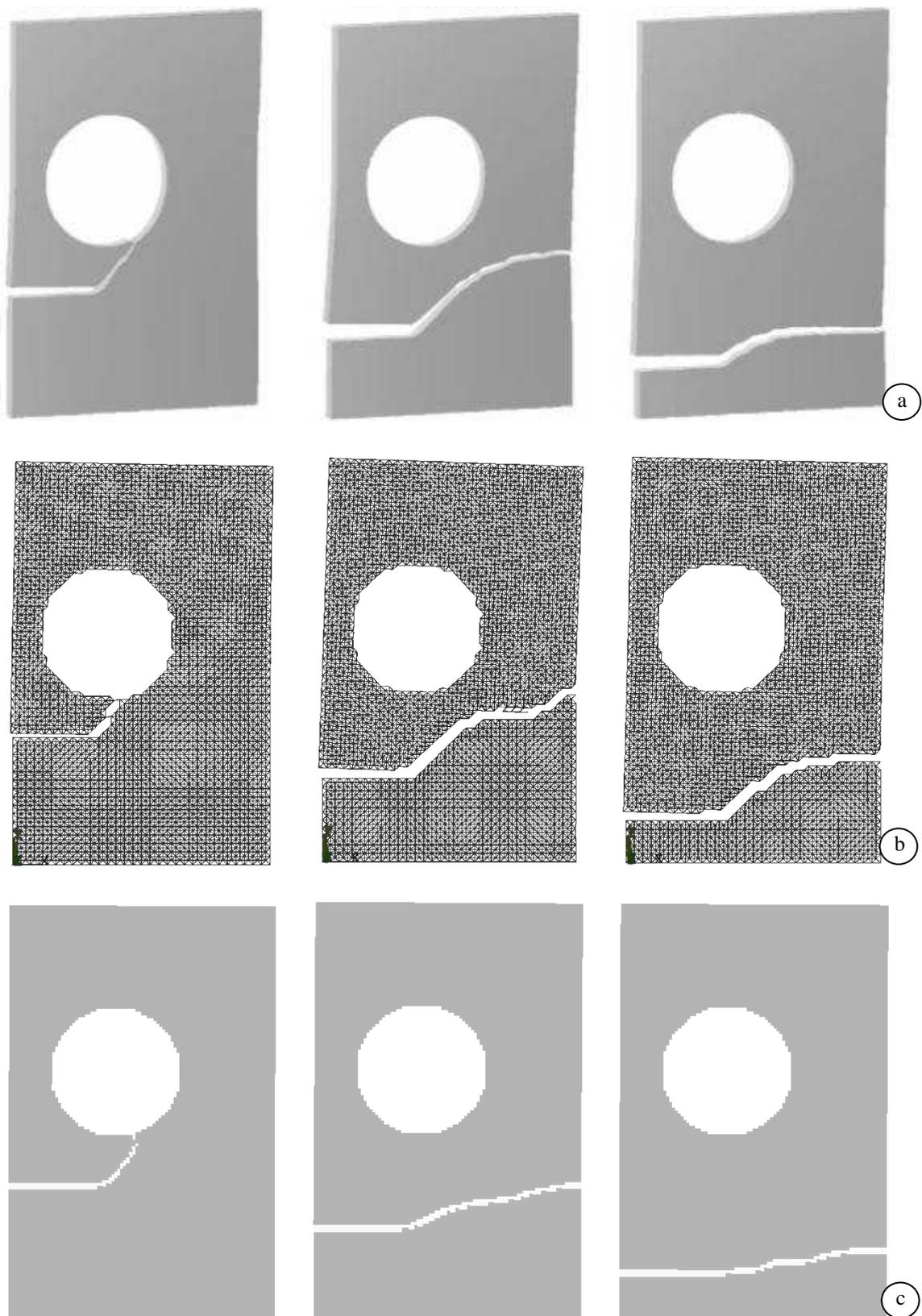


Figura 12: Configuraciones de rotura para los tres modelos analizados logrados con: a) DYN3D (Tabiei y Wu, 2003); b) DEM (Kosteski et al., 2012); c) Teoría peridinámica

A continuación, se mapea la densidad de energía de deformación para cada una de las

configuraciones analizadas mientras se da el avance de la fisura. Esto permite observar que influencia tiene la presencia del hueco circular en la propagación de la fisura.

En primer lugar se presenta el modelo A en la Figura 13. En la misma, se aprecia como en los instantes iniciales se genera una concentración de energía en el extremo de la fisura, con la “forma de riñón” característica que señala la bibliografía (ver Anderson, 2005), además de las concentraciones sobre los vértices del hueco producto de la dificultad en la modelación geométrica. En el segundo instante mostrado se produjo un avance de la fisura con el correspondiente desplazamiento de la concentración de energía; además, existe un aumento de la energía en la parte inferior del hueco que desvía dicho avance. Cabe remarcar que el modelo PD captura los círculos concéntricos formados alrededor de la punta de la fisura, producto de las ondas que produce la progresión del daño en el material.

