

LA NUEVA DERIVADA DE CAPUTO: CÁLCULO APROXIMADO DE PRIMITIVAS UTILIZANDO UNA FAMILIA DE WAVELETS DE BANDA LIMITADA.

María I. Troparevsky^a y Marcela A. Fabio^b

^a*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina, mariainestro@gmail.com*

^b*Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, Argentina, mfabio@unsam.edu.ar*

Palabras Clave: Operadores Fraccionarios, Problema Inverso, Wavelet de Banda Limitada, Análisis de Multirresolución.

Resumen. La nueva derivada de Caputo está definida mediante un operador integral con núcleo regular, (M. Caputo and M. Fabrizio, *Nat Sc Pub Cor, Prog in Frac Diff and App*, (1): 73-85, (2015)). En este trabajo, continuación de (M. Troparevsky et. al., *Asoc Arg Mec Comp*, 3383-3394, (2016)), resolvemos aproximadamente el problema inverso que consiste en el cálculo de una función de la cual se conoce esta nueva derivada fraccionaria. Para calcular aproximadamente una primitiva elegimos una familia de wavelets de banda limitada de propiedades especiales asociadas a un análisis de multirresolución. Descomponemos y proyectamos el dato y mediante un esquema tipo Galerkin calculamos los coeficientes de la incógnita en dicha base. El esquema de aproximación resulta simple y eficiente gracias a la regularidad del operador y a las propiedades de la familia de wavelets elegida.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario comprende operadores diferenciales e integrales de orden arbitrario, no necesariamente natural, generalmente representados por operadores integrales con núcleos con distinto nivel de suavidad. Si bien el origen del cálculo fraccionario puede encontrarse en trabajos de Laplace, Liouville, Fourier, Abel, Riemann entre otros, en las últimas décadas el interés por este tipo de operadores se ha extendido ya que modelos presentes en diferentes disciplinas han sido expresados mediante este tipo de operadores: problemas de difusión, hidráulica, teoría de potencial, electroquímica, viscoelasticidad y nanotecnología entre otros (Agrawal (2004); Atangana y Clout (2013); Crank (1979); Herrmann (2013); Odziejewicz et al. (2012); Unser y Blu (2000)). Es sabido que la derivada de orden fraccionario de una función no goza de la condición de localidad de la derivada estandar y, por el contrario, refleja el comportamiento global de la función involucrada. En (Almeida y Torres (2010); Baleanu et al. (2017); Miller y Ross (1993); Oldham y Spanier (2006)) pueden consultarse propiedades y características de estos operadores. Algunos resultados teóricos referidos a ecuaciones diferenciales fraccionarias figuran en (Diethelm y Ford (2002); Maitama y Abdullahi (2016); Podlubny (1991); Ye y Gao (2007)).

A pesar de su creciente desarrollo, el cálculo analítico de estos operadores puede resultar muy engorroso, por lo que resulta necesario desarrollar aproximaciones numéricas. Soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario figuran en (Atanackovic y Stankovic (2008); Baleanu et al. (2017); Odibat y Momani (2008); Zhuang et al. (2009)).

Existen diferentes definiciones de estos operadores. Recientemente en (Caputo y Fabrizio (2015)) una nueva definición ha sido incorporada: la nueva derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio. A ella nos referiremos en este trabajo. Esta nueva derivada fraccionaria no sólo resulta útil para modelar sistemas físicos, sino que posee ventajas operacionales en cuanto al cálculo ya que la integral involucrada no presenta singularidades. Se han publicado recientemente numerosas aplicaciones de este nuevo operador fraccionario. En algunos trabajos se propone soluciones causales de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario utilizando la transformada de Laplace (Caputo y Fabrizio (2015); Losada y Nieto (2015); Sheikh et al. (2017)). Al-Salti et al. (2016) prueban la existencia de solución para algunos problemas de contorno para la ecuación fraccionaria del calor obteniendo en algunos casos, fórmulas explícitas. En (Dougmo Goufo (2017)) se analiza la ecuación de Korteweg-de Vries-Burgers utilizando esta derivada fraccionaria.

