

## SOLUCIONES APROXIMADAS PARA EL PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CON UNA CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO

**Julieta Bollati<sup>a,b</sup>, José A. Semitiel<sup>b</sup> y Domingo A. Tarzia<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET)*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, JBollati@austral.edu.ar, <http://www.austral.edu.ar/cienciasempresariales>.*

**Palabras Clave:** Problema de Stefan, Condición convectiva, Método de balance integral.

**Resumen.** En este trabajo se consideran diferentes aproximaciones para un problema unidimensional de Stefan (solidificación) a una fase con una condición convectiva en el borde fijo para un material semi-infinito. Se compara la solución exacta de dicho problema con las soluciones aproximadas obtenidas a partir del método de balance integral clásico y de una variante del mismo para un perfil de temperatura cuadrático en el espacio. En todos los casos, el análisis se realiza en forma adimensional utilizando dos parámetros: número de Stefan (Ste) y número de Biot (Bi). Además se analiza el caso cuando Bi tiende a infinito, recuperando las soluciones aproximadas obtenidas cuando se impone una condición de temperatura en el borde fijo.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de Stefan son problemas de transferencia de calor con cambio de fase que constituyen una amplia rama de estudio, dado que aparecen frecuentemente en procesos industriales y en problemas de interés tecnológico. Dada la naturaleza no lineal de este tipo de problemas, las soluciones analíticas se limitan a unos pocos casos y se hace necesario el estudio de métodos de aproximación para los mismos.

El método de balance integral introducido en (Goodman, 1958) es un conocido método de aproximación de soluciones para problemas de Stefan. El mismo transforma la ecuación del calor en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo asumiendo un perfil de temperatura cuadrático en el espacio. Para estos perfiles de temperatura, distintas variantes de este método fueron establecidas por (Wood, 2001). Por otra parte en (Hristov, 2009a), (Hristov, 2009b), (Mitchell, 2012), (Mitchell y Myers, 2012), (Mitchell y Myers, 2010b) y en (Mosally et al., 2002) se lo utiliza para otros perfiles de temperatura tales como: exponencial, potencial, etc.

En este trabajo se obtienen soluciones aproximadas mediante el método de balance integral clásico y una variante del mismo propuesta por (Wood, 2001), de un problema de Stefan a una fase para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  en el cual se impone una condición convectiva en el borde fijo  $x = 0$ . Esta condición establece que el flujo de temperatura en el borde fijo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del material y la temperatura ambiente, es decir:

$$kT_x(0, t) = H(t) (T(0, t) - (-T_\infty)), \quad (1)$$

donde  $T$  es la temperatura del material,  $k$  representa la conductividad térmica,  $H(t)$  es el coeficiente de transferencia de calor en el borde fijo y  $-T_\infty < 0$  es la temperatura ambiente impuesta en  $x = 0$ . Mediante el método de balance integral en (Goodman, 1958), (Roday y Kazmierczak, 2009) y en (Mitchell y Myers, 2010a), se obtienen soluciones aproximadas de problemas de Stefan con condición convectiva donde  $H(t) = h > 0$ , en los cuales se estudian la precisión de dichas soluciones comparándolas con distintos métodos numéricos. En este trabajo, se considera  $H(t) = \frac{h}{\sqrt{t}}$ ,  $h > 0$  y se comparan las soluciones aproximadas con la solución exacta obtenida en (Tarzia, 2017). Si se analiza el límite cuando  $h \rightarrow \infty$ , para cada  $t$  fijo, se obtiene una condición de tipo Dirichlet en  $x = 0$  de la forma:  $T(0, t) = -T_\infty$ . Por esto, también, se estudia el caso límite de las soluciones obtenidas, recuperando las soluciones aproximadas obtenidas cuando se impone una condición de temperatura en el borde fijo.