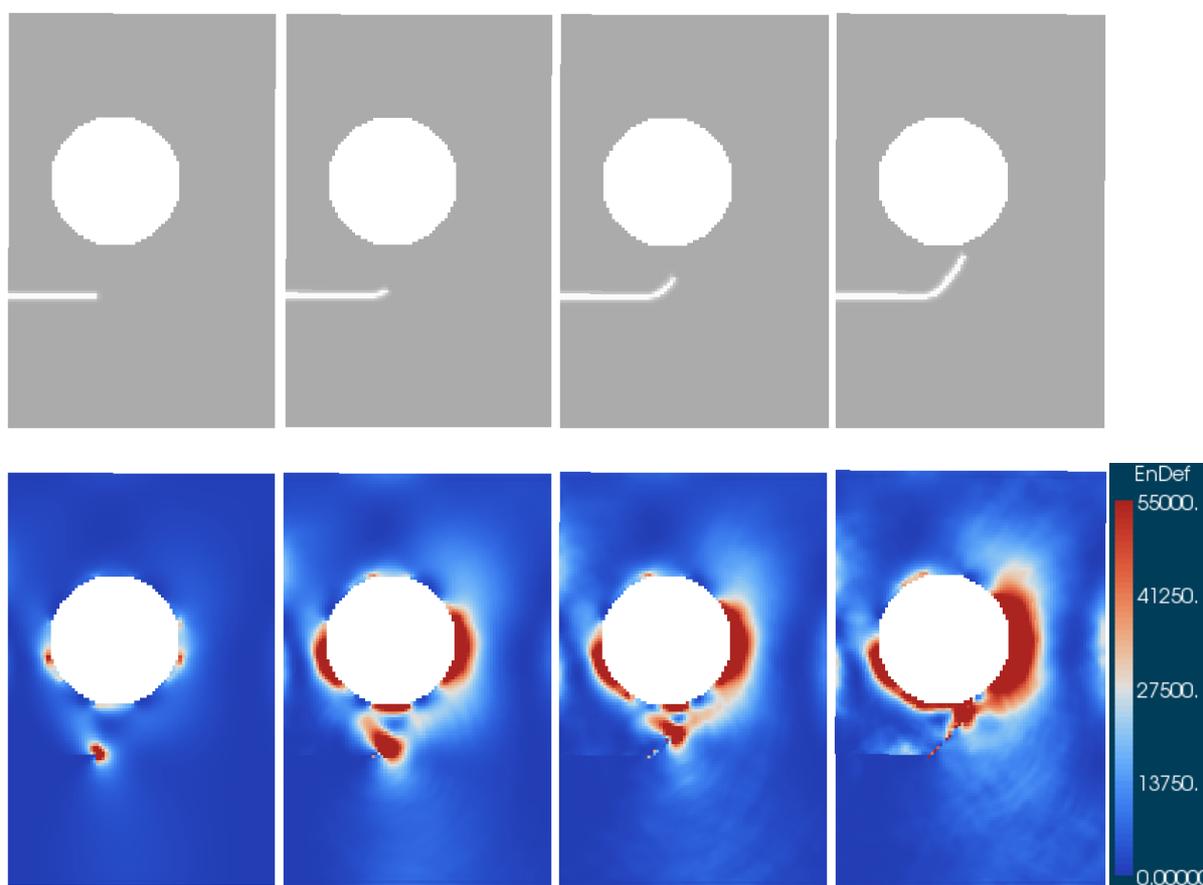


Figura 13: Mapeo de densidad de energía y avance de la fisura para el modelo A

En los últimos dos instantes mostrados dichas ondas ya se reflejaron en los bordes de la placa, generando una interferencia con las nuevas ondas generadas, lo que produce que la variación en la energía sobre la placa no sea tan “suave” como en los primeros momentos. La concentración de energía próxima al hueco provoca la propagación de la fisura hacia el mismo. Posteriormente, debido a la alta concentración de energía, la fisura propaga por el lado derecho de la placa. Cabe señalar que el sector izquierdo del cuerpo por debajo de la fisura inicial permanece descargado durante toda la simulación.