En este trabajo construimos una solución aproximada de la ecuación

$$\mathcal{D}_*^\alpha f(x) = g(x) \quad (1)$$

donde $\mathcal{D}_*^\alpha f$ es la nueva derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de orden $\alpha \in (0, 1)$ (new Caputo-Fabrizio fractional derivative), g es el dato y f es la función incógnita.

Entre las ventajas que presenta esta nueva definición frente a las derivadas de orden fraccionario existentes, figura el hecho de que el núcleo del operador integral no contiene singularidades lo cual facilita su cálculo efectivo.

Para calcular una solución de (1) adaptamos un esquema de aproximación desarrollado en (Troparevsky et al. (2016)) para las ecuaciones asociadas a los operadores integrales que actúan sobre la transformada de Fourier. Este mismo esquema fue implementado con éxito para el cálculo de primitivas respecto de la derivada de Caputo clásica (Fabio y Troparevsky (2017)). Primero expresamos la ecuación por medio de la transformada de Fourier. A continuación proyectamos el dato en subespacios wavelet adecuados. Finalmente, mediante un esquema de tipo Galerkin, calculamos los coeficientes de la función desconocida en la base wavelet elegida.

El método propuesto es simple ya que a partir de los coeficientes wavelet del dato y una matriz construida a partir de ecuaciones normales, calcula los coeficientes de la función incógnita en cada nivel de resolución j . El error introducido en la aproximación puede controlarse ajustando el cálculo de los elementos de la matriz y considerando una proyección truncada más precisa del dato en los subespacios wavelet. Dado que la base wavelet elegida es de soporte compacto en frecuencia y el núcleo del operador fraccionario no tiene singularidades, el esquema de aproximación resulta eficiente y numéricamente estable. Como no trabajamos con la transformada de Laplace, las soluciones propuestas no son necesariamente causales.

2. EL PROBLEMA

Denotamos por $H^1((a, b))$, el espacio de Sobolev $W^{1,2}((a, b))$ de funciones $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, tales que su derivada débil $u' = D^1 u$ está en $L^2((a, b))$.

La nueva derivada de Caputo-Fabrizio (NDCF) de orden $\alpha > 0$ de una $f \in H^1((a, b))$, $a < b$ se define como (Caputo y Fabrizio (2015))

$$\mathcal{D}_*^\alpha f(x) := \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x f^{(n)}(\tau) e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

donde $M(\alpha)$ es una función normalizadora, $M(0) = M(1) = 1$ y $a \in (-\infty, x)$, (Baleanu et al. (2017); Caputo y Fabrizio (2015)).

Para $n = 1$ y consecuentemente $\alpha \in (0, 1)$, llamando $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in (0, \infty)$ y siendo $N(\sigma)$ la nueva función normalizadora correspondiente a σ , $N(0) = N(\infty) = 1$, la NDCF se expresa como

$$\mathcal{D}_*^\alpha f(x) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^x f'(\tau) e^{-\frac{x-\tau}{\sigma}} d\tau. \quad (3)$$

Algunas propiedades de este operador pueden encontrarse en (Caputo y Fabrizio (2015)), como por ejemplo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{D}_*^\alpha f(x) = f'(x), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{D}_*^\alpha f(x) = f(x) - f(a). \quad (4)$$

Estas propiedades se ilustran en la Figura 1, considerando $a = -\infty$ y la función de prueba $f(x) = e^{(-x^2/2)}(\sin(8\pi x) + \sin(4\pi x))$.

En este trabajo buscamos una primitiva f para una función g dada, considerando la NDCF con $a = -\infty$ y $n = 1$, resolvemos la ecuación

$$\mathcal{D}_*^\alpha f(x) = g(x). \quad (5)$$

Con este objetivo adecuamos el esquema de aproximación desarrollado en (Troparevsky et al. (2016)) para las ecuaciones asociadas a los operadores integrales que actúan sobre la transformada de Fourier. Este mismo esquema ya ha sido adaptado e implementado con éxito para el cálculo de primitivas respecto de la derivada de Caputo clásica (Fabio y Troparevsky (2017)).

El primer paso consiste en elegir una base wavelet adecuada. En la próxima sección explicamos y justificamos la elección de la base.

