

TEORIA MODIFICADA DEL SEGUNDO GRADIENTE EN VIBRACIONES NATURALES DE SISTEMAS DE MICROVIGAS TIMOSHENKO POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Daniel H. Felix^a, Graciela I. Guerrero^{a,b} y Diana V. Bambill^{a,c}

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Ingeniería UNS-CIC, Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dhfelix@uns.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

^b*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Km 4, 9005, Comodoro Rivadavia, Argentina, graisague@hotmail.es; <http://www.unp.edu.ar>*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dbambill@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

Palabras Clave: Timoshenko, sistemas de microvigas, frecuencias, gradiente, método de elementos finitos, parámetro de escala de longitud.

Resumen. En este trabajo se presenta un análisis numérico de las vibraciones naturales de micro-actuadores y micro-sensores, modelados como sistemas de microvigas Timoshenko. Dichos sensores son utilizados, entre otros, en dispositivos micro-electro-mecánicos y en dispositivos nano-electro-mecánicos, los cuales resultan de aplicación creciente, especialmente en la industria nano-tecnológica. El modelo se basa en la teoría modificada del segundo gradiente de desplazamientos, que contempla la utilización de tres parámetros de escala de longitud del material para tomar en consideración el efecto de micro-escala de la estructura. Una contribución de interés es que, el modelo propuesto considera dichos efectos de escala en la modelización de todo el sistema de microvigas. El algoritmo desarrollado, se implementa mediante la aplicación del método de elementos finitos, utilizando elementos viga de dos nodos con cuatro grados de libertad por nodo.

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios numéricos presentados aquí son una continuación de trabajos anteriores realizados por los autores, [Guerrero et al. \(2015, 2016\)](#); [Felix et al. \(2015, 2016\)](#). Los modelos de microvigas analizados están basados en la Teoría de viga Timoshenko, que considera la deformación por corte o distorsión de la sección transversal y el efecto de la inercia rotatoria, [Magrab \(2012\)](#) y en la teoría del segundo gradiente de desplazamientos, que contempla los efectos de escala de longitud del material, [Mindlin y Eshel \(1968\)](#); [Kong et al. \(2009\)](#).

Las diversas teorías que consideran los efectos de escala de longitud, también denominadas tamaño-dependientes, tienen sus orígenes en la teoría del continuo generalizado, iniciada por los hermanos Cosserat a comienzos del siglo pasado, [Cosserat y Cosserat \(2009\)](#). Básicamente permiten contemplar la presencia en el continuo de partículas de tamaño finito, haciendo que el material utilizado sea modelado en forma más realista, especialmente cuando éste es heterogéneo o bien cuando las dimensiones del modelo son del orden de los parámetros de escala de longitud del material, [Eringen \(2001\)](#)

Existen en la actualidad diversas teorías que abarcan diferentes campos de la mecánica del continuo, de las cuales nos interesan en particular aquellas que tratan con sólidos elásticos. En dicho campo, se destacan entre las precursoras, la teoría micro-polar de Eringen, [Eringen \(1966\)](#) y las contribuciones de Mindlin, [Mindlin \(1964\)](#), al considerar gradientes de deformación de orden superior.

Sin embargo las aplicaciones prácticas en los años 60 eran incipientes y por otra parte, los desarrollos matemáticos que requerían la implementación de dichas teorías eran excesivamente extensos y complejos. En años relativamente recientes la brecha mencionada se ha reducido considerablemente debido a que las aplicaciones industriales han crecido exponencialmente y por otra parte han aparecido en la literatura versiones de las teorías iniciales que contienen una reducción sustancial en la complejidad y extensión de su fundamentación matemática.

Entre las investigaciones teóricas pueden citarse, [Yang et al. \(2002\)](#); [di Prisco et al. \(2002\)](#); [Ma et al. \(2008\)](#); [Asghari et al. \(2010\)](#), entre muchísimas otras y entre las investigaciones experimentales se pueden nombrar [Fleck et al. \(1994\)](#); [Lam et al. \(2003\)](#); [Li et al. \(2007\)](#); [Kahrobayana et al. \(2013\)](#).

La totalidad de las teorías existentes, prácticamente sin excepción, muestran que los efectos de escala de longitud en un componente estructural no pueden despreciarse sin perder un elevado grado de precisión en los resultados, cuando las dimensiones mínimas de tal componente son del orden de los parámetros de escala de longitud del material utilizado para construirlo.

En primer lugar se definen los desplazamientos que considera la teoría de viga Timoshenko inextensible y luego se describen los cuatro tipos de componentes de tensión y deformación que contempla la teoría del segundo gradiente de desplazamientos.

Una vez definidas las componentes de tensión y deformación se formula la ecuación gobernante del modelo planteado, mediante la aplicación del principio de Hamilton. Finalmente se resuelve la misma con el método de elementos finitos, utilizando un elemento especialmente formulado para microvigas por Zhang y coautores, [Zhang et al. \(2014\)](#).

2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS RESUELTOS

Se presentan tres modelos de microvigas Timoshenko con condiciones de borde clásicas y un apoyo simple intermedio, como se muestra esquemáticamente en la Figura 1. En la misma, L_c indica la posición del apoyo intermedio, h es el espesor de la microviga, y L es su longitud total.

Para cada caso analizado, se obtuvieron los dos primeros coeficientes de frecuencia natural Ω_i , siendo los parámetros que diferencian cada modelo las relaciones adimensionales h/l y L_c/L .

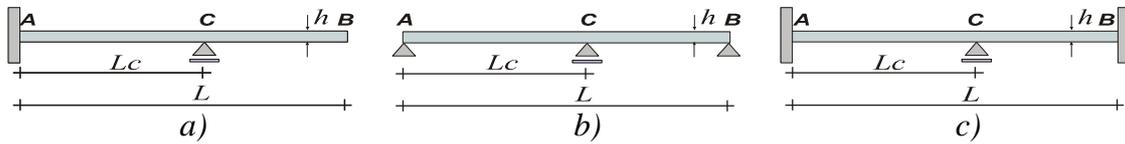


Figura 1: Vista esquemática de los modelos analizados, teniendo en cuenta diferentes condiciones de borde.