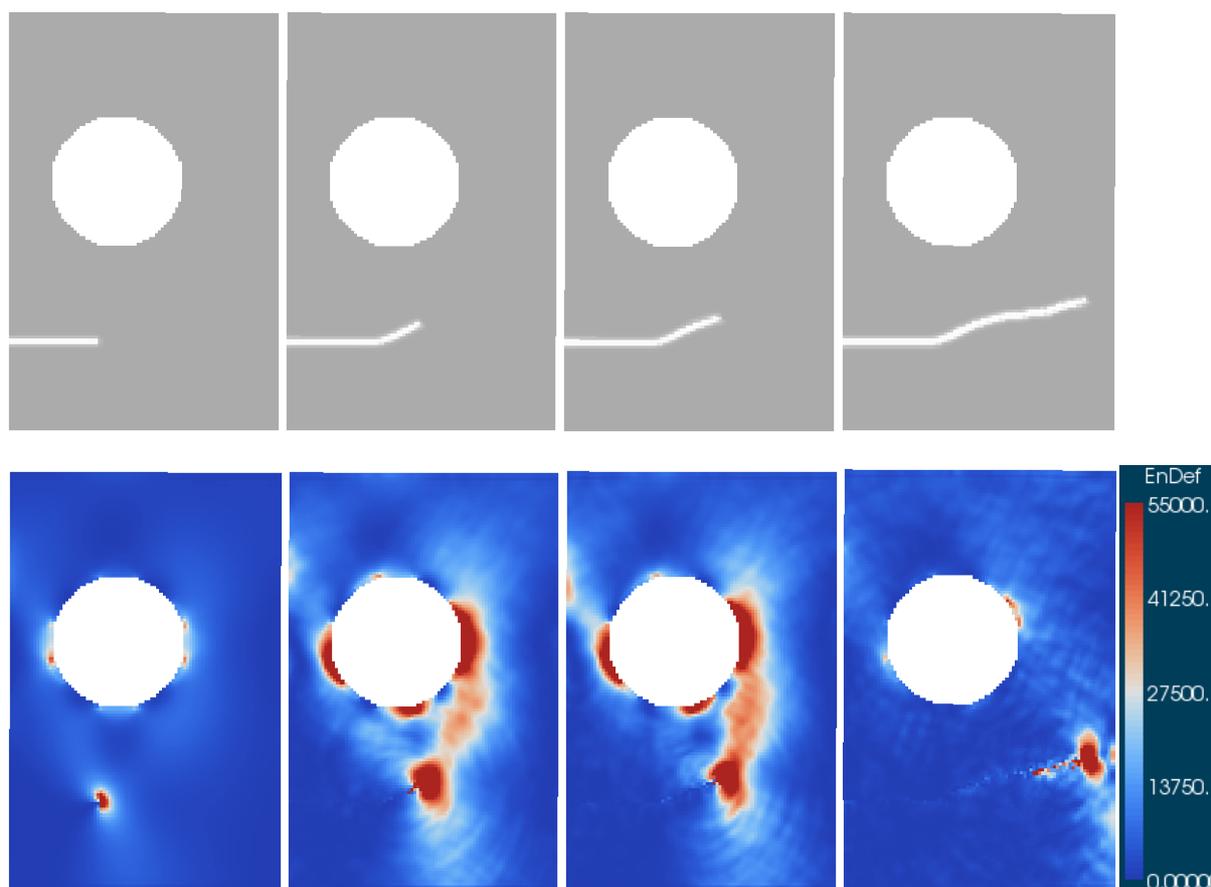


Figura 14: Mapeo de densidad de energía y avance de la fisura para el modelo B

En el modelo B, presentado en la [Figura 14](#), existen inicialmente los mismos puntos de concentración de energía que para el modelo A. En este caso, de forma similar a la situación anterior, el hueco circular desvía la propagación de la fisura, acercándola hacia el mismo, como se observa claramente en el segundo y tercer instante que se muestran. Sin embargo, debido a la separación existente, una vez que la punta de la fisura se encuentra a una distancia del borde derecho similar al del hueco se desvía buscando la dirección horizontal. A partir de ese instante la menor sección de la placa queda definida por el extremo de la fisura, por lo que únicamente existe allí una concentración de energía.

Por último, en el modelo C ([Figura 15](#)) la fisura se encuentra inicialmente demasiado lejos del hueco y las perturbaciones en la energía de deformación producidas por éste desvían poco el camino de la misma, llevando a un avance muy próximo a la horizontal. Se observa, al igual que en los primeros dos modelos, como en los instantes iniciales se genera una concentración tanto en el extremo de la fisura y en los vértices del hueco y las ondulaciones producto de la propagación.