3. LA BASE WAVELET

Elegimos una wavelet madre $\psi \in \mathcal{S}$ (clase de Schwartz), infinitamente oscilante, de decaimiento rápido, bien localizada en tiempo y en frecuencia (Meyer (1990)). Su espectro $|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|$ está contenido en la banda bilateral

$$\Omega_j = \{\omega : 2^j(\pi - \beta) \leq |\omega| \leq 2^{j+1}(\pi + \beta)\}$$

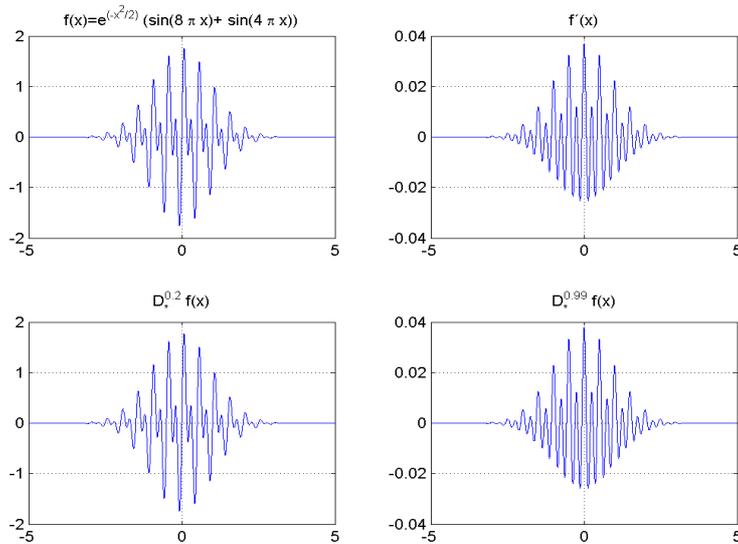


Figura 1: Aplicación del operador \mathcal{D}_*^α para $\alpha = 0,2$ y $0,99$

con $0 < \beta \leq \pi/3$. Si el parámetro β tiende a 0 la wavelet aproximará a la wavelet de Shannon que resulta poco útil para las aplicaciones. En este caso elegimos $\beta = \pi/7$.

La familia $\{\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$, resulta una base ortonormal (BON) de $L^2(\mathbb{R})$, asociada a un análisis Multirresolución (MRA): una sucesión de subespacios V_j , (Walnut (2002), Mallat (2009)) de manera que $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j \geq n} W_j + V_n, n \in \mathbb{Z}$.

En la Figura 2 se muestran ψ y el módulo de su transformada $|\widehat{\psi}|$.

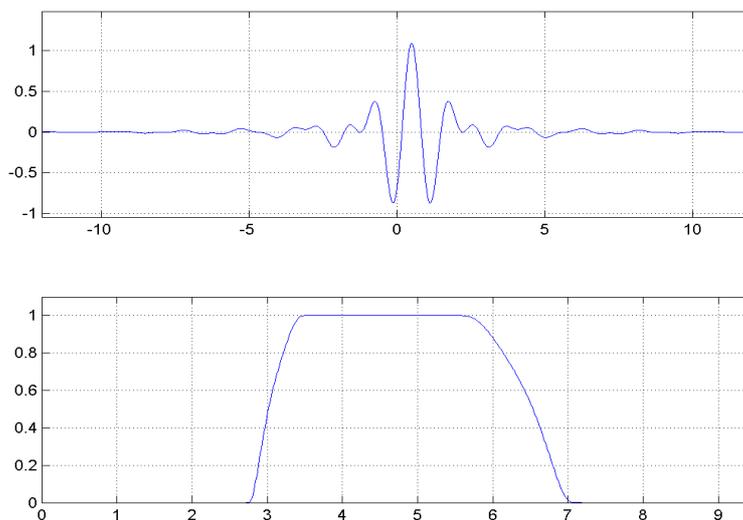


Figura 2: La wavelet madre (arriba) y su transformada en módulo $|\widehat{\psi}|$ para $\beta = \pi/7$ y $\omega \geq 0$ (abajo)

Existe también $\phi \in V_0$ tal que $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una BON de V_0 .