3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Los modelos analizados se basan en la Teoría de vigas Timoshenko para establecer la cinemática de la deformación y en la Teoría del segundo gradiente de desplazamientos, para determinar las componentes de tensión y deformación presentes cuando se consideran los efectos de escala de longitud del material.

Luego se utiliza un principio variacional para determinar la forma débil de las ecuaciones gobernantes. Finalmente, como se comentó anteriormente, se aplica el método de elementos finitos para obtener una solución aproximada del problema.

3.1. Cinemática de la deformación

Dado que la teoría de vigas Timoshenko considera la distorsión de la sección transversal de la viga, se adopta como funciones incógnitas primarias e independientes entre sí, el desplazamiento w y el giro de la sección transversal φ , ambas dependientes de la variable espacial global \bar{x} y del tiempo t . Se tiene entonces:

$$w = w(\bar{x}, t) \tag{1a}$$

$$\varphi = \varphi(\bar{x}, t) \tag{1b}$$

Además, cuando se considera el eje neutro inextensible, los corrimientos axiales u , vienen dados de acuerdo a la hipótesis de Navier, por:

$$u(\bar{x}, \bar{z}, t) = \bar{z} \varphi(\bar{x}, t) \tag{2}$$

3.2. Teoría del segundo gradiente

La teoría del segundo gradiente tiene en cuenta cuatro tipos de componentes de deformación que se obtienen a partir de las ecuaciones cinemáticas y cuatro tipos de componentes de tensión que se obtienen a partir de las respectivas componentes de deformación y de las ecuaciones constitutivas. Las expresiones generales de las mismas son las siguientes:

- Componentes clásicas de deformación:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \tag{3}$$

- Tensor de tensiones, para un material isótropo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (4)$$

siendo δ_{ij} , la delta de Kronecker, mientras que λ y μ son las constantes elásticas de Lamé, que se expresan en la forma:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5)$$

siendo E , el módulo de elasticidad del material y ν , el módulo de Poisson.

- Componentes del gradiente de rotación o tensor de curvatura: Solo interviene la parte simétrica de dicho gradiente. Las componentes del tensor de curvatura, se expresan del siguiente modo:

$$\chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{4} \left(e_{ipq} \frac{\partial \epsilon_{qj}}{\partial \bar{x}_p} + e_{j pq} \frac{\partial \epsilon_{qi}}{\partial \bar{x}_p} \right) \quad (6)$$

en la cual e_{ipq} ; $e_{j pq}$ son las componentes del tensor de permutación de Levi-Civita y las ϵ_{qi} ; ϵ_{qj} , son las componentes de deformación definidas en la ec. (3)

- Tensor de cupla: Las componentes del tensor de cupla se definen de la siguiente forma:

$$m_{ij}^{(s)} = 2 \mu l_2^2 \chi_{ij}^{(s)} \quad (7)$$

siendo l_2 , uno de los tres parámetros de escala de longitud del material considerados en la teoría del segundo gradiente.

- Componentes del gradiente de dilatación: son de orden superior y resultan uniformes en todas las direcciones. Se expresan en la forma:

$$\gamma_i = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial \bar{x}_i} \quad (8)$$

- Tensor de dilatación: Son las componentes de tensión que surgen por la dilatación del material. las mismas vienen dadas por la siguiente ecuación constitutiva:

$$p_i = 2 \mu l_0^2 \gamma_i \quad (9)$$

en la que, la constante l_0 es también uno de los parámetros de escala de longitud del material.

- Componentes desviadoras de orden superior:

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^{(s)} - \frac{1}{5} \left(\delta_{ij} \eta_{mmk}^{(s)} + \delta_{jk} \eta_{mmi}^{(s)} + \delta_{jk} \eta_{mmj}^{(s)} \right) \quad (10)$$

en donde δ_{ij} y δ_{jk} son las componentes del operador de Kronecker y las $\eta_{ijk}^{(s)}$, constituyen la parte simétrica del tensor desviador de orden superior, el cual se expresa en la siguiente forma:

$$\eta_{ijk}^{(s)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{z} \partial \bar{x}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \quad (11)$$

- Tensor desviador: Sus componentes son también de orden superior:

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2 \mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (12)$$

En la que l_1 es el tercer parámetro de escala de longitud del material considerado en la presente teoría.

Una vez indicadas todas las componentes de tensión y deformación tenidas en cuenta en la presente teoría se recurre a un principio variacional para obtener la ecuación gobernante del sistema en estudio.

3.3. Ecuación gobernante del sistema

Por tratarse de vibraciones libres, no se tienen fuerzas exteriores, con lo cual el principio de Hamilton resulta para este caso:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (13)$$

siendo U la energía de deformación y T la energía cinética, cuando la microviga realiza vibraciones libres. Por ser t_1 y t_2 arbitrarios, debe cumplirse para todo t :

$$\delta U - \delta T = \delta \Pi = 0 \quad (14)$$

La ecuación variacional (14) es condición necesaria, para la minimización de la energía potencial total Π , y constituye la forma débil de la ecuación gobernante del problema en estudio, (es la ecuación requerida para el método de resolución utilizado).

Teniendo en cuenta la teoría del segundo gradiente, en la que se consideran las componentes de tensión y deformación vistas, la variación de energía de deformación de la microviga resulta:

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + m_{ij}^{(S)} \delta \chi_{ij}^{(S)} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)}) dA d\bar{x} \quad (15)$$

puede observarse que cada componente de tensión y de deformación, que aparece en la ec.(15), pertenece a uno de los cuatro grupos de tensiones y deformaciones, detallados en el párrafo anterior.

