

ESTUDIO DE MODELOS VISCOELÁSTICOS Y VISCOPLÁSTICOS PARA CREEP BÁSICO EN HORMIGÓN

R. Lorefice^a, G. Etse^b, C. Coronel^a e I. Herrera^a

^a*CMAE - CENTRO DE MECANICA APLICADA Y ESTRUCTURAS
(IMEC-UNSE) - Santiago del Estero, Argentina (lorefice@unse.edu.ar)*

^b*CEMNCI - Universidad Nacional de Tucumán - CONICET
(4000) Tucumán, Argentina (getse@herrera.unt.edu.ar)*

Key words: Falla diferida - Viscoelasticidad - Viscoplasticidad - Creep - Hormigón

Resumen. En este trabajo se presenta un análisis teórico-computacional acerca de las ventajas y desventajas que para el estudio del problema de fluencia básica (creep) en hormigones presentan las teorías de la viscoelasticidad y viscoplasticidad, y la posibilidad de generar un modelo combinado que contemple los aspectos más relevantes de cada una de ellas. El análisis se presenta a nivel constitutivo, y se lleva a cabo comparando las respuestas numéricas de un modelo viscoelástico basado en la denominada cadena de Maxwell versus el caso viscoplástico mediante la consideración de la teoría de Perzyna (1963, 1966). Las simulaciones numéricas llevadas a cabo consisten en ensayos de relajación y fluencia con ambos modelos y con una combinación de los mismos, mediante la consideración de una discretización mixta que incluye elementos tradicionales de medio continuo y elementos de interfase de espesor nulo.

1 INTRODUCCION

La reología es la ciencia que estudia la variación en el tiempo de las características de deformación de un material. En el hormigón, los fenómenos reológicos son de una naturaleza muy compleja, y su estudio tiene una gran importancia en el análisis de estructuras pretensadas, estructuras esbeltas o construidas mediante procesos evolutivos y estructuras con grandes volúmenes de hormigón. Los principales fenómenos reológicos a considerar en las estructuras de hormigón son la fluencia lenta o creep, fenómenos de retracción y envejecimiento y procesos de relajación de tensiones ante estados de deformación sostenida. Con respecto a la retracción, es una contracción independiente del estado tensional y se produce debido a gradientes de humedad que afectan al material. El término envejecimiento se refiere a la variación de las propiedades mecánicas del hormigón con el tiempo por evolución del proceso de maduración. Los fenómenos de retracción y envejecimiento evolucionan independientemente del estado tensional y no serán tratados en este trabajo. El fenómeno de fluencia lenta o creep puede definirse como el aumento de deformación que sufre una estructura cuando se la somete a cargas sostenidas (o tensiones) de larga duración en el tiempo. Se han propuesto varias teorías para explicar este fenómeno, pero todas coinciden en que existe una combinación de tres mecanismos principales que le dan origen: en primer lugar, la fluencia lenta es causada por la migración del agua presente en los microporos de la matriz. Esta migración se produce cuando se aplica un estado de tensión al material. El segundo mecanismo es la rotura y restablecimiento de las uniones a nivel microscópico, considerándose que este segundo mecanismo es originado por el primero. El tercer hecho es la formación de microfisuras en la matriz, siendo esta degradación de rigidez la causa de la respuesta no lineal bajo carga constante, Neville (1972). Una curva típica deformación-tiempo se muestra en la Figura 1.

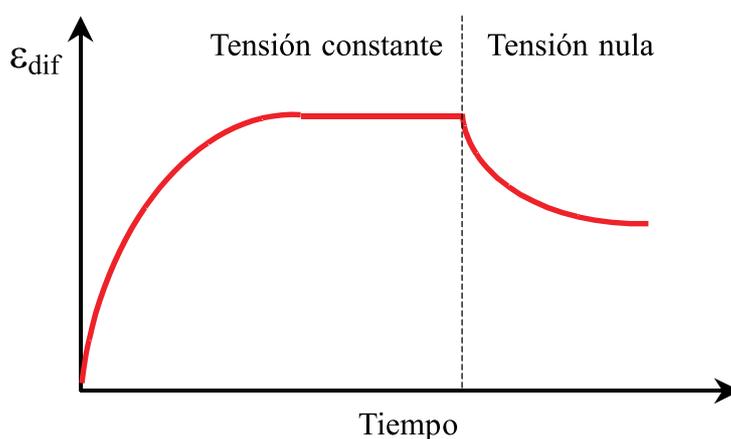


Figura 1: Curva de deformación en el tiempo bajo carga constante

Para obtener una curva de evolución de la deformación en el tiempo como la mostrada en la Figura 1, se aplica la carga a velocidad cuasi-estática hasta alcanzar un determinado porcentaje de la resistencia característica, $\sigma = k f'_c$ ($k < 1$). Una vez alcanzado el nivel de tensión deseado, la carga se mantiene constante, y se estudia la evolución de la deformación en el tiempo que sufre el material. En el caso del hormigón, al principio la deformación crece rápidamente y luego de algunos años, tiende asintóticamente a un valor límite, a pesar de que en teoría la deformación diferida crece durante toda la vida de la estructura. Si la estructura se

descarga, una parte de la deformación se recupera, variando en general este porcentaje entre un 10 % y 25 %, Neville (1996). El resto de la deformación es permanente. Con el objeto de separar las deformaciones recuperables de las permanentes, Ishai (1962) realizó una serie de ensayos a carga sostenida sobre probetas de hormigón cargando a diferentes edades, para luego restar la deformación recuperable de la total, ver Figura 2. La parte de la deformación que se recupera se denomina *creep primario* mientras que la parte no recuperable se divide en dos partes llamadas *creep secundario* y *creep terciario*.

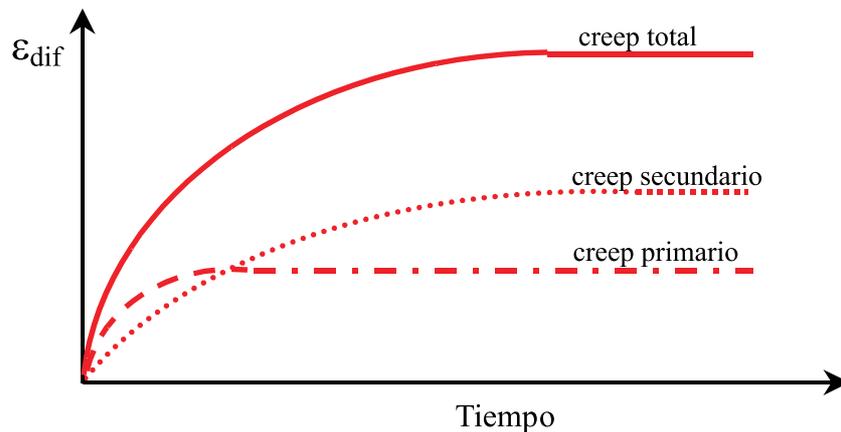


Figura 2: Deformaciones bajo carga sostenida

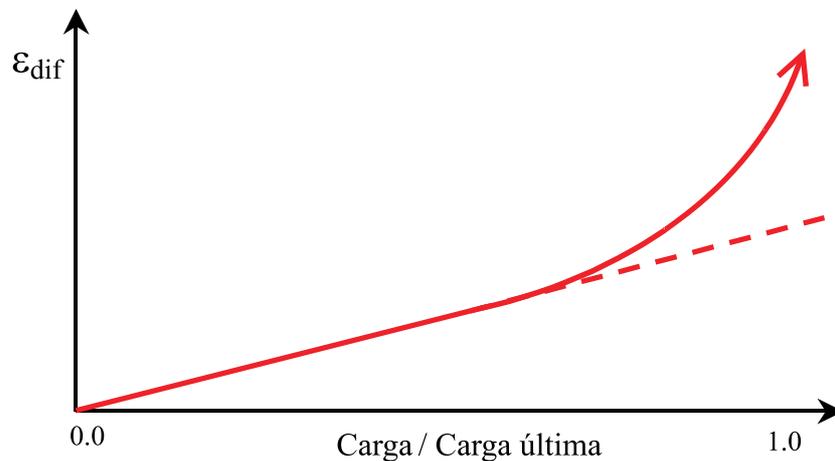


Figura 3: Influencia del nivel de tensión

La cantidad de deformación diferida que se produce es función de la magnitud de la tensión aplicada a la estructura. En la Figura 3 se muestra este efecto para diferentes relaciones σ/f_c . Hasta un cierto valor de esta relación, la deformación diferida es prácticamente proporcional a la carga aplicada. Superado este nivel, la deformación crece de un modo casi exponencial. Este fuerte comportamiento no lineal se relaciona con el desarrollo de la microfisuración de la matriz, y es de carácter permanente. Eventualmente, este mecanismo puede producir el fenómeno denominado *rotura diferida*. Normalmente, la deformación por creep se determina

restando de la deformación total sufrida por el espécimen bajo carga, la suma de las deformaciones instantáneas (*elástica*), la contracción por fragüado y las deformaciones de origen térmico si las hubiera. Inicialmente, la deformación por fluencia lenta o creep del hormigón se inicia con una tasa de crecimiento elevado, la cual decrece paulatinamente hasta prácticamente estabilizarse luego de un lapso de tiempo suficientemente largo. En base a las observaciones experimentales, pueden identificarse tres etapas en la curva de creep básico del hormigón, ver Figura 4:

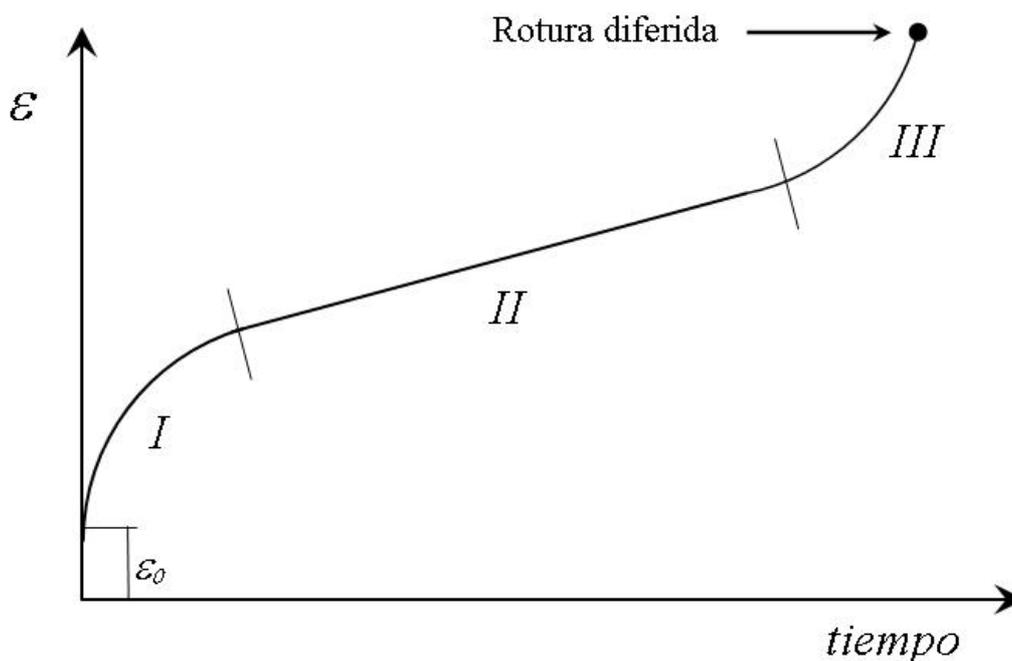


Figura 4: Etapas del proceso de creep en hormigón

- *Creep primario*: éste tiene lugar cuando la tensión aplicada es menor que la resistencia a largo plazo del hormigón.
- *Creep secundario*: se caracteriza por una aceleración de la tasa de deformación de la probeta antes de la falla bajo cargas de larga duración. La etapa secundaria o creep secundario ocurre sólo si el nivel de tensión excede la capacidad de carga a largo plazo del espécimen.
- *Creep terciario*: esta etapa se caracteriza por un rápido aumento de la tasa de deformación, que durante el creep secundario se mantiene prácticamente constante. Se produce previamente al fenómeno denominado rotura diferida.

El creep secundario y el creep terciario son de carácter irrecuperable, y por lo tanto no pueden representarse por medio de la teoría reológica viscoelástica. Es aquí donde cobra relevancia la teoría de la viscoplasticidad. Con respecto a la interpretación de las causas de este fenómeno, diversos autores coinciden en afirmar que el creep se relaciona con la redistribución interna de agua capilar y agua adsorbida (contenida en la pasta cementicia), la cual depende del nivel de tensión por carga externa aplicada a la probeta. En este sentido, existe consenso en que la parte lineal del creep es debida a la naturaleza reológica (viscosa) del gel que compone la matriz cementicia en conjunción con fenómenos de tipo capilar. La disminución de la deformación por fluencia en el tiempo se explica por un incremento de la viscosidad del gel

cementicio sumado a una reducción de su volumen relativo debido a la evaporación del agua y a un fenómeno de cristalización de los componentes del gel. Además, la disminución de la deformación por creep tiene que ver con un proceso de transferencia de tensiones de la pasta cementicia hacia los agregados. La presencia de humedad en la pasta de cemento genera defectos en la microestructura de la misma luego de que ésta se evapora, lo que facilita la deformación por fluencia, aún bajo cargas de baja intensidad. Este fenómeno se potencia por la acción de la viscosidad de los cristales en la pasta de cemento ya fraguada. Investigaciones realizadas por Rossi (1988) indican que en una estructura de hormigón sometida a cargas de larga duración se desarrollan microfisuras que afectan el balance termodinámico del sistema. Las moléculas de agua comienzan a migrar desde los microporos hacia estas microfisuras, aumentando la velocidad del proceso de pérdida de humedad de la pasta cementicia del espécimen. El creep de la pasta de cemento se relaciona con el movimiento interno de agua adsorbida o agua intercrystalina, Neville (1972). Esto se ha confirmado mediante ensayos de carga sobre probetas sometidas previamente a un proceso de secado, las que no evidenciaron deformación por fluencia. La complejidad del fenómeno descrito hace que en el cálculo práctico de la deformación final por fluencia, los códigos de construcciones promuevan fórmulas simplificadas, deducidas en base a ajustes estadísticos de las curvas experimentales y en las que intervienen los principales factores que afectan al fenómeno, dada la imposibilidad de plantear una formulación físico-química que describa el problema con la exactitud suficiente y que al mismo tiempo sea aplicable a nivel práctico.

2 PRINCIPALES FACTORES QUE AFECTAN EL CREEP DEL HORMIGÓN

El principal factor que afecta el valor de la deformación por creep es la intensidad de la carga aplicada y su duración en el tiempo; sin embargo, también ejercen influencia sobre la deformación total la composición del hormigón, las condiciones ambientales, y el tamaño de la probeta. En la composición del hormigón, los principales factores a considerar son la relación agua/cemento, la cantidad de agregados y la calidad y tipo de cemento. Un incremento en el valor de la relación agua/cemento provoca un incremento de la deformación por creep. Los agregados actúan restringiendo la deformación de la pasta de cemento, por lo que un aumento en el tamaño de los mismos conduce a una menor deformación por creep. Los efectos de la composición del hormigón sobre la deformación por creep han sido estudiados por Collins (1989) y Zia et al. (1991), (1993). Respecto a la calidad del hormigón, los experimentos indican que los hormigones de mayor resistencia son menos sensibles a las cargas de larga duración que los hormigones normales. Numerosos ensayos indican que la deformación por creep es proporcional al valor de la carga aplicada para niveles bajos de tensión, es decir, que no superen el 50 % de la resistencia a compresión del material. Este rango de proporcionalidad se debe a que la microfisuración abarca gran parte de la probeta, sin formar bandas localizadas o macrofisuras. Esta es la razón por la cual prácticamente todos los reglamentos de construcciones (ACI 209, CEB-FIP 78, CEB-FIP 90, etc.) emplean ecuaciones de predicción cuyo límite superior coincide con el mencionado, y por lo tanto, sólo son aplicables dentro del rango de proporcionalidad.

3 INTERPRETACIÓN DE LA FISURACIÓN BAJO CARGA LENTA

Las deformaciones diferidas que se producen bajo cargas aplicadas a muy baja velocidad contribuyen a la pérdida de rigidez, lo que se observa claramente en las curvas de la Figura 5. Este proceso de degradación de la estructura del hormigón puede interpretarse a distintas escalas de observación:

- *Escala macro*: el aumento progresivo de las deformaciones diferidas introduce variaciones en la cinética de deformación de la etapa de creep terciario, conduciendo a la falla por fluencia o rotura diferida del elemento estructural.

- *Escala meso*: la disminución de rigidez de la mesoestructura del material corresponde a una serie de procesos irreversibles los cuales se traducen en la aparición de fisuras. Este proceso de fisuración comienza por la apertura de las interfases más débiles (interfases mortero-agregado), y eventualmente se propaga por el seno de la matriz de mortero. Esto resulta finalmente en la separación de la pasta de mortero alrededor de los agregados. Este proceso de fisuración puede conducir a la rotura de la estructura para niveles de tensión equivalentes a la resistencia intrínseca del material, Smadi et al. (1989).

- *Escala micro*: la ruptura de los enlaces entre partículas se produce como resultado de la velocidad de deformación, la cual varía según la configuración particular de la zona donde se desarrolla el proceso de fisuración, el cual se encuentra en estado inestable. La evolución del proceso de fisuración depende de la microestructura (tipo y cantidad de agregados, contenido de agua, contenido de cemento, etc.). En las regiones de la microestructura en donde se producen las menores velocidades, se produce un proceso de relajación de tensiones que a su vez se combina con el proceso de fluencia y deviene en una rotura diferida más lenta y más dúctil, lo que puede manifestarse a nivel mesoestructural mediante la aparición de patrones de fisuración difusos o distribuidos, a diferencia de lo que ocurre con la predicción de fisuración de otros modelos, basados en la viscoelasticidad, los cuales no consideran la influencia del efecto acoplado entre velocidad de deformación y el proceso de creep o relajación y por lo tanto, conducen a una fisuración mas localizada.