Denotamos por $W_j = \text{span}\{\psi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$ al espacio wavelet y $V_J = \bigoplus_{j < J} W_j$, es el subespacio de escala. La familia $\{\phi_{Jn} = 2^{J/2} \phi(2^J x - n), n \in \mathbb{Z}\}$ es una BON de V_J .

Esta descomposición del espacio nos permite expresar cada función $s \in L^2(\mathbb{R})$ como

$$s(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_j s(x) = \mathcal{P}_J s(x) + \sum_{j \geq J} \mathcal{Q}_j s(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle s, \phi_{Jn} \rangle \phi_{Jn}(x) + \sum_{j \geq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x)$$

para cualquier J , donde $\mathcal{Q}_j(s)$ y $\mathcal{P}_j(s)$ son las proyecciones ortogonales de la señal s en W_j y V_j , respectivamente. Observemos que el soporte de $\widehat{\mathcal{Q}_j s}(\omega)$ está contenido en Ω_j y el de $\widehat{\mathcal{P}_j s}(\omega)$ en $\cup_{j \leq J} \Omega_j$.

Las propiedades de ψ garantizan convergencia absoluta en cada W_j . El desarrollo de esta base y los algoritmos de implementación basados en la FFT pueden consultarse en (Fabio y Serrano (2015)).

Una vez que hemos elegido una base wavelet apropiada descomponemos, proyectamos y truncamos el dato.

4. EL DATO

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, $g = \sum_{j=0}^J g_j + r$ con $\|r\|_2 < \epsilon \|g\|_2 \simeq 0$, $J \in \mathbb{N}$ y $g_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi_{jk} \in W_j$ donde $c_{jk} = \langle g, \psi_{jk} \rangle$ son los coeficientes wavelet de g . \tilde{g}_j es la proyección truncada del dato en W_j ,

$$\tilde{g}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{K}_j} c_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (6)$$

donde $\mathbb{K}_j \subset \mathbb{Z}$, $|\mathbb{K}_j| = \eta_j < \infty$, satisface $\sum_{k \notin \mathbb{K}_j} |\langle g, \psi_{jk} \rangle|^2 < \epsilon \|g_j\|^2$ y $\epsilon \simeq 0$.

5. EL OPERADOR \mathcal{D}_*^α

El próximo paso consiste en expresar el operador integral por medio de la transformada de Fourier.

Sea κ la función causal definida por, $\kappa = e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}x}$ para $x > 0$, entonces

$$\widehat{\kappa}(\omega) = \frac{1}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + i\omega} \quad (7)$$

y la ecuación (5) se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_*^\alpha f(x) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} (f' * \kappa)(x) = \frac{M(\alpha)}{2\pi(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} \widehat{(f' * \kappa)}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{M(\alpha)}{2\pi(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}'(\omega) \widehat{\kappa}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{D}_*^\alpha f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \frac{i\omega}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + i\omega} e^{i\omega x} d\omega. \quad (8)$$

Podemos describir ahora la ecuación (5) por medio del siguiente operador integral actuando sobre la transformada de Fourier de la incógnita f , $Af = \mathcal{D}_*^\alpha f$

$$Af(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) h(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (9)$$

donde el núcleo h es

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{i\omega}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + i\omega}. \quad (10)$$

Notemos que este núcleo es una función suave, que no depende de la variable x .

Finalmente la ecuación (5) se escribe como

$$Af(x) = g(x). \quad (11)$$

6. LAS IMÁGENES DE LA BASE WAVELET

El paso siguiente consiste en calcular las derivadas de las funciones de la base wavelet elegida considerando la NDCF definida a partir de (9).

Sea $v_{jk} = \mathcal{D}_*^\alpha \psi_{jk}$, entonces

$$v_{jk}(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_{jk}(\omega) h(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (12)$$

En la Figura 3 mostramos el gráfico de algunas de ellas, pudiéndose apreciar su similitud con las wavelets.