Por otra parte, la variación de energía cinética en función de los desplazamientos se expresa en la siguiente forma:

$$\delta T = \int_0^L \rho (A \ddot{w} \delta w + I_y \ddot{\varphi} \delta \varphi) d\bar{x} = 0 \quad (16)$$

la cual independizada del tiempo resulta:

$$\delta T = -\rho \omega^2 \int_0^L (A w \delta w + I_y \varphi \delta \varphi) d\bar{x} = 0 \quad (17)$$

Luego se obtiene la ec. (15) en función de los desplazamientos y junto con la ec. (17), se reemplazan en la ec. (14). Se alcanza de este modo la ecuación gobernante en función de los corrimientos w y φ , de sus derivadas espaciales y de las propiedades mecánicas y geométricas del material. Un análisis más detallado de los pasos algebraicos correspondientes puede verse en un trabajo anterior de los autores, [Felix et al. \(2016\)](#).

La forma débil de las ecuaciones que gobiernan el modelo analizado, en función de los corrimientos, resulta entonces:

$$\int_0^L [\alpha_1 \varphi'' \delta \varphi'' - (\alpha_4 w'' - \alpha_2 \varphi') \delta \varphi' - \alpha_3 (w' - \varphi) \delta \varphi + (\alpha_5 w'' - \alpha_4 \varphi') \delta w'' + \alpha_3 (w' - \varphi) \delta \varphi'] d\bar{x} - \rho \omega^2 \int_0^L (A w \delta w + I_y \varphi \delta \varphi) d\bar{x} = 0 \quad (18)$$

en la que, como se dijo anteriormente, w y φ son el desplazamiento y el giro de la sección transversal de la microviga respectivamente, mientras que las constantes α_i contienen las propiedades mecánicas y geométricas de la microviga. Dichas constantes resultan:

$$\alpha_1 = \mu I_y \left(\frac{4}{5} l_1^2 + 2 l_0^2 \right) \quad (19a)$$

$$\alpha_2 = \left[\mu A \left(\frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2 l_0^2 \right) + I_y (\lambda + 2 \mu) \right] \quad (19b)$$

$$\alpha_3 = \mu A \kappa \quad (19c)$$

$$\alpha_4 = \mu A \left(\frac{16}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \quad (19d)$$

$$\alpha_5 = \mu A \left(\frac{1}{4} l_2^2 + \frac{8}{15} l_1^2 \right) \quad (19e)$$

recordando las variables y parámetros previamente definidos se tiene: λ y μ , las constantes de Lamé de la teoría clásica de la elasticidad, A e I_y el área y el momento de inercia de la sección transversal, κ el módulo de corte y l_0 , l_1 y l_2 , los parámetros de escala de longitud del material. Estos parámetros, son parámetros de escala de longitud intrínseca, relacionados con el gradiente de deformación por medio de magnitudes físicas micro-estructurales, medibles de los materiales.

4. EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Las ecuaciones gobernantes que surgen de la aplicación de la teoría micro-elástica son de mayor orden que las correspondientes a la teoría clásica. Por esta razón los requerimientos de continuidad se dan también en dominios de mayor orden y en consecuencia el método aproximado de resolución debe contemplar este hecho. Esa es la razón por la cual el elemento de microviga adoptado tiene un mayor número de grados de libertad que el elemento de viga clásico correspondiente.

Para resolver la ecuación integral (18) mediante el método de elementos finitos, se adopta el elemento desarrollado por Zhang et al. (2014), para el caso en que se desprecia la deformación axial de dicho elemento. En dicho caso el elemento contiene 2 nodos con 4 grados de libertad por nodo, para poder captar adecuadamente los efectos micro-estructurales de la teoría del segundo gradiente. La Figura 2 muestra el elemento utilizado con los corrimientos nodales adoptados.

De este modo se utilizan 4 corrimientos nodales para interpolar el desplazamiento transversal w y otros 4 para interpolar el giro de la sección transversal φ . Se tiene así el siguiente vector de

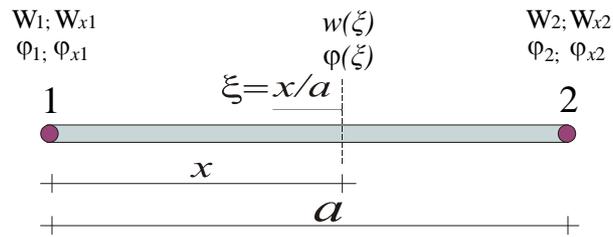


Figura 2: Elemento de microviga utilizado en el algoritmo de elementos finitos

desplazamientos nodales:

$$\{U_e\} = \{w_1, w_{x1}, \varphi_1, \varphi_{x1}, w_2, w_{x2}, \varphi_2, \varphi_{x2}\}^T \tag{20}$$

Las funciones de forma para el elemento elegido son, Felix et al. (2016):

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \tag{21a}$$

$$N_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) a \tag{21b}$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \tag{21c}$$

$$N_4(\xi) = (\xi^3 - \xi^2) a \tag{21d}$$

siendo ξ la variable espacial adimensional y a la longitud del elemento. Las interpolaciones del desplazamiento y del giro resultan entonces:

$$w(\xi) = N_1(\xi) w_1 + N_2(\xi) w_{x1} + N_3(\xi) w_2 + N_4(\xi) w_{x2} \tag{22a}$$

$$\varphi(\xi) = N_1(\xi) \varphi_1 + N_2(\xi) \varphi_{x1} + N_3(\xi) \varphi_2 + N_4(\xi) \varphi_{x2} \tag{22b}$$