## 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA Y SOLUCIÓN EXACTA

Se considera un problema unidimensional de Stefan a una fase para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  en el cual se impone una condición convectiva en el borde fijo  $x = 0$ . La formulación matemática del problema es la siguiente:

**Problema (P).** Hallar la temperatura  $T = T(x, t)$  del material y la frontera libre  $s = s(t)$  de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$T_t(x, t) = \frac{k}{\rho c} T_{xx}(x, t), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$kT_x(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T(0, t) - (-T_\infty)), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$kT_x(s(t), t) = \rho \lambda \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$s(0) = 0. \quad (6)$$

donde la conductividad térmica  $k$ , la densidad de masa  $\rho$ , el calor específico  $c$  y el calor latente de fusión por unidad de masa  $\lambda$ , son constantes dadas. La ecuación (3) representa la condición convectiva en el borde fijo donde  $-T_\infty < 0$  es la temperatura externa en  $x = 0$  y  $h > 0$  representa el coeficiente que caracteriza la transferencia del calor en el borde fijo.

En (Tarzia, 2017) se presenta la solución explícita del problema (P), utilizando la variable de similitud. Para el caso particular del problema a una fase, la misma viene dada por:

$$T(x, t) = AT_\infty + BT_\infty \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right), \quad (7)$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha t}, \quad (8)$$

donde las constantes  $A$  y  $B$  son:

$$A = -\frac{\operatorname{erf}(\xi)}{\frac{1}{\operatorname{Bi}\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf}(\xi)}, \quad (9)$$

$$B = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{Bi}\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf}(\xi)}, \quad (10)$$

y  $\xi$  es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$x \exp(x^2) \left( \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\operatorname{Bi}\sqrt{\pi}} \right) - \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}} = 0, \quad x > 0, \quad (11)$$

siendo

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}, \quad \operatorname{Ste} = \frac{cT_\infty}{\lambda}, \quad \text{y} \quad \operatorname{Bi} = \frac{h\sqrt{\alpha}}{k}, \quad (12)$$

parámetros adimensionales que representan el coeficiente de difusión térmica, el número de Stefan y el número de Biot respectivamente.

### 3. SOLUCIONES APROXIMADAS DEL PROBLEMA (P)

Como uno de los mecanismos de conducción del calor es la difusión, la excitación en el borde fijo  $x = 0$  (por ejemplo, una temperatura, un flujo de calor, una condición convectiva) no se propaga inmediatamente a todo el material semi-infinito  $x > 0$  sino que su efecto se percibe en un intervalo acotado  $[0, \delta(t)]$  (para cada instante de tiempo  $t > 0$ ) fuera del cual la temperatura permanece igual a la temperatura inicial. El método del balance integral calórico (Goodman, 1958) postula la existencia de una función  $\delta = \delta(t)$  que mide la profundidad de la capa térmica. En los problemas de cambio de fase se toma la capa térmica como la frontera libre, es decir  $\delta(t) = s(t)$ .

El método de balance integral clásico introducido en (Goodman, 1958) para resolver problemas que involucran un cambio de fase consiste en transformar la ecuación del calor (2) en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo mediante: asumir un perfil de temperatura adecuado consistente con las condiciones de frontera, integrar (2) con respecto a la variable espacial en el intervalo  $(0, s(t))$ , y sustituir la condición de Stefan (5) por una nueva ecuación obtenida a partir de la temperatura de cambio de fase (4).

Es decir, si se considera la ecuación (4), se la deriva respecto del tiempo  $t$ , se despeja  $\dot{s}(t)$  y se reemplaza en la condición de Stefan (5) resulta:

$$T_x^2(s(t), t) = -\frac{\lambda}{c} T_{xx}(s(t), t), \quad (13)$$

que es una nueva ecuación que sustituye a la condición de Stefan.

Por otra parte, utilizando (2) y (4) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = \frac{k}{\rho c} \left[ \frac{\rho \lambda}{k} \dot{s}(t) - T_x(0, t) \right], \quad (14)$$

resultando en una nueva ecuación que sustituye a la ecuación del calor.

En (Wood, 2001) se establecen variantes del método de balance integral y se obtienen diferentes problemas aproximados.

En este trabajo se desarrollan el método de balance integral clásico y una de las variantes establecidas por (Wood, 2001) en la que sólo se reemplaza la ecuación del calor (2) por (14).