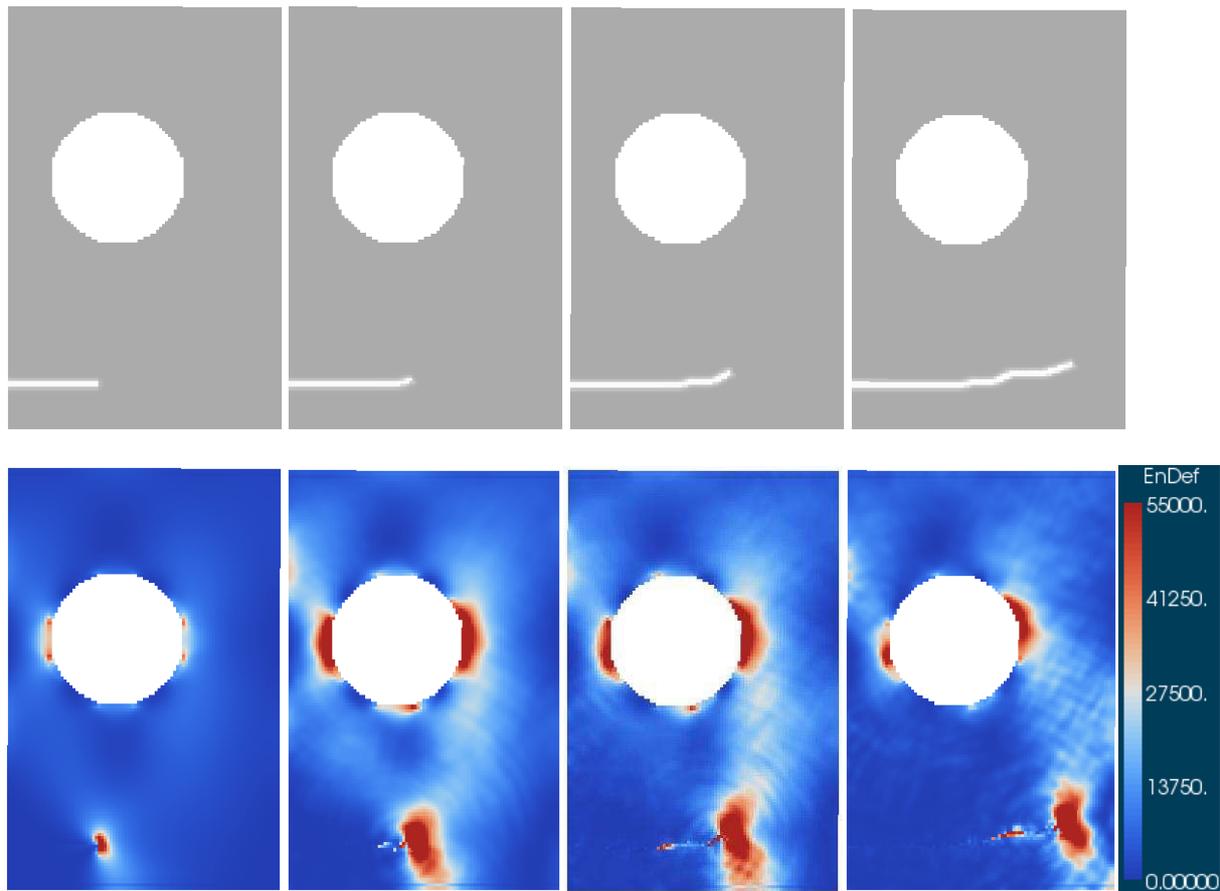


Figura 15: Mapeo de densidad de energía y avance de la fisura para el modelo C

### 4.3 Ejemplo 3: Obtención del FIT estático a partir del COD

Para el tercer ejemplo se busca determinar el FIT estático normalizado  $K_I/K_0$  en un cuerpo 3D aplicando la metodología del COD. En este caso, no se pretende alcanzar la situación crítica que determina la propagación de la fisura, por lo que la tasa de energía liberada  $G$ , que es un parámetro de entrada al modelo que condiciona la deformación crítica  $s_0$ , no se tuvo en cuenta al momento de presentar los resultados.

Se analiza de un cuerpo prismático con una fisura circular contenido en él, sometido a una carga uniforme aplicada en los bordes superior e inferior, linealmente creciente con el tiempo y en sentido perpendicular al plano de la fisura en ambos bordes, situación que se esquematiza en la [Figura 16 \(a\)](#). Al igual que en el ejemplo 1, el incremento de la carga se realiza lo suficientemente lento, manteniendo valores bajos de energía cinética, de manera que puede considerarse un problema estático. Para esta situación, la bibliografía específica ([Anderson, 2005](#)) brinda un valor de FIT que se utilizará como referencia para la normalización, el cual es:

$$K_0 = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi * a} \quad (20)$$

Donde la dimensión relevante de la fisura es ahora el radio de la misma (ver [Figura 16 \(a\)](#)). Las dimensiones del cuerpo analizado se muestran en la [Figura 16 \(b\)](#), donde la altura del cuerpo es ligeramente superior a los lados únicamente a efectos de una disposición favorable

de los nodos que se utilizaron para la discretización. Considerando que el cuerpo es lo suficientemente grande en relación a la fisura y que la geometría del mismo no condiciona el valor del FIT, se espera un  $K_I/K_0 = 1,00$ .