Utilizando la representación matricial para compactar las expresiones se tiene:

$$[N_w] = [N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi), 0, 0] \tag{23a}$$

$$[N_\varphi] = [0, 0, N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi)] \tag{23b}$$

con lo cual, las ecs.(22) se expresan en la forma:

$$w(\xi) = [N_w] \{U_e\} \tag{24a}$$

$$\varphi(\xi) = [N_\varphi] \{U_e\} \tag{24b}$$

Reemplazando las formas interpoladas de w y φ en la ec.(18) e integrando en el dominio del elemento elegido, luego de las correspondientes operaciones algebraicas, se llega a las expresiones

siones de la matriz de rigidez y de de masa de dicho elemento, las cuales resultan:

$$\begin{aligned}
 [k_e] = & \frac{\alpha_1}{a^3} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right) d\xi - \frac{\alpha_4}{a^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\
 & + \frac{\alpha_2}{a} \int_0^1 \left(\frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi - \alpha_3 \int_0^1 \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^T ([N_\varphi]) d\xi \\
 & + \alpha_3 a \int_0^1 ([N_\varphi])^T ([N_\varphi]) d\xi + \frac{\alpha_5}{a^3} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi \\
 & - \frac{\alpha_4}{a^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi + \frac{\alpha_3}{a} \int_0^1 \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\
 & - \alpha_3 \int_0^1 ([N_\varphi])^T \left(\frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$[m_e] = \rho a \left(A \int_0^1 ([N_w])^T ([N_w]) d\xi + I_y \int_0^1 ([N_\varphi])^T ([N_\varphi]) d\xi \right) \tag{26}$$

Podemos reescribir la expresión (25), que da la matriz de rigidez del elemento, de manera más conveniente en la forma:

$$[k_e] = \alpha_1 [k_{e1}] + \alpha_2 [k_{e2}] + \alpha_3 [k_{e3}] + \alpha_4 [k_{e4}] + \alpha_5 [k_{e5}] \tag{27}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 [k_{e1}] &= \frac{1}{a^3} \int_0^1 ([N_{\varphi\xi\xi})^T ([N_{\varphi\xi\xi}) d\xi; \\
 [k_{e2}] &= \frac{1}{a} \int_0^1 ([N_{\varphi\xi})^T ([N_{\varphi\xi}) d\xi; \\
 [k_{e3}] &= - \int_0^1 ([N_{w\xi})^T ([N_\varphi]) d\xi + a \int_0^1 ([N_\varphi])^T ([N_\varphi]) d\xi + \\
 & \quad \frac{1}{a} \int_0^1 ([N_{w\xi})^T ([N_{\varphi\xi}) d\xi - \int_0^1 ([N_\varphi])^T ([N_{\varphi\xi}) d\xi; \\
 [k_{e4}] &= - \frac{1}{a^2} \int_0^1 ([N_{w\xi\xi})^T ([N_{\varphi\xi}) d\xi - \frac{1}{a^2} \int_0^1 ([N_{\varphi\xi})^T ([N_{w\xi\xi}) d\xi; \\
 [k_{e5}] &= \frac{1}{a^3} \int_0^1 ([N_{w\xi\xi})^T ([N_{w\xi\xi}) d\xi.
 \end{aligned} \tag{28}$$

y del mismo modo, podemos reescribir la expresión (26), que da la matriz de masa del elemento, en la forma:

$$[m_e] = \rho A [m_{e1}] + \rho I_y [m_{e2}] \tag{29}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 [m_{e1}] &= a \int_0^1 ([N_w])^T ([N_w]) d\xi; \\
 [m_{e2}] &= a \int_0^1 ([N_\varphi])^T ([N_\varphi]) d\xi.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Integrando las expresiones (28) y (30) se obtienen cada uno de los términos que conforman la matriz de rigidez del elemento. Resulta entonces para $[k_{e1}]$ y $[k_{e2}]$:

$$[k_{e1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/a^4 & 6/a^3 & 0 & 0 & -12/a^4 & 6/a^3 \\ 0 & 0 & 6/a^3 & 4/a^2 & 0 & 0 & -6/a^3 & 2/a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12/a^4 & -6/a^3 & 0 & 0 & 12/a^4 & -6/a^3 \\ 0 & 0 & 6/a^3 & 2/a^2 & 0 & 0 & -6/a^3 & 4/a^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[k_{e2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/(5a^2) & 1/(10a) & 0 & 0 & -6/(5a^2) & 1/(10a) \\ 0 & 0 & 1/(10a) & 2/15 & 0 & 0 & -1/(10a) & -1/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6/(5a^2) & -1/(10a) & 0 & 0 & 6/(5a^2) & -1/(10a) \\ 0 & 0 & 1/(10a) & -1/30 & 0 & 0 & -1/(10a) & 2/15 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Como se puede apreciar en la ec. (28), la matriz $[k_{e3}]$ se compone de 4 términos, con lo cual podemos expresarla en la forma:

$$[k_{e3}] = -[k_{e3a}] + [k_{e3b}] + [k_{e3c}] - [k_{e3d}] \quad (33)$$

Se tiene entonces:

$$[k_{e3a}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1/(2a)) & -(1/10) & 0 & 0 & -(1/(2a)) & 1/10 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & -(1/10) & a/60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2a) & 1/10 & 0 & 0 & 1/(2a) & -(1/10) \\ 0 & 0 & -(1/10) & -(a/60) & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$[k_{e3b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13/35 & (11a)/210 & 0 & 0 & 9/70 & -((13a)/420) \\ 0 & 0 & (11a)/210 & a^2/105 & 0 & 0 & (13a)/420 & -(a^2/140) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/70 & (13a)/420 & 0 & 0 & 13/35 & -((11a)/210) \\ 0 & 0 & -((13a)/420) & -(a^2/140) & 0 & 0 & -((11a)/210) & a^2/105 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[k_{e3c}] = \begin{bmatrix} 6/(5a^2) & 1/(10a) & 0 & 0 & -(6/(5a^2)) & 1/(10a) & 0 & 0 \\ 1/(10a) & 2/15 & 0 & 0 & -(1/(10a)) & -(1/30) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(6/(5a^2)) & -(1/(10a)) & 0 & 0 & 6/(5a^2) & -(1/(10a)) & 0 & 0 \\ 1/(10a) & -(1/30) & 0 & 0 & -(1/(10a)) & 2/15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[k_{e3d}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1/(2a)) & 1/10 & 0 & 0 & 1/(2a) & -(1/10) & 0 & 0 \\ -(1/10) & 0 & 0 & 0 & 1/10 & -(a/60) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1/(2a)) & -(1/10) & 0 & 0 & 1/(2a) & 1/10 & 0 & 0 \\ 1/10 & a/60 & 0 & 0 & -(1/10) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