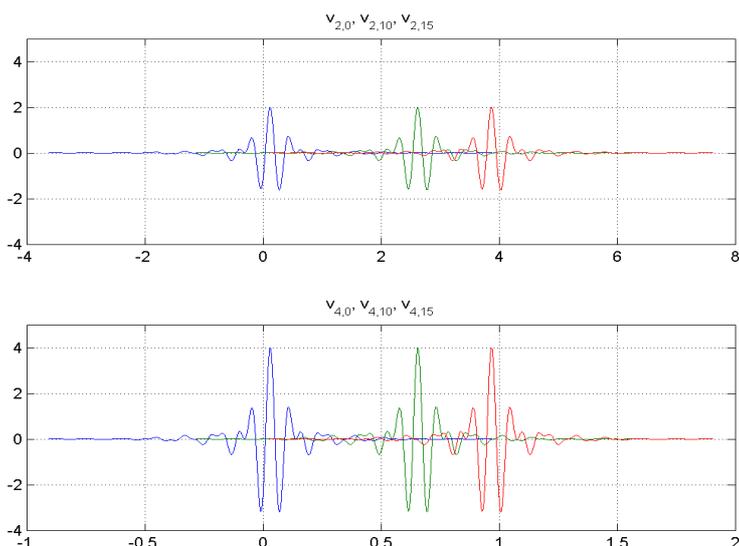


Figura 3: Algunas v_{jk} con $\alpha = 0,5$

Más adelante observaremos que no es necesario el cálculo de estas funciones v_{jk} ya que en el esquema de aproximación sólo utilizaremos $\langle v_{jl}, \psi_{jm} \rangle$.

Consideraremos que para $J_{min} \leq j \leq J_{max}$, $A(W_j) \cong W_j$. Si este no fuera el caso reemplazamos W_j por una unión adecuada de subespacios wavelets.

7. EL ESQUEMA DE APROXIMACIÓN

Si la función a determinar es

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{jk} \psi_{jk}(x), \quad (13)$$

en cada nivel $J_{min} \leq j \leq J_{max}$ nos restringimos a \mathbb{K}_j y obtenemos $\tilde{f}_j = \sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} \psi_{jk}$ (ver (6)), de donde

$$A\tilde{f}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} v_{jk}(x). \quad (14)$$

A partir de las consideraciones realizadas acerca de la base elegida y las propiedades del operador A , proponemos $A\tilde{f}_j \cong \tilde{g}_j$, es decir,

$$\sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} v_{jk}(x) \cong \sum_{k' \in \mathbb{K}_j} c_{j'k'} \psi_{j'k'}(x) \quad (15)$$

El vector de coeficientes de f , $\mathbf{b}_k^j = \{b_{jk}\}_{k \in \mathbb{K}_j}$ puede calcularse a partir de las ecuaciones

$$\left\langle \sum_{l \in \mathbb{K}_j} b_{jl} v_{jl}, \psi_{jm} \right\rangle = \sum_{l \in \mathbb{K}_j} b_{jl} \langle v_{jl}, \psi_{jm} \rangle = c_{jm}, \quad m \in \mathbb{K}_j, \quad (16)$$

es decir,

$$M^j \mathbf{b}_k^j = \mathbf{c}_k^j, \quad k \in \mathbb{K}_j \quad (17)$$

donde $M^j \in \mathbb{R}^{\eta_j} \times \mathbb{R}^{\eta_j}$ es la matriz que contiene los productos

$$M_{lm}^j = \langle v_{jl}, \psi_{jm} \rangle. \quad (18)$$

Las propiedades de la base wavelet y del operador nos permite asegurar que en cada nivel j , M^j es una matriz inversible, de modo que el vector \mathbf{b}_k^j de coeficientes de la función incógnita f puede ser calculado.

Por último, considerando para cada $J_{min} \leq j \leq J_{max}$, $\tilde{f}_j = \sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} \psi_{jk}$, construimos una primitiva aproximada de g :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=J_{min}}^{J_{max}} \tilde{f}_j(x).$$

Remarcamos que la matriz del sistema depende solamente del núcleo y de la base elegida por lo que puede calcularse previamente. Además, la exactitud de la aproximación puede mejorarse reduciendo los errores que se introducen en el cálculo de (18) y en la descomposición del dato.

8. EJEMPLO NUMÉRICO

A modo de ilustración consideramos el núcleo de la ecuación (10) con $\alpha = 0,5$ y la superposición de armónicas

$$f(x) = w_1 \cos(35x) + w_2 \cos(25x) + w_3 \sin(2\pi x),$$

donde las w_i son ventanas suaves de distintos rangos. Las imágenes de f según la aplicación de los operadores NDCF y el clásico DCF, de núcleo singular, se exhiben en la Figura 4. Para ambos casos $\alpha = 0,5$.