En la Figura 5, la curva situada hacia la izquierda representa el caso de carga a una velocidad infinitamente rápida, y representa el límite del comportamiento dinámico. En el otro extremo del gráfico, la curva situada hacia la derecha representa una carga infinitamente lenta, representando el caso cuasi-estático. Teniendo en cuenta estas consideraciones, la velocidad de referencia cuasi-estática $\dot{\epsilon}^*$ puede interpretarse como el límite entre dos fases de comportamiento claramente diferenciadas, a saber: a) la fase cuasi-estática/dinámica, para valores de la velocidad de deformación superiores a $\dot{\epsilon}^*$ y b) la fase cuasi-estática – estática para valores de velocidad de carga menores a $\dot{\epsilon}^*$. Teniendo presentes estas observaciones, la obtención de las curvas isócronas para un modelo que incluya efectos de tasa debe basarse en el denominado "*ensayo de flujo*", propuesto por Chen y Wang (1993), ver Figura 6. En el ensayo propuesto por estos autores se consideran dos etapas: en la primera, la carga se aplica a una velocidad lo suficientemente lenta hasta el instante t_0 , a partir del cual comienza la segunda etapa del ensayo en la cual la velocidad de aplicación de la carga se anula $\dot{\sigma}=0.0$ MPa/seg.

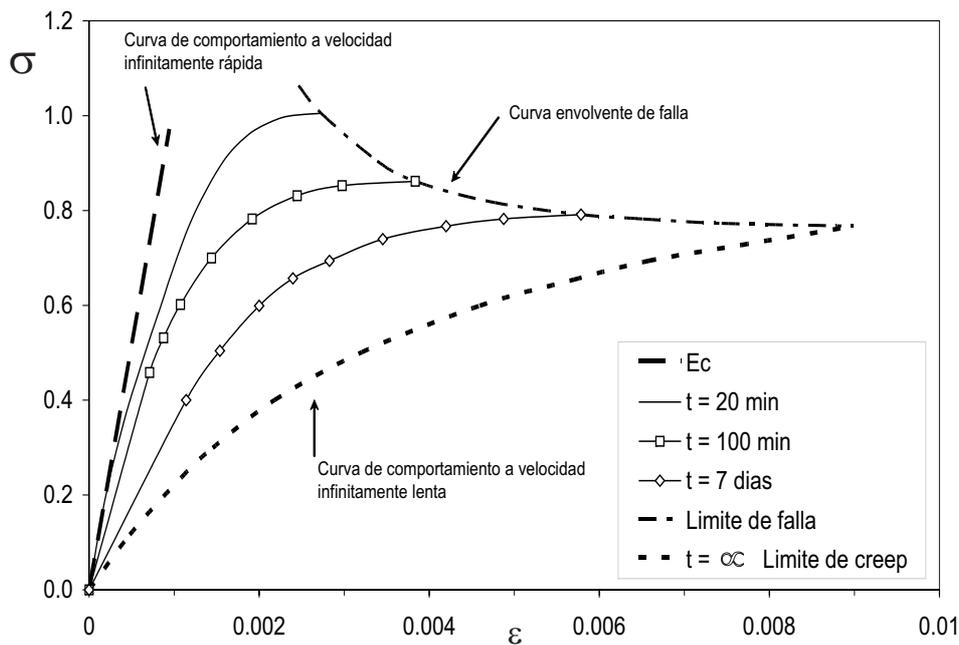


Figura 5: Isócronas de comportamiento del hormigón en compresión, Rusch (1960)

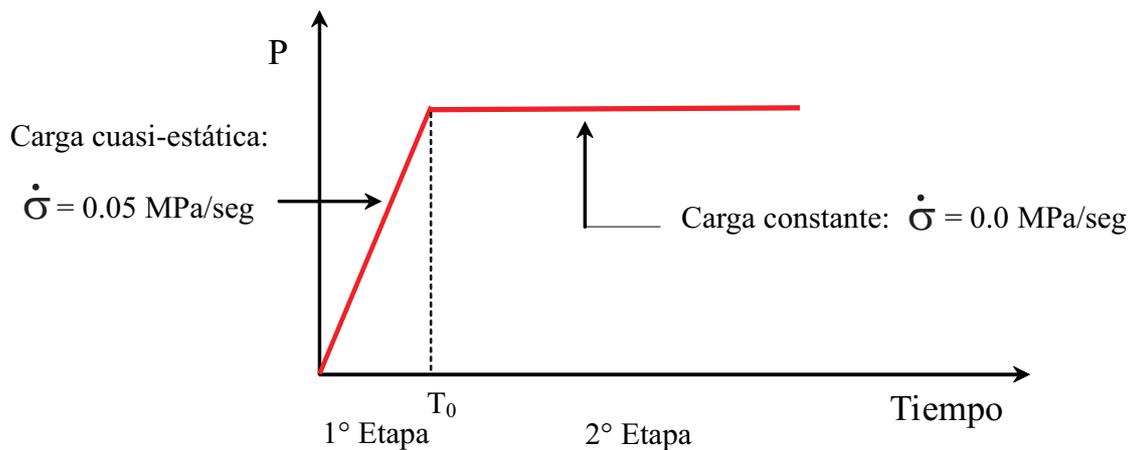


Figura 6: Variación de carga en el ensayo de fluencia, Chen y Wang (1993)

4 MODELACION DEL FENOMENO DE CREEP EN EL RANGO NO-LINEAL

A partir de la complejidad del fenómeno resumida en las secciones anteriores de este trabajo, es evidente que la aplicación de los modelos recomendados por los códigos de construcciones o aun aquellos basados solo en teorías clásicas de la viscoelasticidad como los modelos de Kelvin y Maxwell, no son suficientes a la hora de predecir el comportamiento diferido para construcciones de relevancia, en las cuales resulta fundamental la inclusión de los factores mas importantes que inciden sobre el fenómeno. Como se destaco en párrafos anteriores, los criterios promulgados por los códigos de construcciones si bien son de uso extendido entre los profesionales de la construcción, no son aplicables para el rango no lineal del comportamiento del hormigón. Bajo cargas sostenidas en el tiempo con niveles de la relación carga aplicada/resistencia característica superiores al 50%, el comportamiento en

creep del hormigón es altamente no lineal, ya que para niveles de tensión elevados la fisuración de la matriz conduce a una progresiva degradación de la rigidez estructural lo que se concatena con el aumento de las deformaciones diferidas modificando de este modo la cinética de la deformación del material, el cual ingresa en la denominada rama de creep secundario, para la cual el criterio de superposición deja de ser válido. A partir de esta etapa, el progreso del proceso de fisuración puede conducir a la rama de creep terciario, alcanzándose eventualmente la rotura diferida del material. En relación a este punto, se han realizado diferentes propuestas de modelos numéricos para el rango no-lineal, los que se describen brevemente a continuación:

4.1 Modelo de Bazant y Chern (1985)

Estos autores proponen que en el régimen no lineal en compresión, las deformaciones diferidas (viscoelásticas) principales se afectan por una función que depende del nivel de tensión y de la resistencia del hormigón. Este modelo no considera la no linealidad de las deformaciones de corte. La función $f(\sigma_3, f'_c)$ se activa cuando la tensión principal de compresión está comprendida en el rango $0.4f'_c \leq \sigma_c \leq 0.75f'_c$. La resistencia considerada en esta propuesta introduce la edad del hormigón al entrar en carga y la duración de la carga aplicada.

4.2 Modelo de Rungrojsaratis et al. (1985)

Este modelo combina en serie un modelo elastoplástico y un modelo visco elástico. La ley de comportamiento propuesta conduce a la distinción entre las deformaciones diferidas en el dominio lineal, atribuidas a la parte viscoelástica, mientras que en el dominio no lineal se atribuye toda la deformación diferida al régimen plástico. La introducción de la no linealidad del comportamiento se realiza mediante un parámetro de integridad $K=1-F_i-F_d$, con F_i un coeficiente que considera las deformaciones instantáneas que se producen mientras se aplica la carga inicial y hasta alcanzar el nivel de tensión deseado y F_d el que considera las deformaciones diferidas bajo carga constante. El parámetro K se emplea en forma similar a un parámetro de daño, modificando el valor de la rigidez inicial elástica del material intacto.

4.3 Modelo de Carol y Murcia (1989)

Estos autores proponen un modelo orientado a predecir el comportamiento del hormigón en relación a la velocidad de carga y la rotura diferida. Se compone de un modelo reológico de Maxwell al cual se le modifican los parámetros de rigidez $E_\mu(t)$ cuando el modelo ingresa en el rango no lineal. La rigidez inicial se reemplaza por una rigidez "dañada" $E_\mu^d(t, \varepsilon, \sigma)$ en función del nivel de tensión alcanzado. Este procedimiento genera una evolución de los parámetros del modelo de Maxwell mediante la observación a nivel macroscópico del comportamiento del hormigón dañado. Por el contrario, si se considera la no linealidad material, la rotura por fluencia se traduce mediante una rigidez tangente aparente que tiende a anularse y no permite describir la cinética última del flujo que caracteriza a la etapa de creep terciario.