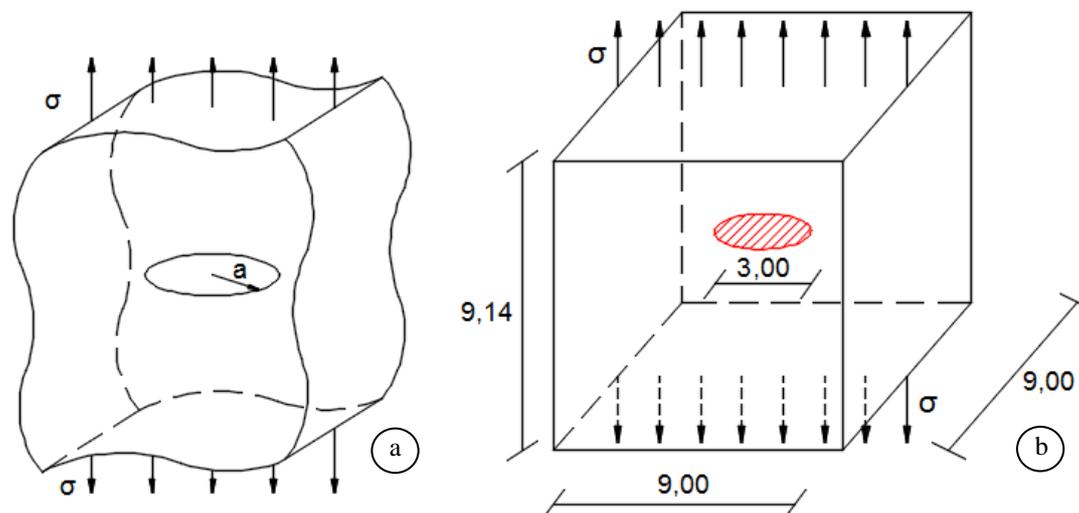


Figura 16: a) Esquema del cuerpo y dimensión relevante a; b) Geometría de la placa en estudio, en mm

#### 4.3.1 Modelo peridinámico

Para el modelado del cuerpo se utilizaron 63 elementos para los lados de 9,00 mm y 64 elementos en el alto de 9,14 mm. Por lo que el radio de la fisura se corresponde con 10,5 elementos.

Siguiendo la metodología explicada anteriormente, se midió la apertura de la fisura en los puntos más cercanos al borde de la misma (siguiendo una línea radial) y, una vez calculado el FIT normalizado para cada punto, se extrapoló el valor para  $r = 0$  (ver Figura 5).

Las propiedades del material y los parámetros del modelo se resumen en la Tabla 5.

Propiedades del material		Parámetros PD	
E	2,1 GPa	$\Delta$	$1,429 \cdot 10^{-4}$ m
$\nu$	0,25	$\delta$	$4,31 \cdot 10^{-4}$ m (3,02 $\Delta$ )
$\rho$	908 kg/m <sup>3</sup>	$\Delta t$	$1,0 \cdot 10^{-8}$ s

Tabla 5: Propiedades del material y parámetros de la simulación

#### 4.3.2 Resultados

En la Figura 17 se muestra la curva de  $K_I/K_0$  en función de la tensión remota aplicada obtenida. Se observa que la tendencia es levemente superior al valor esperado, logrando que  $K_I/K_0 = 1,05$ , que equivale a un error del 5%.