### 3.1. Solución aproximada a través del método de balance integral clásico

El método del balance integral clásico postula para la resolución del problema (P) la resolución del problema que surge de sustituir la ecuación (2) por (14) y la condición (5) por (13), manteniendo todas las otras condiciones del problema (P) iguales. Es decir:

**Problema (P1).** Hallar la temperatura  $T_1 = T_1(x, t)$  del material y la frontera libre  $s_1 = s_1(t)$  de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s_1(t)} T_1(x, t) dx = \frac{k}{\rho c} \left[ \frac{\rho \lambda}{k} \dot{s}_1(t) - T_{1x}(0, t) \right], \quad 0 < x < s_1(t), \quad t > 0, \quad (15)$$

$$kT_{1x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T_1(0, t) - (-T_\infty)), \quad t > 0, \quad (16)$$

$$T_1(s_1(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$T_{1xx}(s_1(t), t) = -\frac{\lambda}{c} T_{1xx}(s_1(t), t), \quad t > 0, \quad (18)$$

$$s_1(0) = 0. \quad (19)$$

La solución del problema (P1) será una solución aproximada del problema (P). Para ello, se propone un perfil cuadrático para la temperatura:

$$T_1(x, t) = A_1 T_\infty \left( 1 - \frac{x}{s_1(t)} \right) + B_1 T_\infty \left( 1 - \frac{x}{s_1(t)} \right)^2, \quad (20)$$

y se obtiene una frontera libre de la forma:

$$s_1(t) = 2\xi_1 \sqrt{\alpha t}, \quad (21)$$

donde las constantes  $A_1$ ,  $B_1$  y  $\xi_1$  deben determinarse a partir de las condiciones del problema (P1).

A partir de (20) y (21), se satisfacen trivialmente las ecuaciones (17) y (19).

Si se sustituyen las expresiones para la temperatura (20) y para la frontera libre (21) en las ecuaciones (15) y (16) se obtienen:

$$A_1 = \frac{(6 + 2\text{Ste}) \xi_1^2 + \frac{6}{\text{Bi}} \xi_1 - 6\text{Ste}}{\text{Ste} \left( \xi_1^2 + \frac{2}{\text{Bi}} \xi_1 + 3 \right)}, \quad (22)$$

y

$$B_1 = \frac{(-3\text{Ste} - 6) \xi_1^2 - \frac{3}{\text{Bi}} \xi_1 + 3\text{Ste}}{\text{Ste} \left( \xi_1^2 + \frac{2}{\text{Bi}} \xi_1 + 3 \right)}. \quad (23)$$

Dado que  $A_1$  y  $B_1$  están definidas a partir de los parámetros  $\xi_1$ ,  $\text{Bi}$  y  $\text{Ste}$ , se utiliza la condición (18) para determinar el valor del parámetro  $\xi_1$ . De esta manera resulta que  $\xi_1$  es solución de la ecuación polinómica de cuarto grado dada por:

$$(12 + 9\text{Ste} + 2\text{Ste}^2) x^4 + \frac{21 + 6\text{Ste}}{\text{Bi}} x^3 + \left( \frac{12}{\text{Bi}^2} - 42\text{Ste} - 12\text{Ste}^2 - 18 \right) x^2 + \frac{30\text{Ste} + 9}{\text{Bi}} x + 18\text{Ste}^2 + 9\text{Ste} = 0, \quad x > 0. \quad (24)$$

### 3.2. Solución aproximada a través de una variante del método de balance integral clásico

El problema que se enuncia a continuación es una variante, propuesta en (Wood, 2001), del método del balance integral clásico. Se postula para la resolución del problema (P) la resolución del problema aproximado que surge de sustituir la ecuación (2) por (14), manteniendo todas las otras condiciones del problema (P) iguales. Es decir:

**Problema (P2).** Hallar la temperatura  $T_2 = T_2(x, t)$  del material y la frontera libre  $s_2 = s_2(t)$  de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s_2(t)} T_2(x, t) dx = \frac{k}{\rho c} \left[ \frac{\rho \lambda}{k} \dot{s}_2(t) - T_{2x}(0, t) \right], \quad 0 < x < s_2(t), \quad t > 0, \quad (25)$$

$$kT_{2x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T_2(0, t) - (-T_\infty)), \quad t > 0, \quad (26)$$

$$T_2(s_2(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$kT_{2x}(s_2(t), t) = \rho \lambda \dot{s}_2(t), \quad t > 0, \quad (28)$$

$$s_2(0) = 0. \quad (29)$$

Como en el caso del problema (P1), la solución del problema (P2) será una aproximación del problema (P). Para ello, se proponen un perfil cuadrático para la temperatura:

$$T_2(x, t) = A_2 T_\infty \left( 1 - \frac{x}{s_2(t)} \right) + B_2 T_\infty \left( 1 - \frac{x}{s_2(t)} \right)^2, \quad (30)$$

y se obtiene una frontera libre de la forma:

$$s_2(t) = 2\xi_2 \sqrt{\alpha t}, \quad (31)$$

donde las constantes  $A_2$ ,  $B_2$  y  $\xi_2$  deben determinarse a partir de las condiciones del problema (P2), de manera análoga al problema (P1).

A partir de (30) y (31), se satisfacen inmediatamente las ecuaciones (27) y (29).

Al sustituir las expresiones para la temperatura (30) y para la frontera libre (31) en las ecuaciones (25) y (26) se obtienen:

$$A_2 = \frac{(6 + 2\text{Ste}) \xi_2^2 + \frac{6}{\text{Bi}} \xi_2 - 6\text{Ste}}{\text{Ste} \left( \xi_2^2 + \frac{2}{\text{Bi}} \xi_2 + 3 \right)}, \quad (32)$$

y

$$B_2 = \frac{(-3\text{Ste} - 6) \xi_2^2 - \frac{3}{\text{Bi}} \xi_2 + 3\text{Ste}}{\text{Ste} \left( \xi_2^2 + \frac{2}{\text{Bi}} \xi_2 + 3 \right)}. \quad (33)$$

Al igual que en el problema (P1), las constantes  $A_2$  y  $B_2$  se expresan en función de los parámetros  $\xi_2$ , Bi y Ste. Al utilizar la condición (28), resulta que  $\xi_2$  debe ser solución de la ecuación polinómica de cuarto grado dada por:

$$x^4 + \frac{2}{\text{Bi}} x^3 + (6 + \text{Ste}) x^2 + \frac{3}{\text{Bi}} x - 3\text{Ste} = 0, \quad x > 0. \quad (34)$$

#### 4. COMPARACIONES DE LAS SOLUCIONES APROXIMADAS CON LA EXACTA

Para el estudio de la precisión de las soluciones aproximadas, se comparan los coeficientes adimensionales  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi$  que son los que caracterizan a las fronteras libres aproximadas  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  y a la frontera exacta  $s(t)$ , respectivamente. Dichos coeficientes se calculan a partir de las soluciones positivas de las ecuaciones (11), (24) y (34), respectivamente, que dependen de los parámetros Ste y Bi.

En el problema (P) se impone una condición convectiva en el borde fijo. Si el coeficiente  $h$  que caracteriza la transferencia de calor tiende a infinito, o equivalentemente Bi tiende a infinito, las soluciones de los problemas (P), (P1) y (P2) convergen a las soluciones de los problemas  $(P_\infty)$ ,  $(P1_\infty)$  y  $(P2_\infty)$ , donde estos últimos están definidos de manera análoga a los problemas (P), (P1) y (P2) respectivamente, cambiando la condición convectiva en  $x = 0$  por una condición de Dirichlet en el borde fijo de la forma:  $T(0, t) = -T_\infty$ .