4.4 Modelo de Bazant y Kim (1991)

Este consiste en un modelo viscoelástico no lineal que se basa en la modificación de la función inversa de la rigidez $C(t,t')$ formulada para el modelo B3 por Bazant et al. (1998). En el dominio no lineal, las deformaciones producidas bajo la aplicación de carga constante se evalúan mediante la introducción de una función $F(\sigma)$ que depende del nivel de tensión. El objeto de la función $F(\sigma)$ es el de amplificar el valor de la deformación diferida prevista por el modelo reglamentario B3, pero la misma no permite considerar el cambio de la cinética del fenómeno al generarse la interacción entre el proceso de fractura y el de deformación diferida. Este modelo permite una buena descripción del comportamiento no lineal para valores de carga aplicada/resistencia superiores al 60%. Sin embargo, cuando la relación anterior se acerca a 1.0, el modelo no predice correctamente la cinética del flujo terciario.

4.5 Modelo de Bazant y Jirasek (1993)

Estos autores proponen modelar la evolución en el tiempo de la apertura de fisura bajo carga constante. La formulación propuesta permite vincular la evolución de la apertura de fisura con la función $J(t,t')$ en vigas entalladas (las vigas consideradas en este estudio reunían las características sugeridas por el comité RILEM para la determinación de la energía de ruptura). Este criterio tiene la desventaja de que su aplicación no es directa para el caso de compresión o tracción simple.

4.6 Modelo de Karihaloo y Santhikumar (1999)

Esta propuesta se basa en un modelo reológico tipo Kelvin, el cual se emplea para captar el efecto del paso del tiempo en la deformación. Este modelo reológico se complementa con un modelo de degradación basado en el concepto del "*Fictitious Crack Model*" para representar la evolución en el tiempo de la apertura de fisura. La magnitud de la fisuración en un instante dado depende de la evolución temporal de las variables del modelo energía de fractura, resistencia, y del nivel de tensión aplicado.

4.7 Modelo de Mazzotti y Savoia (2001)

Se basa en la *Teoría de la Solidificación* propuesta por Bazant et al. (1997) y sobre la Teoría del Daño Continuo, empleando además un modelo generalizado de Maxwell en el cual el módulo de rigidez inicial evoluciona en función de la madurez del material y del estado de degradación del mismo mediante la introducción de un parámetro de daño "d". Los resultados obtenidos con este modelo son cualitativamente representativos de la cinética del flujo terciario en términos del nivel de tensión al que se somete al hormigón, pero no se ha logrado con el mismo una buena correlación con los resultados experimentales disponibles.

Mediante la revisión de los modelos de creep básico presentados es evidente que todavía queda mucho camino por recorrer en cuanto a lograr un modelo que reproduzca adecuadamente el complejo mecanismo de falla del hormigón bajo carga sostenida, sobre todo para altos niveles de la relación carga aplicada/resistencia característica. Esta complejidad se genera en la interacción entre el comportamiento diferido de la pasta de cemento y el proceso de microfisuración que se produce en la misma, sobre todo en las etapas de creep secundario y terciario, en las cuales las propuestas de los reglamentos de

construcciones vigentes y los modelos viscoelásticos usados tradicionalmente no son validas. En este sentido, es evidente que ninguna de las formulaciones constitutivas presentadas reúne los requisitos necesarios a la hora de reproducir fehacientemente el comportamiento reológico del hormigón. A esto se suma el hecho de que los modelos enunciados previamente no incluyen el efecto combinado de la fluencia y el secado, o de la fluencia-secado-temperatura, los cuales en estructuras reales se producen simultáneamente y se retro-alimentan mutuamente. Mas aun, ninguno de los modelos anteriores considera la interacción entre los efectos de creep/relajación y la velocidad de aplicación de la carga, lo cual es evidente a partir de los resultados experimentales disponibles, ver Figura 5. Diversos autores han señalado la relevancia del acoplamiento entre los efectos tiempo y tasa dependientes, ver Bazant y Gettu (1992), Tandon et al. (1995), Etse et al. (2004), Lorefice et al. (2006) entre otros. Estos son los aspectos principales que impulsan el desarrollo permanente de nuevos modelos matemáticos y, en nuestro caso particular, alienta el estudio del potencial de la Teoría de la Viscoplasticidad de Perzyna para representar este complejo fenómeno físico, sobre todo con el fin de mejorar la modelación numérica del comportamiento constitutivo en la etapa de creep terciario o de flujo del hormigón, en la cual se presentan los mayores desafíos desde el punto de vista numérico-computacional.

5 ANALISIS CONSTITUTIVO VISCOELASTICO/VISCOPLASTICO

Se presenta en esta sección un estudio numérico a nivel constitutivo acerca de la potencialidad del uso de modelos viscoelásticos o viscoplásticos combinados con un criterio de aproximación discreta a la fisuración para la predicción de las deformaciones diferidas o del hormigón en el rango no lineal. A tal fin se considera una malla de elementos finitos conformada por dos elementos Q4 entre los cuales se dispone un elemento finito de junta de espesor nulo, ver Figura 7. Esta disposición de la malla permite estudiar el comportamiento diferido de una línea potencial de fisuración como la que se produce en la mesoestructura de una probeta de hormigón bajo diferentes condiciones de carga, ver Carol et al. (1997), López (1999), López et al (2001), Etse et al. (2004).

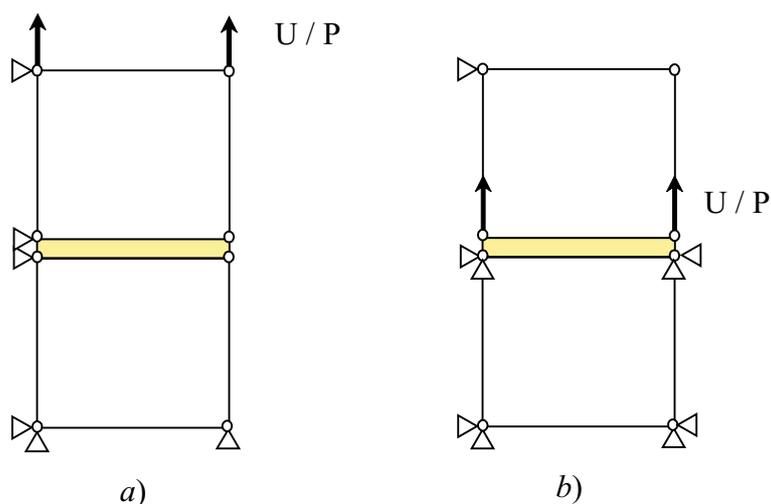


Figura 7: Disposición de la malla-análisis numérico

La extensión del modelo elasto-plástico original propuesto por Carol et al. (1997) se realiza mediante la teoría de la elasto-viscoplasticidad de Perzyna (1963, 1966). En este modelo, la superficie de fluencia que delimita el estado elástico del viscoplástico para una interfase dada toma la forma

$$\bar{F} = \sigma^2 - (c - \tau \operatorname{tg} \phi)^2 + (c - \chi \operatorname{tg} \phi)^2 - (\dot{\lambda} \eta)^{1/N} \quad (1)$$

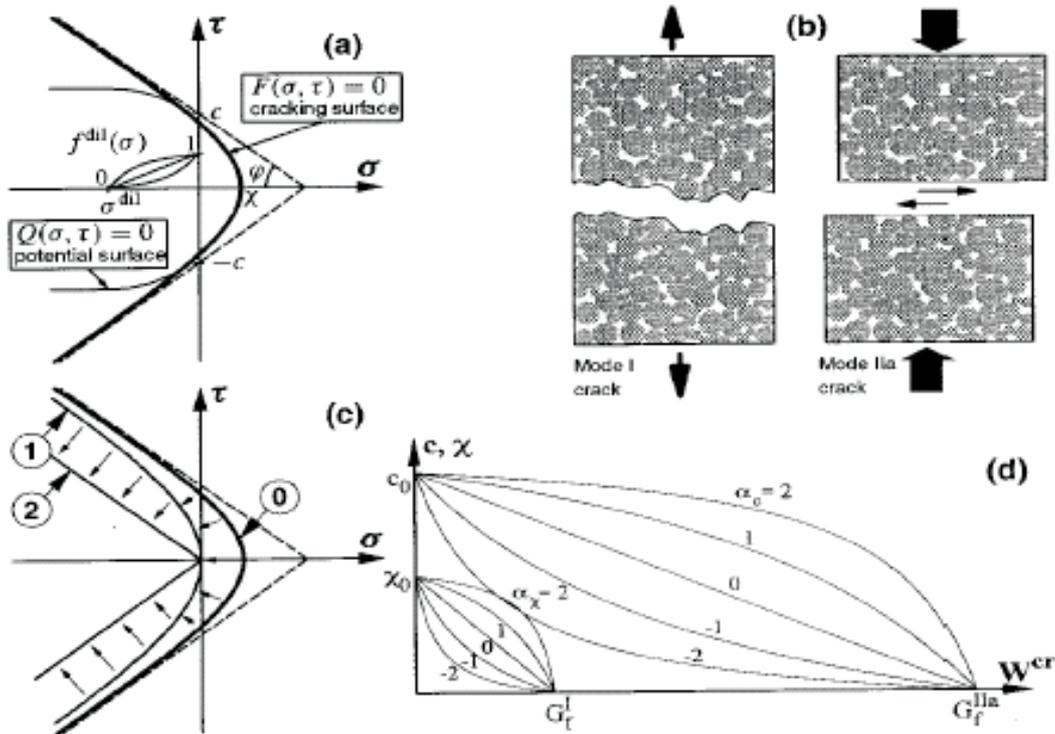


Figura 8: Superficie de falla hiperbólica – modelo inviscido

siendo σ and τ las componentes de tensión normal y tangencial respectivamente, χ la resistencia a tracción (vértice de la hipérbola), c la cohesión aparente (resistencia al corte) y ϕ el Angulo de fricción interna. La energía disipada durante el proceso tiempo-dependiente se expresa como