De igual modo se descompone la matriz $[k_{e4}]$ en dos términos, siendo:

$$[k_{e4}] = -[k_{e4a}] - [k_{e4b}] \quad (38)$$

$$[k_{e4a}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/a^2 & 0 & 0 & 0 & 1/a^2 \\ 0 & 0 & 1/a^2 & -(1/(2a)) & 0 & 0 & -(1/a^2) & 1/(2a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a^2 & 0 & 0 & 0 & -(1/a^2) \\ 0 & 0 & -(1/a^2) & -(1/(2a)) & 0 & 0 & 1/a^2 & 1/(2a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[k_{e4b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 & 0 & -1/a^2 & 0 & 0 \\ -(1/a^2) & -1/(2a) & 0 & 0 & 1/a^2 & -1/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a^2 & 0 & 0 & 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 1/a^2 & 1/(2a) & 0 & 0 & -1/a^2 & 1/(2a) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

y la matriz $[k_{e5}]$ resulta:

$$[k_{e5}] = \begin{bmatrix} 12/a^4 & 6/a^3 & 0 & 0 & -(12/a^4) & 6/a^3 & 0 & 0 \\ 6/a^3 & 4/a^2 & 0 & 0 & -(6/a^3) & 2/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(12/a^4) & -(6/a^3) & 0 & 0 & 12/a^4 & -(6/a^3) & 0 & 0 \\ 6/a^3 & 2/a^2 & 0 & 0 & -(6/a^3) & 4/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Mediante el ensamblado de las matrices de rigidez de los elementos se obtiene la matriz de rigidez global K .

Para los términos que componen la matriz de masa del elemento se tiene:

$$[m_{e1}] = \begin{bmatrix} 13/35 & (11a)/210 & 0 & 0 & 9/70 & -((13a)/420) & 0 & 0 \\ (11a)/210 & a^2/105 & 0 & 0 & (13a)/420 & -(a^2/140) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9/70 & (13a)/420 & 0 & 0 & 13/35 & -((11a)/210) & 0 & 0 \\ -((13a)/420) & -(a^2/140) & 0 & 0 & -((11a)/210) & a^2/105 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$[m_{e2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13/35 & (11a)/210 & 0 & 0 & 9/70 & -((13a)/420) \\ 0 & 0 & (11a)/210 & a^2/105 & 0 & 0 & (13a)/420 & -(a^2/140) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/70 & (13a)/420 & 0 & 0 & 13/35 & -((11a)/210) \\ 0 & 0 & -((13a)/420) & -(a^2/140) & 0 & 0 & -((11a)/210) & a^2/105 \end{bmatrix} \quad (43)$$

De un modo similar, mediante el ensamblado de las matrices de masa de los elementos se obtiene la matriz de masa global M . Finalmente, la condición de equilibrio (14) resulta en la conocida ecuación de autovalores:

$$|[K] - \omega_i^2 [M]| = 0 \quad (44)$$

en la que los ω_i son las frecuencias naturales de la microviga, expresadas en *rad/seg*.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se analizan 3 tipos de vinculación diferente, todos ellos con apoyo intermedio ubicado en distintas posiciones de la microviga. Las condiciones de borde consideradas son: empotrada-libre, simplemente apoyada y bi-empotrada. En todos los modelos resueltos se consideran los tres parámetros de escala de longitud del material con el mismo valor, es decir se adopta $l_0 = l_1 = l_2 = l$.

En el estudio numérico realizado se obtienen, para todos los casos, los primeros dos coeficientes de frecuencia Ω_i definidos en la forma:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} L^2 \omega_i \quad (45)$$

en la que ρ y E son la densidad del material y su módulo de elasticidad; A , el área de la sección transversal e I su momento de inercia. Así definidos, los valores de los coeficientes de frecuencia natural, resultan adimensionales.

Para obtener los valores de los coeficientes de frecuencia con una precisión aceptable, fue suficiente con una malla de 20 elementos, lo que indica la rápida convergencia de los resultados con el incremento del número de elementos elegido.

5.1. Microviga empotrada-libre en los extremos

Un esquema del modelo de microviga empotrada-libre en los extremos puede verse en la Figura 3.

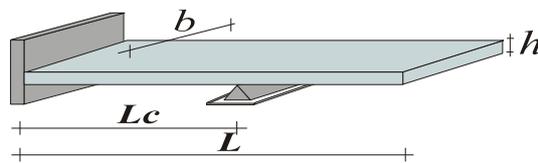


Figura 3: Microviga Timoshenko empotrada en un extremo y libre en el otro, con un apoyo simple intermedio.

En la Tabla 1 se muestran los valores del primer coeficiente de frecuencia natural Ω_1 , mientras que en la Tabla 2 se muestran los valores del segundo coeficiente de frecuencia Ω_2 .

Los valores de la relación h/l se disponen en orden creciente, recordando que a medida que se incrementa h/l , disminuyen los efectos de escala de longitud del material. El caso límite lo constituyen los valores obtenidos para la Teoría Clásica (TC), cuando $h/l \rightarrow \infty$.

Este caso de vinculación en los extremos se diferencia de los otros dos planteados por ser asimétrico, con lo cual se han considerado posiciones del apoyo intermedio en toda la longitud de la microviga. Los valores más elevados del primer coeficiente de frecuencia, se han dado cuando el apoyo intermedio se hallaba en la posición $L_c/L = 0,8$.