La solución del problema  $(P_\infty)$  fue hallada en (Lamé y Clapeyron, 1831) y está dada por:

$$T_\infty(x, t) = -T_\infty + \frac{T_\infty}{\text{erf}(\xi_\infty)} \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right), \quad (35)$$

$$s_\infty(t) = 2\xi_\infty \sqrt{\alpha t}, \quad (36)$$

donde  $\xi_\infty$  es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$x \exp(x^2) \text{erf}(x) - \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}} = 0, \quad x > 0. \quad (37)$$

La solución del problema  $(P1_\infty)$  obtenida en (Goodman, 1958) está dada por:

$$T_{1\infty}(x, t) = A_{1\infty} T_\infty \left( 1 - \frac{x}{s_{1\infty}(t)} \right) + B_{1\infty} T_\infty \left( 1 - \frac{x}{s_{1\infty}(t)} \right)^2, \quad (38)$$

$$s_{1\infty}(t) = 2\xi_{1\infty} \sqrt{\alpha t}, \quad (39)$$

donde las constantes  $A_{1\infty}$  y  $B_{1\infty}$  son:

$$A_{1\infty} = \frac{\xi_{1\infty}^2 (6 + 2\text{Ste}) - 6\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_{1\infty}^2 + 3)}, \quad (40)$$

$$B_{1\infty} = \frac{\xi_{1\infty}^2 (-3\text{Ste} - 6) + 3\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_{1\infty}^2 + 3)}, \quad (41)$$

y  $\xi_{1\infty}$  es solución positiva de la siguiente ecuación polinómica de cuarto grado:

$$x^4(2\text{Ste}^2 + 9\text{Ste} + 12) + x^2(-12\text{Ste}^2 - 42\text{Ste} - 18) + 18\text{Ste}^2 + 9\text{Ste} = 0, \quad x > 0. \quad (42)$$

El problema (P<sub>2∞</sub>) corresponde a una variante propuesta por (Wood, 2001) del método de balance integral clásico, cuya solución es:

$$T_{2\infty}(x, t) = A_{2\infty}T_{\infty} \left(1 - \frac{x}{s_{2\infty}(t)}\right) + B_{2\infty}T_{\infty} \left(1 - \frac{x}{s_{2\infty}(t)}\right)^2, \quad (43)$$

$$s_{2\infty}(t) = 2\xi_{2\infty}\sqrt{\alpha t}, \quad (44)$$

donde las constantes  $A_{2\infty}$  y  $B_{2\infty}$  son:

$$A_{2\infty} = \frac{\xi_{2\infty}^2(6 + 2Ste) - 6Ste}{Ste(\xi_{2\infty}^2 + 3)}, \quad (45)$$

$$B_{2\infty} = \frac{\xi_{1\infty}^2(-3Ste - 6) + 3Ste}{Ste(\xi_{2\infty}^2 + 3)}, \quad (46)$$

y  $\xi_{2\infty}$  es solución positiva de la siguiente ecuación polinómica de cuarto grado:

$$x^4 + x^2(Ste + 6) - 3Ste = 0, \quad x > 0. \quad (47)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, para el cálculo numérico, se fijan distintos valores de Ste y luego:

- se calculan  $\xi_{1\infty}$ ,  $\xi_{2\infty}$  y  $\xi_{\infty}$  que corresponden a los coeficientes que caracterizan a las fronteras libres  $s_{1\infty}$ ,  $s_{2\infty}$  y  $s_{\infty}$ , de los problemas con condición de temperatura en el borde fijo, (P<sub>1∞</sub>), (P<sub>2∞</sub>) y (P<sub>∞</sub>), respectivamente.
- haciendo variar Bi hasta un cierto número “suficientemente grande”, se calculan  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi$  que corresponden a los coeficientes que caracterizan a las fronteras libres  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s$ , de los problemas con condición convectiva en el borde fijo, (P<sub>1</sub>), (P<sub>2</sub>) y (P), respectivamente.

En las siguientes figuras se muestran los errores cometidos por las soluciones aproximadas. Para valores de Ste= 10<sup>-5</sup>, 10<sup>-3</sup>, 10<sup>-1</sup>, 1, 10 y 50, y haciendo variar Bi, se grafican  $\xi_i - \xi$  y  $\xi_{i\infty} - \xi_{\infty}$ ,  $i = 1, 2$ , cuyo signo indica si las aproximaciones son por exceso o por defecto.