$$dW^{vcr} = \sigma du^{vcr} + \tau dv^{vcr} \quad \text{if } \sigma \geq 0 \quad (2)$$

$$dW^{vcr} = \tau dv^{vcr} \left(1 - \left| \frac{\sigma \operatorname{tg} \phi}{\tau} \right| \right) \quad \text{si } \sigma < 0 \quad (3)$$

siendo u^{vcr} y v^{vcr} los desplazamientos críticos de ruptura normal y tangencial, respectivamente. El flujo viscoplástico es asociado en tracción, mientras que es no asociado bajo el régimen de compresión de acuerdo con

$$\mathbf{m} = \mathbf{A} \mathbf{n} \quad (4)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2tg\phi(c - \sigma tg\phi) \\ 2\tau \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{if } \sigma > 0 \quad (6)$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{\sigma}^{dil} & f_c^{dil} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{if } \sigma < 0 \quad (7)$$

con \mathbf{A} una matriz de transformación, \mathbf{n} el gradiente a la superficie de fluencia viscoplastica y \mathbf{m} el vector gradiente a la superficie de potencial plástico. Los términos f_c^{dil} and f_{σ}^{dil} tienen en cuenta el efecto de la dilatación en régimen de compresión por medio de una reducción en la componente normal del vector de tensiones. La forma viscoplastica continua de las ecuaciones de la elastoplasticidad clásica para el caso del modelo de interfase pueden escribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^e + \dot{\mathbf{u}}^{ver} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^e = (\mathbf{E})^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{ver}) \quad (10)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}$ representa la tasa de desplazamientos relativos que se supone descompuesta en una parte elástica $\dot{\mathbf{u}}^e$ y otra viscoplastica $\dot{\mathbf{u}}^{ver}$, \mathbf{E} es la matriz de rigidez elástica, la cual posee una estructura diagonal con términos no nulos iguales a la rigidez normal y de corte del material, E_N y E_T , respectivamente. La ecuación (8) implica el desacoplamiento de las tasas de deformación elástica y viscoplastica para un intervalo de tiempo determinado, es decir, $\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$. El sistema de ecuaciones resultante es no-lineal, y se resuelve por medio del Método de Newton-Raphson en el marco de la estrategia de proyección al punto mas cercano o Closest Point Projection Method (CPPM), Etse et al. (1997), (1999). El punto de partida del proceso numérico es el planteo de la denominada condición de consistencia viscoplastica continua, la cual para el modelo de interfase toma la forma general

$$\dot{\bar{F}} = \mathbf{n}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{r}_i \dot{q}_i - \frac{1}{N} \eta (\eta \lambda)^{1/N-1} \quad (11)$$

con

$$\bar{r}_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial W^{ver}} \quad \text{y} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial W^{ver}}{\partial \mathbf{u}^{ver}} \mathbf{m} \dot{\lambda} \quad (12)$$

Los parámetros de estado q_i evolucionan durante el proceso de carga, y son función de los parámetros originales de la superficie, χ , c (ver Figura 8). Los detalles de la implementación

numérica del modelo se presentan en el Apéndice al final de este trabajo. La ley constitutiva hiperbólica se asigna al elemento finito de junta lo que permite que, dependiendo de la velocidad de aplicación de la carga, el efecto del acoplamiento entre los efectos de tasa/tiempo sea más o menos relevante, con la consiguiente incidencia en el proceso de microfisuración de la matriz cementicia. Si bien existen diversas posibilidades de combinaciones que pueden experimentarse con estos modelos, en este trabajo se consideran dos casos extremos de mecanismos reológicos, las que pueden asimilarse en forma ideal a los modelos de comportamiento aceptados para representar el comportamiento diferido de la matriz cementicia que compone la fase evolutiva de la mesoestructura del hormigón. En este sentido, el criterio tradicional empleado hasta el presente por la mayoría de los códigos de construcciones ha sido el de asignar a la matriz cementicia un comportamiento reológico en base a los denominados modelos viscoelásticos de Maxwell o Kelvin. Este criterio ha sido considerado por diferente investigadores tanto a nivel macromecánico como mesomecánico, y sirve para captar el comportamiento de relajación o creep del hormigón, pero sin incluir el efecto de acoplamiento entre el proceso de falla dinámico dependiente de la velocidad de aplicación de la carga y su interacción con el paso del tiempo. La principal ventaja que surge de la aplicación de las teorías viscoelásticas es que pueden brindar resultados acordes con las observaciones experimentales dentro del rango lineal del problema de fluencia, además de la sencillez de su implementación y estabilidad numérica. Por otro lado, la consideración de la Teoría de la viscoplasticidad es una alternativa nueva, que puede complementar aquellos aspectos no cubiertos por las teorías viscoelásticas, sobre todo en el rango no lineal en el cual no son válidos los modelos propuestos por los códigos. Esto surge del hecho de que la teoría de la viscoplasticidad brinda un marco unificado e integral para el tratamiento de los fenómenos tasa-tiempo dependientes, logrando de este modo la inclusión del acoplamiento entre el proceso de falla dinámico y el efecto del tiempo de un modo natural, lo cual es particularmente relevante en el caso del creep del hormigón, sobre todo en las etapas secundaria y terciaria.

6 ANALISIS NUMERICO

Se presentan en esta sección los casos de análisis reológicos de relajación y fluencia básica a nivel constitutivo considerando los modelos viscoelástico de Maxwell y el modelo de interfase hiperbólico elastoviscoplastico basado en la teoría de Perzyna. El esquema de elementos finitos empleado es el de la Figura 7.