Para el caso en que se considera la viga clásica, el incremento del valor del primer coeficiente de frecuencia es de un 578 %, al pasar a la configuración más rígida ($L_c/L = 0$ a $L_c/L = 0,8$), mientras que al considerar la relación $h/l = 1$, dicho incremento es de un 439 %.

La Figura 4 contiene curvas paramétricas que muestran el cambio del coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 de la microviga empotrada-libre en los extremos, en función de la posición del apoyo intermedio que se define por la variable espacial adimensional L_c/L , siendo h/l , el parámetro adimensional de dichas curvas.

5.2. Microviga simplemente apoyada en los extremos

El modelo que corresponde a este caso puede verse esquemáticamente en la Figura 5.

L_c/L	Ω_1					
	h/l					
	1	2	4	8	16	TC
0.0	13.215	8.1062	5.8048	5.0334	4.8189	4.7450
0.1	14.189	8.6173	6.2189	5.4173	5.1915	5.1117
0.2	15.949	9.9859	7.3717	6.4698	6.2123	6.1211
0.3	18.917	12.195	9.0912	7.9912	7.6757	7.5644
0.4	23.484	15.428	11.531	10.133	9.7316	9.5904
0.5	30.453	20.249	15.145	13.303	12.775	12.589
0.6	41.248	27.751	20.782	18.255	17.530	17.275
0.7	55.542	38.552	29.077	25.581	24.577	24.225
0.8	57.968	42.331	32.621	28.872	27.784	27.404
0.9	50.735	36.861	28.311	25.033	24.083	23.750
1.0	43.092	30.905	23.533	20.753	19.952	19.673

Tabla 1: Primer coeficiente de frecuencia natural Ω_1 , en una microviga Timoshenko empotrada-empotrada, con un apoyo simple intermedio, para diferentes valores de h/l y L_c/L . Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

L_c/L	Ω_2					
	h/l					
	1	2	4	8	16	TC
0.0	59.223	42.827	32.885	29.079	27.976	27.592
0.1	72.809	48.915	36.814	32.414	31.134	30.672
0.2	85.792	58.252	44.304	39.171	37.669	37.126
0.3	104.47	71.787	55.023	48.761	46.920	46.255
0.4	129.43	90.451	69.927	62.128	59.826	58.998
0.5	130.66	99.507	81.016	73.124	70.729	69.882
0.6	106.67	81.683	66.776	60.423	58.461	57.742
0.7	97.010	71.995	57.798	51.970	50.185	49.525
0.8	127.04	90.631	70.933	63.250	60.948	60.106
0.9	131.97	98.099	79.035	71.213	68.858	68.023
1.0	111.64	83.833	67.380	60.605	58.575	57.860

Tabla 2: Segundo coeficiente de frecuencia natural Ω_2 , en una microviga Timoshenko empotrada-empotrada, con un apoyo simple intermedio, para diferentes valores de h/l y L_c/L . Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

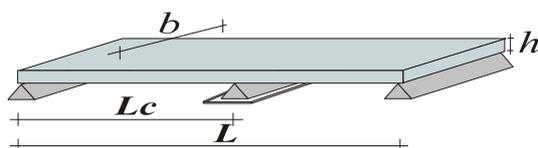


Figura 5: Microviga Timoshenko simplemente apoyada en los extremos, con un apoyo simple intermedio.

La Tabla 3 muestra los valores del primer coeficiente de frecuencia Ω_1 mientras que la Tabla 4, muestra los valores del segundo coeficiente de frecuencia Ω_2 , ambos para el modelo de la Figura 5.

En este caso se resuelve para posiciones del apoyo intermedio que llegan hasta la mitad de

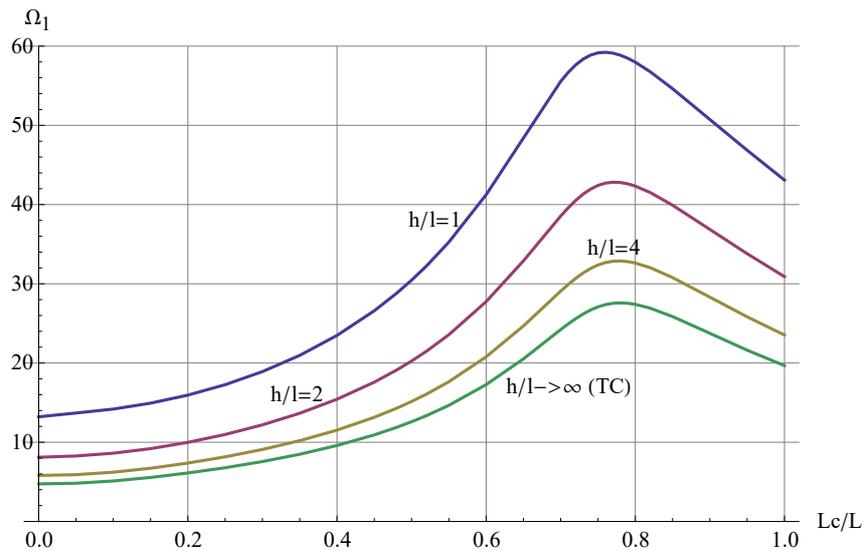


Figura 4: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 en función de la variable adimensional L_c/L , de la posición del apoyo intermedio y del parámetro de escala de longitud h/l , en una microviga empotrada en un extremo y libre en el otro. Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

L_c/L	Ω_1					
	h/l					
	1	2	4	8	16	TC
0.0	34.176	21.929	15.962	13.901	13.323	13.123
0.1	49.795	33.616	25.570	22.609	21.732	21.409
0.2	59.294	40.896	31.258	27.647	26.589	26.209
0.3	72.177	50.320	38.587	34.154	32.856	32.393
0.4	89.808	63.125	48.635	43.113	41.495	40.920
0.5	106.11	75.027	57.817	51.250	49.341	48.675