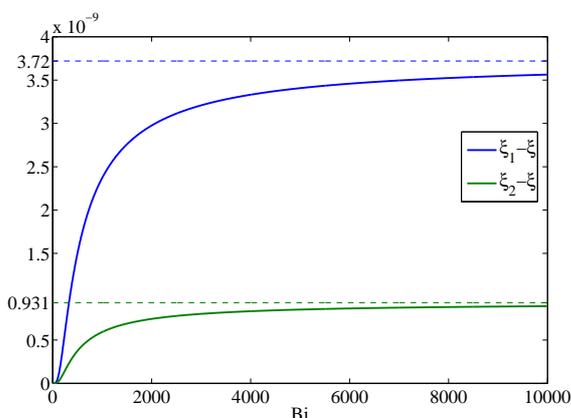


Figura 1: Ste= 10<sup>-5</sup>

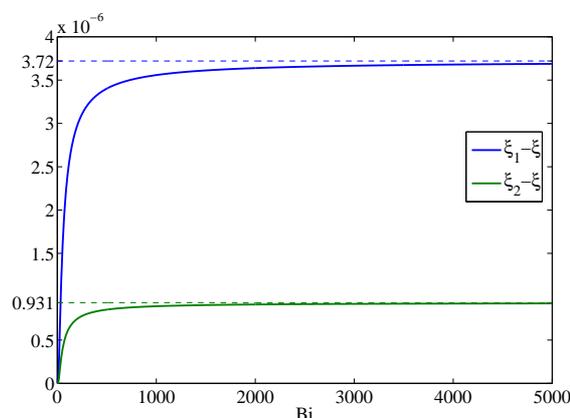
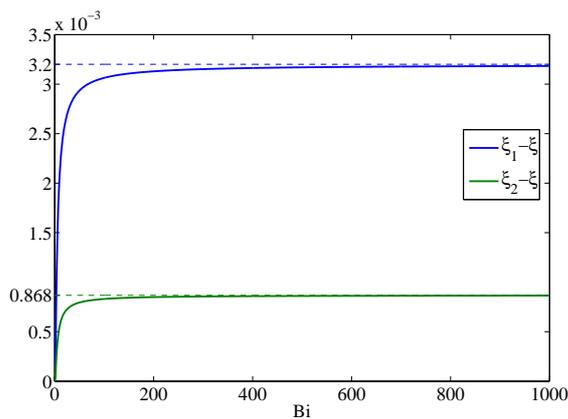
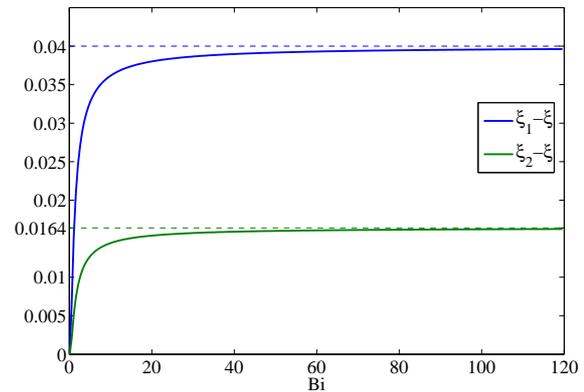
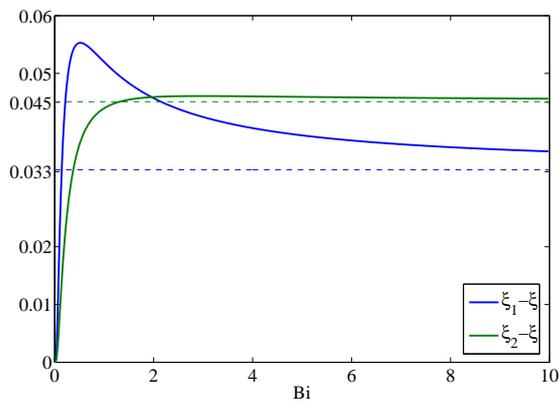
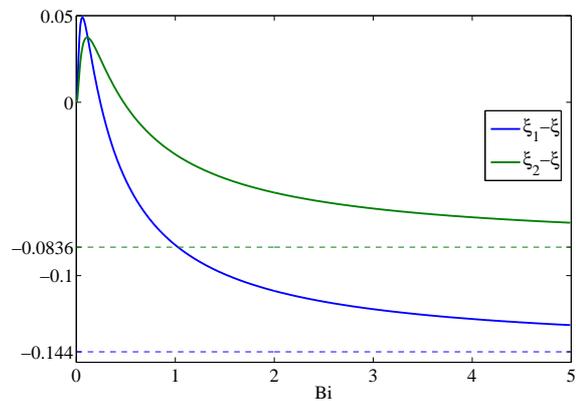