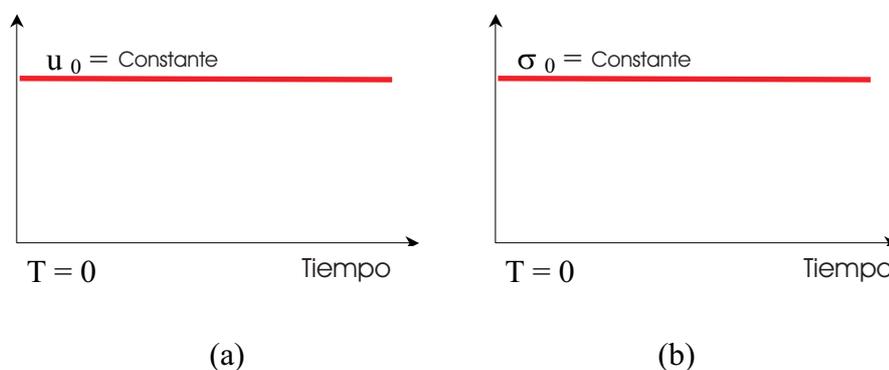


Figura 9: Ensayos típicos de relajación y creep

En el caso del ensayo de relajación de tensiones, Figura 9a), se aplica un desplazamiento normal el cual una vez alcanzado el nivel de tensión deseado se mantiene constante, lo cual resulta en un estado de deformación constante. En el caso del modelo elasto-viscoplástico, el desplazamiento aplicado produce un nivel de tensión tal que excede la resistencia invíscida del material. En este caso, el interés reside en la forma en que evolucionan en el tiempo las tensiones en el modelo. En la Figura 9b) se aplica una carga constante, lo cual resulta en un estado de tensión constante. La magnitud de dicha carga se elige de tal modo que el nivel de tensión resultante excede la resistencia del material, activando de este modo la condición de fluencia definida para el modelo y produciendo el desplazamiento diferido en el material, lo cual se conoce como creep o fluencia básica. El análisis numérico del caso de relajación de tensiones se realiza bajo un estado de tracción uniaxial con las condiciones de aplicación de carga de la Figura 7b). Los parámetros adoptados para el modelo fueron los siguientes: $E_N = 1.E7$ MPa/m, resistencia límite a tracción $\chi = 2.0$ MPa, $G_f^I = 0.00003$ MPa/m, $G_f^{II} = 10 G_f^I$. Imponiendo un desplazamiento normal $u_0 = 3.E-7$ m, se genera un estado de tensión normal uniforme en la interfase de 3.0 MPa, el cual excede en un 50 % la resistencia elastoplástica. Los resultados de las simulaciones numéricas se presentan en la Figura 10 para los modelos elastoplástico y viscoplástico. En la misma figura se ilustran diversos casos considerando varios valores del parámetro de viscosidad η . Para valores elevados del parámetro viscoso, la solución viscoplástica tiende a alcanzar el límite elastoplástico en un instante de tiempo muy posterior, es decir, se requiere mayor tiempo para relajar el estado tensional a la superficie de fluencia invíscida, mientras que para valores menores de la viscosidad esto ocurre en un instante de tiempo anterior. Es interesante resaltar aquí que la viscoplasticidad permite que el estado tensional exceda el límite de resistencia, lo cual en los modelos elastoplásticos no es posible debido a la restricción impuesta por la condición de fluencia $F(\sigma, q)$. Esta es una de las ventajas de la viscoplasticidad, puesto que desde el punto de vista numérico puede proveer un algoritmo de solución más robusto y estable que los algoritmos tradicionalmente empleados en la teoría de la elastoplasticidad clásica. Desde el punto de vista ingenieril, permite distinguir apropiadamente los conceptos de capacidad de carga rápida o de corta duración y la capacidad de carga a largo plazo (resistencia ante cargas sostenidas o de larga duración). En la Figura 11 se comparan una solución viscoelástica obtenida mediante el modelo reológico clásico de Maxwell versus tres variantes del modelo viscoplástico para un mismo tiempo de relajación natural $t_* = \eta/E_n$. En estos ensayos, se emplea el modelo viscoplástico de junta con la configuración de la Figura 7b), mientras que los Q4 se mantienen elásticos. El caso viscoelástico corresponde al empleo del modelo de Maxwell sólo en los elementos de medio continuo con la configuración de la Figura 7a), considerando una malla de las mismas dimensiones y junta elástica (sin comportamiento reológico) con el fin de comparar las respuestas numéricas de ambos casos. A partir de estos resultados, es evidente que mientras la solución viscoplástica perfecta relaja las tensiones hasta alcanzar el límite de resistencia, en el caso en el que existe ablandamiento ($H_p < 0$) la curva de relajación se estabiliza a un valor de tensión menor al límite teórico de resistencia elastoplástica. Por el contrario, para situaciones en régimen de endurecimiento ($H_p > 0$) se obtiene una curva de relajación que alcanza su mínimo en un valor de tensión superior al límite mencionado. Finalmente, el caso viscoelástico relaja las tensiones hasta anularlas, debido a que en estas formulaciones no existe un límite de resistencia definido, y el efecto del paso del tiempo es el de relajar el nivel de tensión, independientemente del nivel de tensión alcanzado. Estos ejemplos indican claramente desde el punto de vista físico el significado del parámetro viscoso, el cual en el modelo basado en la viscoplasticidad se relaciona con el tiempo que necesita el dispositivo

reológico para relajar el estado tensional hasta alcanzar el estado final, representado por la solución elastoplástica.

La teoría de la viscoplasticidad se emplea ahora para modelar el problema de creep y, eventualmente captar el fenómeno de rotura diferida. Consideremos un modelo elasto-viscoplástico, e imaginemos que este modelo se emplea para obtener una curva tensión-deformación a muy baja velocidad. Puede probarse que en este caso, la formulación viscoplástica recupera la formulación invíscida.