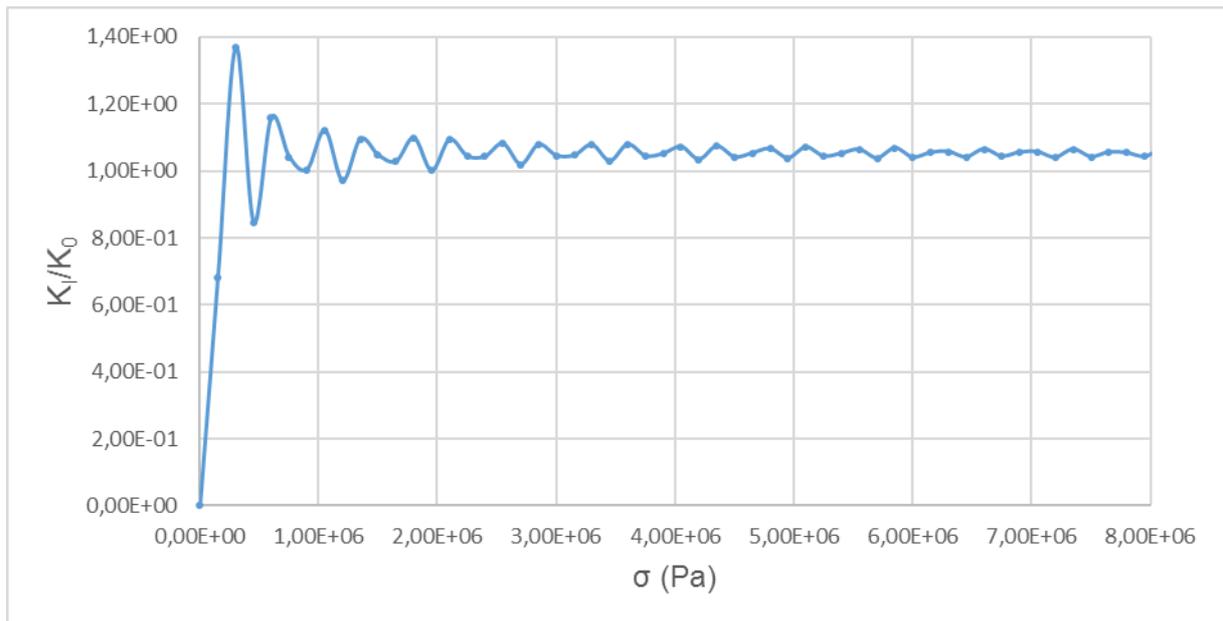


Figura 17: Resultado de  $K_I/K_0$  por el método del COD para un cuerpo 3D

En la [Figura 18](#) se presenta el modelo 3D logrado mediante la teoría PD, donde puede observarse tanto la geometría del cuerpo, como los entornos de valores superiores e inferiores de la distribución de energía.

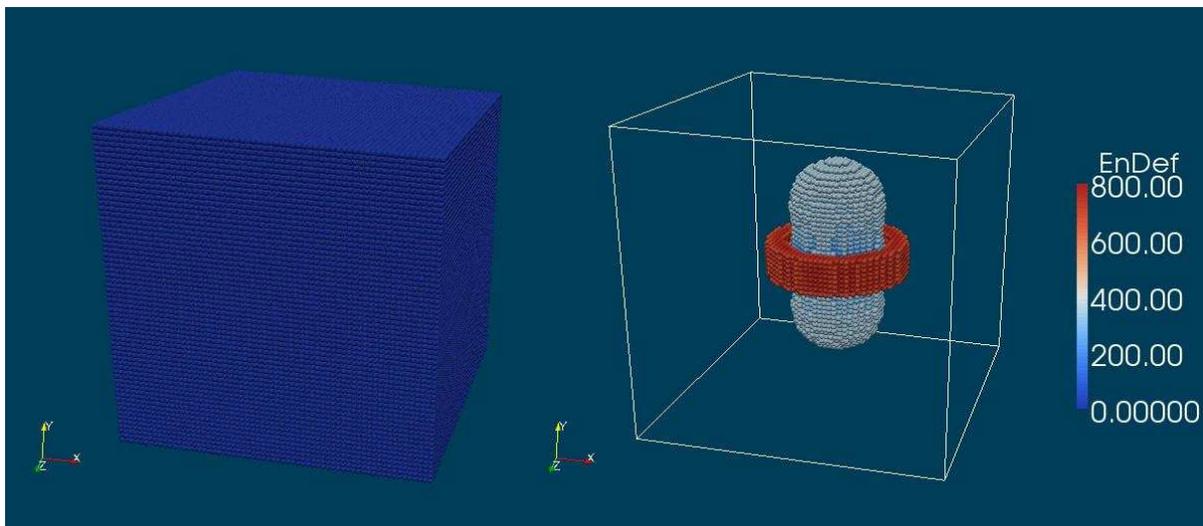


Figura 18: Geometría del cuerpo y distribución de densidad de energía

En la [Figura 19](#) y la [Figura 20](#) se muestra la distribución de la densidad de energía de deformación en el cuerpo efectuando cortes perpendicular y coincidente con el plano de la fisura respectivamente. En las mismas se muestra también la distribución del daño local punto a punto, que permite ubicar la fisura dentro del cuerpo. Se aprecia cómo la presencia de la fisura produce una concentración cercana al perímetro de la misma, estando las superficies prácticamente descargadas.