Tabla 3: Primer coeficiente de frecuencia natural Ω_1 , en una microviga Timoshenko simp. apoyada en los extremos y un apoyo simple intermedio, para diferentes valores de h/l y L_c/L . Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

L_c/L	Ω_2					
	h/l					
	1	2	4	8	16	TC
0.0	106.11	75.027	57.817	51.250	49.341	48.675
0.1	138.66	97.300	76.263	68.133	65.668	64.747
0.2	163.89	116.02	91.864	82.382	79.516	78.464
0.3	196.23	139.29	110.99	99.843	96.493	95.290
0.4	174.81	123.25	97.917	87.965	84.918	83.774
0.5	140.51	98.847	78.465	70.431	67.941	66.984

Tabla 4: Segundo coeficiente de frecuencia natural Ω_2 , en una microviga Timoshenko simp. apoyada en los extremos y un apoyo simple intermedio, para diferentes valores de h/l y L_c/L . Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

la luz de la microviga, debido a que las condiciones de borde son simétricas.

Para el modelo simplemente apoyado en los extremos, el incremento en el valor del primer coeficiente de frecuencia fue del 371 %, para el caso clásico (TC) y del 310 %, para la microviga

con $h/l = 1$, ambos comparando en entre los modelos con el apoyo intermedio en $L_c/l = 0,5$ y sin apoyo intermedio ($L_c/l = 0$).

La Figura 6 contiene curvas parámétricas que muestran el cambio del coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 , de la microviga simplemente apoyada en los extremos, en función de la posición del apoyo intermedio que se define por la variable espacial adimensional L_c/L , siendo h/l el parámetro adimensional de dichas curvas.

En el gráfico se aprecia la condición de simetría comentada anteriormente, con los valores máximos de los coeficientes de frecuencia en el centro de la microviga, en correspondencia con la posición del anti-nodo de la microviga sin apoyo intermedio .

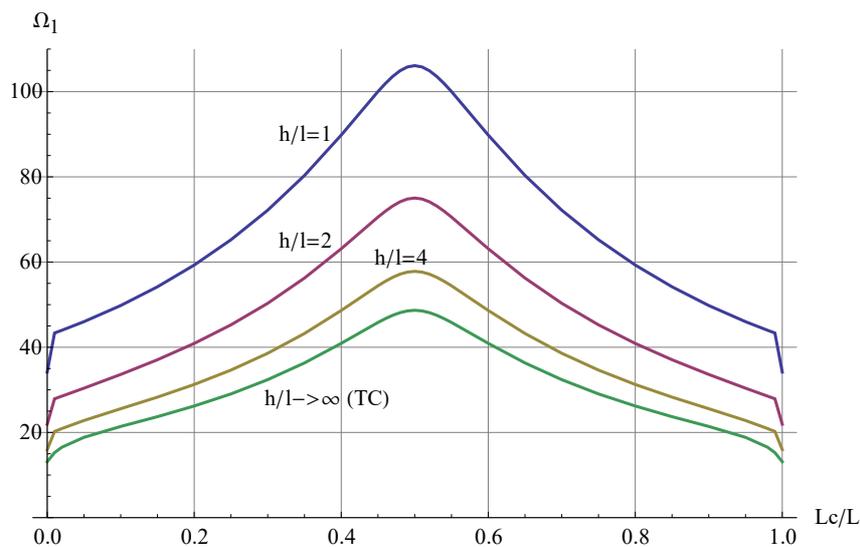


Figura 6: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 en función de la variable adimensional L_c/L , de la posición del apoyo intermedio y del parámetro de escala de longitud h/l , en una microviga simplemente apoyada en los extremos. Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

5.3. Microviga empotrada en los extremos

El modelo de microviga empotrada en los extremos puede verse esquemáticamente en la Figura 7.

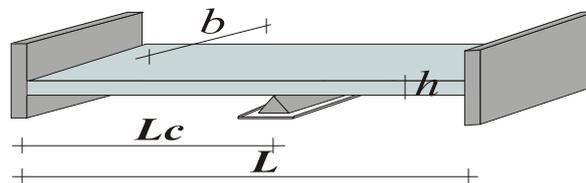


Figura 7: Microviga Timoshenko empotrada en los extremos y con un apoyo simple intermedio.

La Tabla 5 muestra para este caso, los valores del primer coeficiente de frecuencia Ω_1 , mientras que la Tabla 6 muestra los valores del segundo coeficiente de frecuencia Ω_2 .

Al igual que en el modelo anterior, las condiciones de borde son simétricas y por lo tanto, también se ha resuelto aquí para posiciones del apoyo intermedio que llegan hasta la mitad de la luz de la microviga.

	Ω_1					
L_c/L	h/l					
	1	2	4	8	16	TC
0.0	52.142	40.336	32.001	28.584	27.572	27.217
0.1	61.010	45.190	35.497	31.651	30.500	30.082
0.2	70.009	52.856	42.248	37.918	36.606	36.127
0.3	82.926	63.744	51.723	46.659	45.108	44.541
0.4	100.61	78.381	64.534	58.540	56.685	56.007
0.5	116.26	91.683	76.390	69.639	67.554	66.812

Tabla 5: Primer coeficiente de frecuencia natural Ω_1 , en una microviga Timoshenko empotrada en los extremos y un apoyo simple intermedio, para diferentes valores de h/l y L_c/L . Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

	Ω_2					
L_c/L	h/l					
	1	2	4	8	16	TC
0.0	116.26	91.683	76.390	69.639	67.554	66.812
0.1	143.81	106.53	86.815	78.636	76.095	75.148
0.2	168.64	124.81	102.73	93.554	90.682	89.607
0.3	201.39	148.68	123.42	112.98	109.71	108.50
0.4	186.82	141.56	119.55	110.10	107.05	105.88
0.5	153.93	116.66	97.645	89.419	86.722	85.646

Tabla 6: Segundo coeficiente de frecuencia natural Ω_2 , en una microviga Timoshenko empotrada en los extremos y un apoyo simple intermedio, para diferentes valores de h/l y L_c/L . Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

Puede apreciarse en todos los modelos analizados que, independientemente del tipo de vinculación en los bordes, los coeficientes de frecuencia y por lo tanto la rigidez de la microviga, se incrementan a medida que el parámetro h/l de la misma se reduce.