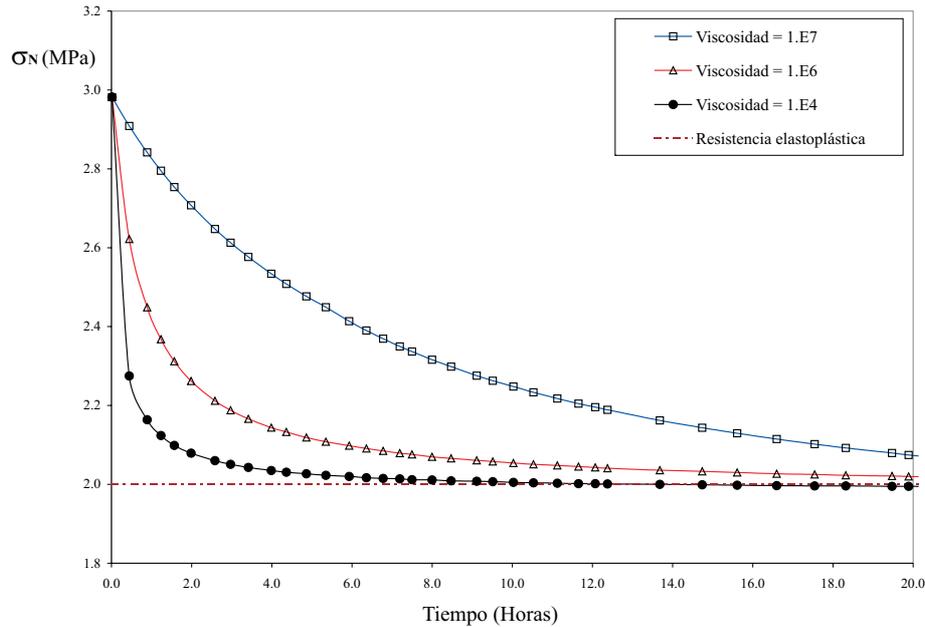


Figura 10: Incidencia del parámetro de viscosidad

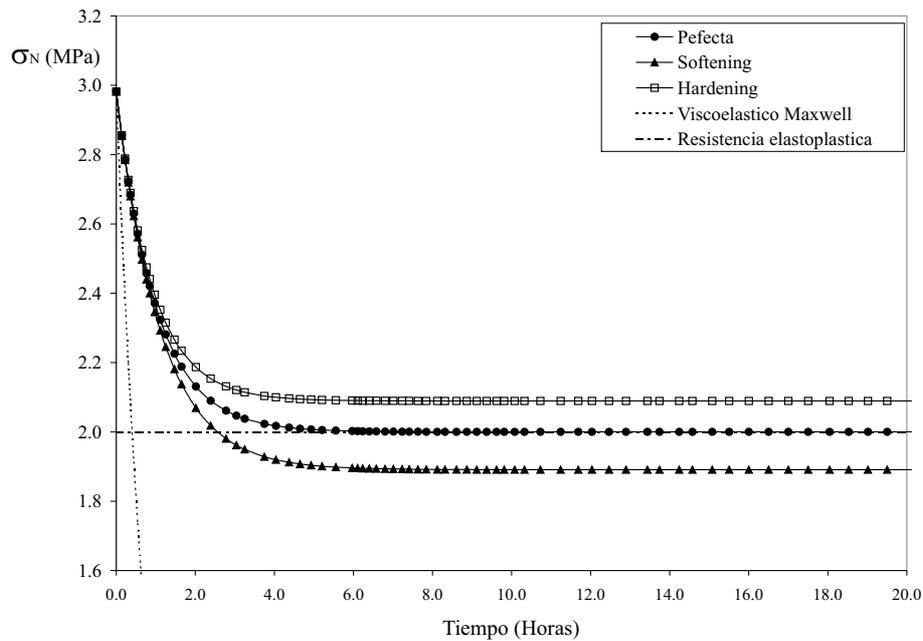


Figura 11: Ensayo de relajación - comparación de diversos modelos reológicos

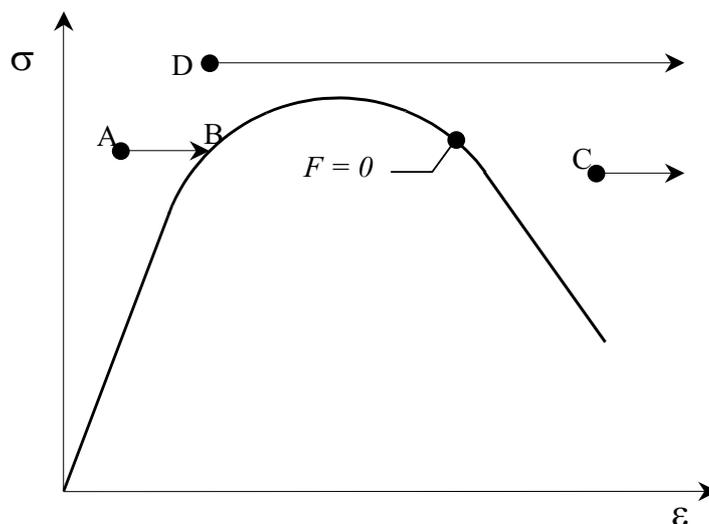


Figura 12: Curva Tensión-deformación cuasi-estática

Supongamos que el estado de tensión cae en el punto A o C de la figura, y consideremos la respuesta de un material viscoplástico para un estado $\dot{\sigma} = 0$, es decir, el estado de tensión se mantiene constante. En ambos casos, la deformación viscoplastica tenderá a incrementarse. Si el estado de tensión en consideración es el del punto A, situado antes de alcanzar el límite de la curva σ - ϵ , como la tensión se mantiene constante y la deformación viscoplástica crece, eventualmente el estado de tensión se moverá del punto A al B, sobre la curva, y por lo tanto la deformación viscoplástica tiende a un límite. Sin embargo, si se considera un punto como el C, situado en la rama de ablandamiento de la curva, y se supone un estado de tensión constante, la deformación diferida viscoplastica puede crecer en forma ilimitada, alejándose de la curva estática. Se debe tener presente que para los puntos A y C, se cumple $F > 0$, por lo que podemos generalizar este razonamiento y afirmar que, para un estado de tensión constante, un comportamiento en endurecimiento implica $\dot{F} < 0$ mientras que un comportamiento en ablandamiento implica $\dot{F} > 0$. Lo mismo puede concluirse para un estado tensional como el correspondiente al punto D de la figura. La performance de la implementación numérica del modelo de interfase bajo estados de tensión constante se verifica en los ejemplos siguientes para la formulación con régimen de pospico de ablandamiento. Teniendo presentes las consideraciones anteriores, analicemos ahora la respuesta numérica del modelo de junta considerando el esquema de carga de la Figura 7b), y empleando los mismos parámetros materiales. Dado que la ley hiperbólica de falla tiene un comportamiento perfectamente elástico para valores de tensión inferiores al límite de rotura en tracción, no existe comportamiento diferido para niveles de carga que provoquen estados tensionales por debajo de dicho límite. Ahora bien, una vez alcanzado el nivel del límite de resistencia, la formulación ingresa directamente en la rama de ablandamiento, por lo que se tiene $\dot{F} > 0$ y nos encontramos en el caso C de la Figura 12, ver Figura 13. En ésta puede apreciarse el aumento de los desplazamientos diferidos para diferentes valores del parámetro de viscosidad, con una aceleración progresiva de la tasa de deformación a medida que disminuye el valor de viscosidad empleado. El análisis de la Figura 13 implica que la formulación de junta viscoplástica ingresa directamente en la denominada rama de creep terciario, a diferencia de lo que ocurre en los modelos viscoelásticos clásicos, que cubren las

denominadas etapas de creep primario y secundario, con respuestas típicas similares a las mostradas en la Figura 1, sin posibilidades de reproducir la rama de creep terciario.

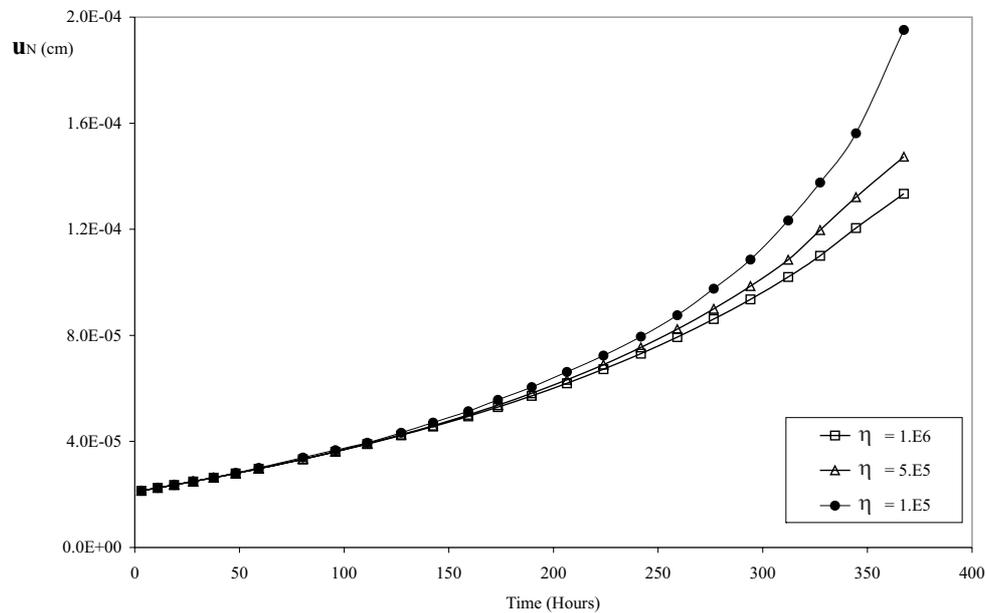


Figura 13: Ensayo de creep – modelo de junta viscoplastico

7 CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos se deduce que ambas teorías por si solas son incapaces de predecir en forma precisa el comportamiento observado experimentalmente de estructuras reales de hormigón. Esto se debe a que la teoría de la viscoelasticidad no es apta para captar la fuerte dependencia que existe entre el nivel de tensión aplicada y la magnitud de la deformación diferida correspondiente. Otra limitación de los modelos de creep basados en estas teorías reológicas reside en el hecho de que no incluyen la interacción entre el efecto de la tasa de velocidad y el paso del tiempo, siendo incapaces de reproducir la cinética de deformación que caracteriza a las ramas de creep secundario y terciario. Por otro lado, si bien los modelos basados en la teoría viscoplastica incluyen de manera intrínseca el acoplamiento de los efectos de tasa/tiempo y por ende, son capaces de reproducir la cinética del fenómeno para niveles altos de la relación de tensiones, esta teoría presenta una limitación importante, que reside en el hecho de que para que exista comportamiento diferido o de relajación de tensiones, es necesario que se active la condición de fluencia viscoplastica. Esto implica que, para valores de tensión muy bajos en relación a la resistencia del material, esta teoría no predice comportamiento reológico, lo cual no esta de acuerdo con las observaciones experimentales de estructuras de hormigón reales, situación que los modelos basados en la viscoelasticidad reproducen claramente. De este análisis surge que un modelo realista, que sea aplicable a todo el espectro posible de estados tensionales a los que pueda estar sometida una estructura real debería incluir a ambas teorías reológicas, con especial énfasis en la viscoelasticidad para niveles de tensión bajos, y con predominancia de la viscoplasticidad para los niveles de tensión que superen el 50 % de la resistencia característica del hormigón.

REFERENCIAS

- Bazant, Z.P., Chern, J.C., "Triple Power Law for Concrete Creep". *Journal of Eng. Mech. ASCE*, 111, pags. 63-83, (1985).
- Bazant, Z.P., Bai S.P. and Gettu, R., "Fracture of Rock: Effect of loading rate". *Engrg. Fracture Mechanics*, 45, Págs. 393-398, (1995).
- Bazant, Z.P., Jirasek, M. "R-Curve Modeling of Rate and Size Effects in Quasi-Brittle Materials". *Int. Journal of Fracture*, 62, pags. 355-373, (1993).
- Bazant, Z.P. and Kim, J.K., "Improved Prediction Model for time-dependent deformations of concrete. Part 2: basic creep". *Materials and Structures*, 24 (144), pags. 409-421, (1991).
- Carol, I., Murcia, J., "A Model for Non-Linear Time Dependent Behavior of Concrete in Compression Base on a Maxwell Chain with Exponential Algorithm". *Materials and Structures*, 22, pags. 176-184, (1989).
- Carol, I., Prat, P. and Lopez, C.M., "A Normal/Shear Cracking Model. Interface Implementation for Discrete Analysis". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 123(8), pp. 765-773, (1997).
- Chen, Z. and Wang, M.L., "A partitioned - solution method with moving boundaries for nonlocal creep damage for concrete". *Proc. Creep and shrinkage of concrete, Fifth international RILEM symposium, Barcelona-London*, Págs. 393-398, (1993).
- Collins, T.M., "Proportioning high-strength concrete to control creep and shrinkage". *ACI Materials Journal*, 86, (6), Pags. 576-580, (1989).
- Etse, G., Lorefice, R., Carosio, A. and Carol, I., "Rate Dependent Interface Model Formulation for Quasi-Brittle Materials". *Proc. International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures - FRAMCOS 5. Boulder, Colorado, USA*, pp. 301-305, (2004).
- Etse, G., Lorefice, R., López, C.M. and Carol, I., "Meso and Macromechanic Approaches for Rate Dependent Analysis of Concrete Behavior". *International Workshop in Fracture Mechanics of Concrete Structures. Vail, Colorado, USA*, (2004).
- Etse, G., Carosio, A. and Willam, K., "Limit State and Localization of Perzyna Viscoplastic Material". *Int. Journal on Cohesive and Frictional Materials*, (23), 1, pp. 32-42, (1997).
- Etse, G., Willam, K., "Failure Analysis of Elastoviscoplastic Material Models". *Journal of Engrg. Mechanics*, (125), 1, pp. 60-69, (1999).
- Ishai, O., "Influence of sand concentration on deformation of mortar beams under low stresses". *ACI Journal*, (58), Págs. 611- 622, (1962).
- Karihaloo, B.L., Santhikumar, S., "Application of visco-elastic tension-softening constitutive model to cracked and ageing concrete. *Construction and Building Materials*, 13 (1), pags. 15-21, (1999).
- López Garello, C.M., "Análisis Microestructural de la Fractura del Hormigón Utilizando Elementos Tipo Junta. Aplicación a diferentes Hormigones". *Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain*, (1999).
- Lorefice, R., Etse, G., C.M. Lopez and I. Carol, "Mesomechanic Analysis of Time Dependent Concrete Behavior". *EURO-C 2006, Computational Modeling of Concrete Structures. Mayrhofen, Austria*, (2006).
- Mazzotti C., Savoia, M. and Tralli, A., "An Isotropic Model for Non-linear Creep of Concrete in Compression. *Fracture Mechanics of Concrete Structures, De Borst & al. (Eds)*, pags. 255-262, (2001).
- Neville, A. (1972), "Properties of concrete". *North Holland Publishing Company, Amsterdam. The Netherland*.