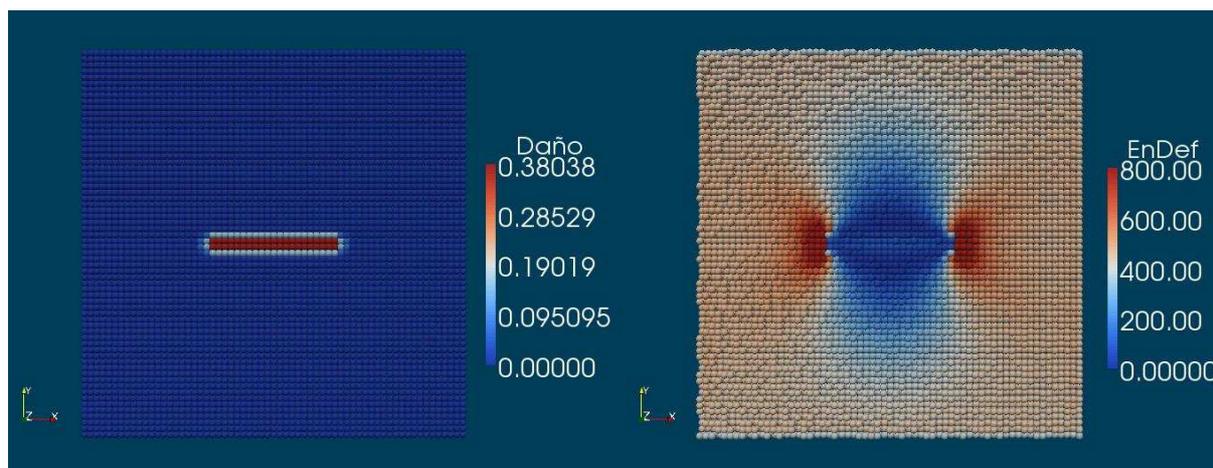


Figura 19: Corte transversal al plano de la fisura

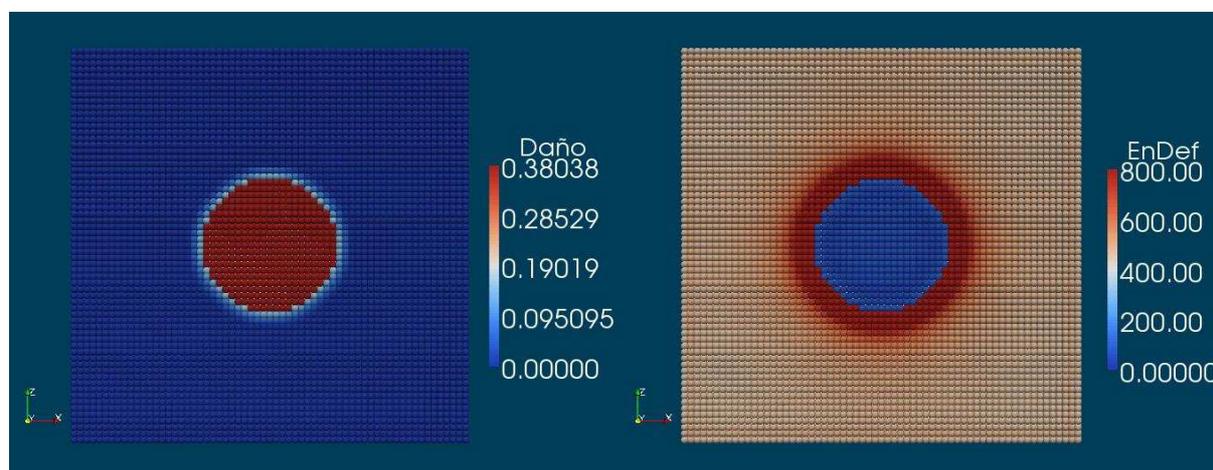


Figura 20: Corte coincidente con el plano de la fisura

## 5 DISCUSIÓN

En los ejemplos presentados fueron ilustradas las posibilidades básicas que tiene la teoría peridinámica para representar problemas con fractura lineal elástica, tanto para la determinación de parámetros fractomecánicos en dos y tres dimensiones como para constituir configuraciones de rotura precisas en geometrías más complejas.

Los resultados obtenidos se compararon con soluciones analíticas existentes en el caso del cálculo de los parámetros fractomecánicos y con otras soluciones numéricas en el caso de la configuración de rotura del sólido. Además, también se mostró que el modelo permite, mediante la incorporación del parámetro de fractura crítico (tasa de energía liberada  $G$ ) como dato de entrada, simular de manera precisa la situación para la cual se alcanza la propagación inestable de la fisura.

Como continuación de este enfoque, se pretende atender diferentes aspectos, dentro de los cuales se indican los de principal interés:

- Estudiar las posibilidades del método en la simulación de eventos donde los efectos dinámicos no sean despreciables. Aquí pueden ser explorados, entre otros, fenómenos tales como la bifurcación de fisuras (*branching*), la determinación de

parámetros fractomecánicos dinámicos y velocidad de propagación de ondas.

- Incorporación del carácter aleatorio en el modelo. Esto puede ser realizado con extrema facilidad considerando como un campo aleatorio alguna de las propiedades que definen el modelo. Si bien la calibración en este caso puede resultar más compleja, esta posibilidad permitirá describir la realidad con otro grado de profundidad
- Evaluación de la influencia del horizonte en el modelo. Al tratarse de una teoría no local, la apropiada elección del horizonte para la obtención de resultados apropiados es clave. Por esto se pretende encontrar que aspectos del proceso de fractura están fuertemente afectados por el mismo y si es posible asimilarlo a una longitud característica del material.

Otra de las posibilidades a explorar que merece ser mencionada es la de modificar la relación constitutiva presentada en la [Figura 2](#), que si bien permite representar la fractura en sólidos como se ha mostrado en los ejemplos de este trabajo, exige la interacción de cada nodo del modelo con una gran cantidad de nodos vecinos, por lo que el tamaño de las “familias” resulta en un gran esfuerzo computacional.