Figura 2: Ste= 10<sup>-3</sup>

Figura 3:  $Ste=10^{-1}$ Figura 4:  $Ste=1$ Figura 5:  $Ste=10$ Figura 6:  $Ste=50$ 

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvieron soluciones aproximadas para el problema de Stefan a una fase para la solidificación de un material semi-infinito (P) en el cual se impone una condición convectiva en el borde fijo, mediante el método de balance integral clásico y una variante del mismo.

Debido a que los perfiles de temperatura aproximados no son comparables con la temperatura exacta del problema (P), se compararon numéricamente las fronteras libres (21) y (31) de las soluciones aproximadas con la exacta obtenida en (8) obtenida en (Tarzia, 2017), caracterizadas por los parámetros  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi$  respectivamente. Este análisis se realizó en forma adimensional, utilizando únicamente el número de Stefan ( $Ste$ ) y número de Biot ( $Bi$ ). Para valores de  $Ste \leq 1$  se observa que  $\xi_1$  y  $\xi_2$  aproximan por exceso a  $\xi$  (Fig. 1- Fig. 4), mientras que para  $Ste > 1$ , no hay monotonía del error (Fig. 5, Fig. 6). En todos los casos los errores  $\xi_i - \xi$ ,  $i = 1, 2$  cometidos por las soluciones aproximadas dadas por (P1) y (P2) convergen, para un número de  $Bi$  suficientemente grande, a los errores  $\xi_{i\infty} - \xi_{\infty}$ ,  $i = 1, 2$  cometidos por las soluciones aproximadas dadas por los problemas (P1 $_{\infty}$ ) y (P2 $_{\infty}$ ).

La contribución de este trabajo es que al tener la solución exacta del problema (P), es relativamente simple compararla con las soluciones aproximadas obtenidas a partir de distintos métodos. Particularmente, de la observación realizada se concluye que la solución aproximada

dada por la variante del método de balance integral propuesto en (Wood, 2001), tiene una mayor precisión que el método de balance integral clásico para el problema (P) para número de Ste pequeños.

## 6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP No 0275 de CONICET Univ. Austral, Rosario, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

## REFERENCIAS

- Goodman T. The heat balance integral methods and its application to problems involving a change of phase. *Transactions of the ASME*, 80:335–342, 1958.
- Hristov J. The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: analysis and benchmark exercises. *Thermal Science*, 13:27–48, 2009a.
- Hristov J. Research note on a parabolic heat-balance integral method with unspecified exponent: An entropy generation approach in optimal profile determination. *Thermal Science*, 13:49–59, 2009b.
- Lamé G. y Clapeyron B. Memoire sur la solidification par refroidissement d' un globe liquide. *Annales Chimie Physique*, 47:250–256, 1831.
- Mitchell S. Applying the combined integral method to one-dimensional ablation. *Applied Mathematical Modelling*, 36:127–138, 2012.
- Mitchell S. y Myers T. Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional stefan problems. *SIAM Review*, 52:57–86, 2010a.
- Mitchell S. y Myers T. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:3540–3551, 2010b.
- Mitchell S. y Myers T. Application of heat balance integral methods to one-dimensional phase change problems. *International Journal of Differential Equations*, 2012:1–22, 2012.
- Mosally F., Wood A., y Al-Fhaid A. An exponential heat balance integral method. *Applied Mathematics and Computation*, 130:87–100, 2002.
- Roday A. y Kazmierczak M. Analysis of phase-changing finite slabs subjected to convective boundary conditions: part i - melting. *International Review of Chemical Engineering*, 1:87–99, 2009.
- Tarzia D. Relationship between Neumann solutions for two phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions. *Thermal Science*, 21:1–11, 2017.
- Wood A. A new look at the heat balance integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 25:815–824, 2001.