- Neville, A. (1996), "Creep of concrete: plain, reinforced and prestressed". North Holland Publishing Company, Amsterdam. The Netherland.
- Perzyna, P., "The Constitutive Equations for Rate Sensitive Materials". Quarter of Applied Mathematics, Vol. 20, pp. 321-332, (1963).
- Perzyna, P., "Fundamental Problems in Viscoplasticity". Advances in Applied Mechanics, 9, pp. 244-368, (1966).
- Rossi, P., "Une nouvelle approche concernant le fluage et la relaxation propres du beton". Bull. Liais. Lab. Ponts et Chaussees, 153, Págs. 73-76, (1988).
- Rusch, H., "Researchs toward a general flexural theory for structural concrete". ACI Journal, Vol 32, 1, Págs. 1-28, (1960).
- Rugrojsaratis, V. Miromoto, H., Ueda, T. and Suzuki, S., "Time-dependent deformation behavior of concrete under high tensile stress and high temperature". Transactions of The Japan Concrete Institute., Vol. 7, III 4/A, pags. 233-240, (1985).
- Smadi, M.M. and Slate, F.O., "Microcracking of high and normal strength concrete under short and long term loadings". ACI Materials Journal, Vol 2, 86, Págs. 117-127, (1989).
- Tandon, S., Faber K.T., Bazant, Z.P. and Li, Y.N., "Cohesive crack modeling of influence of sudden changes in loading rate on concrete fracture". Engrg. Fracture Mechanics, 52(6), págs. 987-997, (1995).
- Zia, P., Leming, M.L. and Ahmad, S.H., "High-Performance concrete: A state-of-the-Art report". Strategic Highway Research Program, National Research Council, Washington, D. C. SHRP-C/FR-91-103; PB92-130087, (1991).
- Zia, P., Leming, M.L., Ahmad S.H., Schemmel, J.J. and Elliot, R.P., "Mechanical behavior of high performance concretes". Strategic Highway Research Program, National Research Council, Washington, D. C., SHRP-C-365, (1993).

APENDICE

ALGORITMO DE INTEGRACION – VISCOPLASTICIDAD CONTINUA

El siguiente cuadro resume el algoritmo de integracion del modelo viscoplástico, Ver Etse y Carosio, (2000), Carosio (2001), Etse y Lorefice (2004).

1. <u>Datos :</u>
a) Incremento de carga deformación en el incremento n , ${}^n\Delta\varepsilon$.
b) Tensión y variables de estado en el incremento $n-1$, $\{{}^{n-1}\sigma, {}^{n-1}q\}$.
2. <u>Predictor :</u>
a) Predictor de tensión ${}^n\sigma^{trial} = {}^{n-1}\sigma + \mathcal{E} : {}^n\Delta\varepsilon$
b) Predictor de variable de estado ${}^nq^{trial} = {}^{n-1}q$; ${}^n\lambda^{trial} = {}^{n-1}\lambda$
3. <u>Condición de Fluencia :</u> Si ${}^n\bar{F}^{trial} = \bar{F}({}^n\sigma^{trial}, {}^nq^{trial}, {}^n\lambda^{trial}) \leq 0$
a) Actualización ${}^n\sigma = {}^n\sigma^{trial}$; ${}^nq = {}^nq^{trial}$; ${}^n\lambda = 0$
b) salto a <u>Fin :</u>
4. <u>Corrector :</u>
a) <u>Inicialización :</u>
$i = 0$; ${}^i\Delta\lambda = 0$; ${}^id\Delta\lambda = 0$; ${}^i\sigma = \sigma^{trial}$; ${}^iq = q^{trial}$;
${}^i\lambda = \lambda^{trial}$; ${}^iF = F^{trial}$
b) <u>Iteración :</u>
1) ${}^in = i(\frac{\partial F}{\partial \sigma})$; ${}^im = i(\frac{\partial F}{\partial q})$; ${}^iM = i(\frac{\partial F}{\partial \lambda})$; ${}^ih = h({}^i\sigma, {}^iq)$; ${}^iw = i(\frac{\partial F}{\partial q})^T h$
${}^i\bar{F} = i(\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{\partial \psi^{-1}(\lambda n)}{\partial q})^T h$; ${}^i\bar{z} = i(-\frac{\partial \psi^{-1}(\lambda n)}{\partial \lambda})$
2) ${}^i\mathcal{E}^m = i(\mathcal{E}^{-1} + \Delta\lambda M)^{-1}$
3) $i \leftarrow i + 1$
4) ${}^id\Delta\lambda = -\frac{{}^{i-1}\bar{F}}{i-1[-n:\mathcal{E}^m; m+n+\frac{1}{2n}]}$
5) ${}^i\Delta\lambda = {}^{i-1}\Delta\lambda + {}^id\Delta\lambda$
6) ${}^i\Delta\sigma = \mathcal{E} : (\Delta\varepsilon - {}^i\Delta\lambda m) \rightarrow {}^i\sigma = {}^{n-1}\sigma + {}^i\Delta\sigma$
7) ${}^i\Delta q = {}^i\Delta\lambda \alpha \rightarrow {}^iq = {}^{n-1}q + {}^i\Delta q$
8) ${}^i\lambda = i(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t})$
9) ${}^iF = F({}^i\sigma, {}^iq, {}^i\lambda)$
c) <u>Condición de convergencia :</u> Si $ {}^i\bar{F} > \delta$ y $i < maxiter$ ir a <u>Iteración :</u>
d) <u>Actualización</u> ${}^n\sigma = {}^i\sigma$; ${}^nq = {}^iq$; ${}^n\lambda = {}^i\lambda$
5. <u>Fin :</u>

IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL DE LA CADENA VISCOELASTICA DE MAXWELL

Los modelos numéricos viscoelásticos pueden desarrollarse en forma integral o diferencial. En el caso de las formas integrales, la solución de la integral de Volterra requiere la evaluación de la historia de tensión para cada incremento que compone la misma. La implementación del algoritmo correspondiente implica el uso de un espacio de almacenamiento muy grande a fin de salvar las variables involucradas en cada paso de cálculo.

Por otro lado, las formulaciones diferenciales sólo requieren el almacenamiento en memoria del valor de la tensión para el paso de tiempo previo. La respuesta tensional en un problema de esta clase puede expresarse como

$$\{\sigma(t)\} = R(t, t')(D^*)\{\varepsilon(t')\} \tag{A1}$$

donde D^* es la matriz elástica dividida por el módulo de Young, t' es el tiempo al cual se aplica la carga, $\varepsilon(t')$ es el vector deformación, y $R(t, t')$ es la función de relajación de Dirichlet expandida en serie

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^n E_{\mu}(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau_{\mu}}} = \sum_{\mu=1}^{n-1} E_{\mu}(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau_{\mu}}} + E_{\infty}(t') \tag{A2}$$

con n el número de términos de la serie; $E_{\mu}(t')$ representa los coeficientes elásticos de la cadena (a determinar), y $\tau_{\mu} = \eta_{\mu}(t')/E_{\mu}(t')$ representa los tiempos de relajación. Las tensiones dadas en la (A1) se evalúan en función de los términos involucrados en la cadena de Maxwell como

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu}(t) \tag{A3}$$

Considerando el principio de superposición de Boltzmann, las tensiones dadas por la (A3) pueden aplicarse en pasos discretos, pero para ello previamente debe establecerse una hipótesis para los elementos de la cadena en el intervalo de análisis $[t_r, t_{r-1}]$, a saber: que los coeficientes elásticos E_{μ} se consideran constantes durante el intervalo de tiempo y se calculan usando el valor medio en dicho intervalo. Esto nos conduce a la forma incremental de la ecuación constitutiva viscoelástica

$$\{\Delta\sigma(t_r)\} = E''(t_r)(D^*)\left(\{\Delta\varepsilon(t_r)\} + \{\Delta\varepsilon^c(t_r)\}\right) \tag{A4}$$

con

$$\Delta\varepsilon^c(t_r) = \frac{1}{E''(t_r)} \sum_{\mu=1}^n \left[\sigma_{\mu}(t_{r-1}) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) \right] \tag{A5}$$

La evaluación de la tension en un elemento de la cadena en el instante t toma la forma

$$\{\sigma_{\mu}(t_r)\} = \{\sigma_{\mu}(t_{r-1})\} e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} + [D^*] \frac{\tau_{\mu}}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) E_{\mu}(t_{r1/2}) \Delta\varepsilon(t_r) \tag{A6}$$

mientras que el efecto del envejecimiento en el tiempo se incluye mediante el módulo evolutivo E'' en la forma:

$$E''(t_r) = \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\tau_{\mu}}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) E_{\mu}(t_{r1/2}) \right] \tag{A7}$$