En la descripción del método, [Silling y Askari \(2005\)](#) al igual que [Madenci y Oterkus \(2014\)](#) recomiendan utilizar como mínimo un horizonte que incorpore tres niveles de nodos, es decir  $\delta = 3 \Delta$ , siendo  $\Delta$  la distancia internodal.

Esto podría ser flexibilizado incorporando un cambio en la ley constitutiva del *bond* que cae abruptamente al llegar a un valor crítico de deformación. En esta nueva propuesta, la ley tendrá un *softening* regulado por un nuevo parámetro, que combinado con el horizonte  $\delta$  permitiría una mayor ductilidad a la implementación realizada y una mayor velocidad en la simulación al disminuir la cantidad de integrantes en la familia de cada nodo.

En la [Figura 21](#) se presenta la ley constitutiva propuesta, que será foco de futuros trabajos. Para este caso, serán necesarios dos límites en la deformación del *bond*, uno correspondiente a la deformación elástica  $s_p$  y uno a la deformación de rotura  $s_r$ , a diferencia de la deformación crítica única  $s_0$  planteada por [Silling \(2000\)](#). Esta ley permite la evolución de daño en el *bond* sin que se produzca el quiebre y una disminución en la capacidad de carga una vez superado un límite de deformación elástica, y se verifica que la ley utilizada en este trabajo es un caso particular cuando  $s_p = s_r$ .

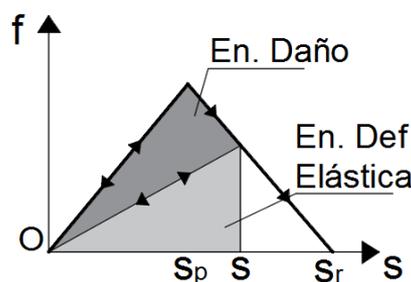


Figura 21: Ley constitutiva propuesta a ser introducida en el modelo peridinámico

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo fueron presentados tres ejemplos que demuestran la capacidad del modelo peridinámico en problemas que incluyen la determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y la simulación de la propagación inestable de fisuras en sólidos.

Los resultados se mostraron consistentes al compararlos con soluciones analíticas y con otras soluciones numéricas, tanto en términos de parámetros fractomecánicos como de configuraciones de ruptura obtenidas. Se observó que el método es muy eficiente para calcular energías, que se van computando durante el proceso simulado.

En la sección de discusión fueron citados algunos de los tópicos que los autores están explorando para ampliar la versión del método con que trabajan, presentando con más detalle la propuesta de una nueva ley constitutiva que posibilitará la disminución del costo computacional en las simulaciones al permitir la reducción del número de nodos en las familias y conformará un modelo más flexible en la forma de incluir los parámetros que regulan la fractura.

## REFERENCIAS

- Anderson T.L., Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. *CRC Press*, ISBN: 978-0-8493-1656-2, 2005.
- Belytschko T., Black T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:601–620, 1999.
- Bobaru F., HuW., The meaning, selection and use of the peridynamic horizon and its relation to crack branching in brittle materials. *International Journal of Fracture*, 176(2):215–222, 2012.
- Ha Y.D., Bobaru F., Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. *Engineering Fracture Mechanics*, 78:1156–1168, 2011.
- Hillerborg A, Modeer M, Petersson P.E., Analysis of crack formation and crack growth by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–781, 1976.
- Kosteski L., Barrios R., Iturrioz I., Determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos utilizando el método de los elementos discretos compuestos por barras. *Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Cimne*, 24(4):323–343, 2008.
- Kosteski L., Barrios R., Iturrioz I., Fractomechanics parameter calculus using the discrete element method with bars. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 6:301–321, 2009.
- Kosteski L., Barrios D'Ambra B., Iturrioz I., Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *International Journal of Fracture*, 174:139–161, 2012.
- Madenci E., Oterkus E., Peridynamic Theory and Its Applications. *Springer*. 2014.
- Moes N., Dolbow J., Belytschko T., A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- Rooke D.P., Cartwright D.J., “The compendium of stress intensity factors”. *Her majesty's Stationery Office*, 1976.
- Silling S.A., Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:175–209, 2000.
- Silling S.A., Askari A., Peridynamic modeling of impact damage. In: *Moody FJ (ed) PVP-vol. 489. American Society of Mechanical Engineers*, New York, pp 197–205, 2004.
- Silling S.A., Askari E., A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers & Structures*, 83, 1526–1535, 2005.
- Silling S.A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari A., Peridynamics states and constitutive modeling. *Journal of Elasticity*, 88:151–184, 2007.

- Silling S.A., Zimmermann M., Abeyaratne R., Deformation of a peridynamic bar. *Journal of Elasticity*, 73:173–190, 2003.
- Tabiei A., Wu J., Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:1979–2006, 2003.
- Xu X.P., Needleman A., Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42:1397–1434, 1994.