Para el modelo empotrado en ambos extremos, el incremento en el valor del coeficiente de frecuencia fundamental del mismo, fue del 245 % para el modelo clásico y del 223 %, para la microviga con $h/l = 1$. En ambos casos se compara entre los modelos correspondientes a $L_c/l = 0,5$ y $L_c/l = 0$.

La Figura 8 contiene curvas paramétricas que muestran el cambio del coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 de la microviga empotrada en los extremos, en función de la posición del apoyo intermedio dado por L_c/L y del parámetro adimensional de dichas curvas, h/l .

6. CONCLUSIONES

Del análisis numérico realizado, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

1. El cambio de posición en el apoyo intermedio, genera en todos los casos un rango muy amplio de variación en los valores de los coeficientes de frecuencia, con lo cual se puede variar en forma considerable la rigidez de la microviga, modificando la posición de dicho vínculo.
2. En cuanto a la magnitud de las variaciones porcentuales de los coeficientes de frecuencia, originados por cambios de la posición del apoyo intermedio, se observa que son similares para diferentes valores de la relación h/l .

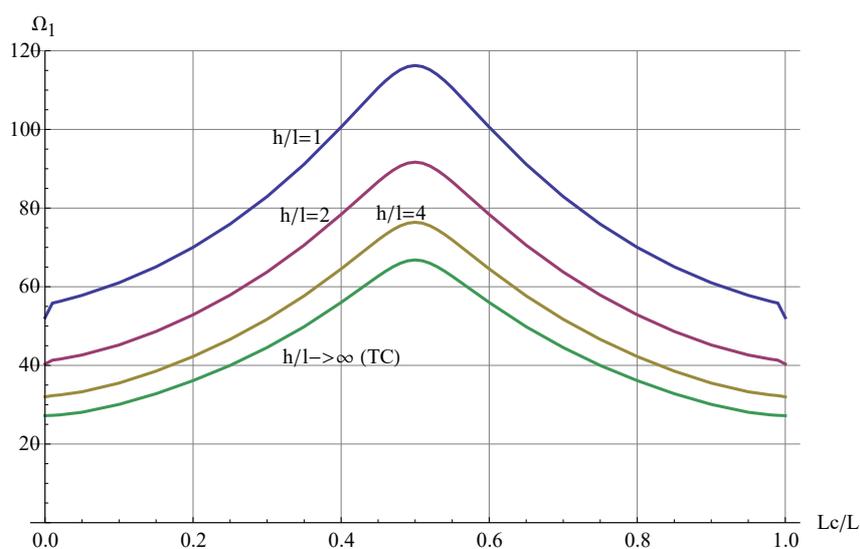


Figura 8: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 en función de la variable adimensional L_c/L , de la posición del apoyo intermedio y del parámetro de escala de longitud h/l , en una microviga empotrada en los extremos. Con $\nu = 0,38$, $\kappa = 5/6$, $L/h = 10$.

3. Con el elemento de microviga elegido, los valores de los coeficientes de frecuencia convergen rápidamente en función del número de elementos adoptado, con lo cual, la condición de agregar el vínculo intermedio parece no afectar dicha convergencia.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), a la Comisión de Investigaciones Científicas-CIC de la Provincia de Buenos Aires, a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB) y al Programa DOCTORAR INGENIERÍA de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación, bajo cuyos auspicios se desarrolló el presente trabajo.

REFERENCIAS

- Asghari M., Ahmadian M., Kahrobaiyan M., y Rahaeifard M. On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Material & Design*, 31:2324–2329, 2010.
- Cosserat E. y Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. A. Hermann et Fils, Paris (1909), reeditado por Gabay, Paris, 2009.
- di Prisco C., Imposimato S., y Aifantis E. A visco-plastic constitutive model for granular soils modified according to non-local and gradient approaches. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:121–138, 2002.
- Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 15:909–923, 1966.
- Eringen A. *Non Local Continuum Theories*. Springer, 2001.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Size-dependent dynamic analysis of Timoshenko microbeam using the finite element method. *First Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*, 1, 2015.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Análisis dinámico de microvigas Timoshenko median-

- te la teoría elástica del primer gradiente de deformación y el método de elementos finitos. *Mecánica Computacional*, 34:3553–3569, 2016.
- Fleck N., Muller G., Ashby M., y Hutchinson J. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall. Mater.*, 42:475–487, 1994.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Free vibration of Timoshenko micro beams using the modified couple stress theory. *First Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*, 1, 2015.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Teoría modificada del gradiente. *Mecánica Computacional*, 34, 2016.
- Kahrobaiyana M., Asgharia M., y M.T. A. Strain gradient beam element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 68:63–75, 2013.
- Kong S., Zhou S. and Nie Z., y Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487–498, 2009.
- Lam D., Yang F., Chong A., J. W., y P. T. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- Li M., Tang H., y Rouches M. Ultrasensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high frequency applications. *Journal Nat. Nanotechnol*, 2:114–120, 2007.
- Ma H., Gao X., y Reddy J. A microstructure-dependent timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379–3391, 2008.
- Magrab E. *Vibrations of Elastic Systems With Applications to MEMS and NEMS*. Springer, 2012.
- Mindlin R. *Micro-structure in Linear Elasticity*. Technical Report of Columbia University, 1964.
- Mindlin R. y Eshel N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109–124, 1968.
- Yang F., Chong A., Lang D., y P. T. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731–2743, 2002.
- Zhang B., Yuming H., Dabiao L., Zhipeng G., y Shen L. Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 79:22–39, 2014.