El análisis wavelet de $g = \mathcal{D}_*^{0,5} f$, y de f , indica que los niveles $j = 0, 1, 2$ y 3 son los de energía significativa, tal como se muestra en la Tabla 1. En la Figura 5 mostramos algunas de las matrices diagonal dominante utilizadas en este ejemplo: M^0 y M^3 .

Finalmente el error cuadrático de aproximación resulta del orden de 10^{-6} . En la Figura 6 se puede ver la suma de las reconstrucciones de las componentes $\sum_{j=0}^3 \tilde{f}_j$, es decir una primitiva aproximada y el error cuadrático involucrado.

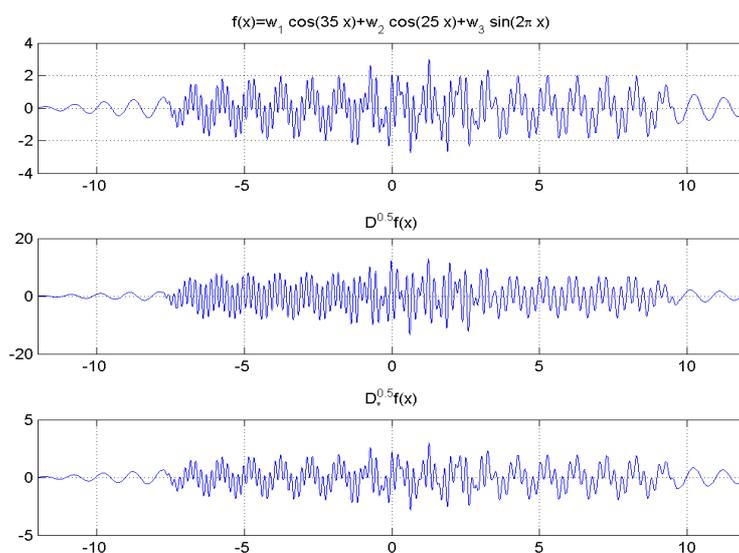


Figura 4: La función f y sus imágenes según el operador $\mathcal{D}^{0,5}$ y $\mathcal{D}_*^{0,5}$ respectivamente

nivel j	energía de g	energía de f	frecuencias
4	0.0000	0.0000	[50.2, 100.5]
3	0.3371	0.3397	[25.1, 50.2]
2	0.1949	0.1864	[12.5, 25.1]
1	0.4651	0.4482	[6.28, 12.5]
0	0.0088	0.0198	[3.14, 6.28]
-1	0.0000	0.0000	[1.57, 3.14]

Tabla 1: Distribución de energías

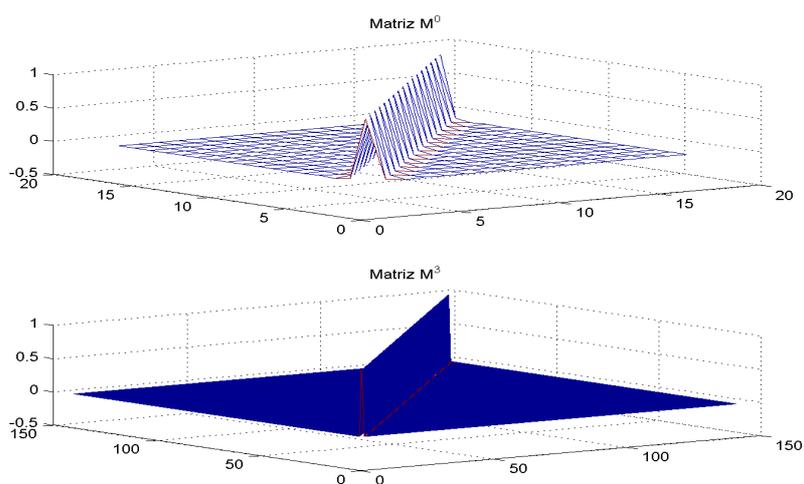


Figura 5: Matrices diagonal dominante M^0 y M^3

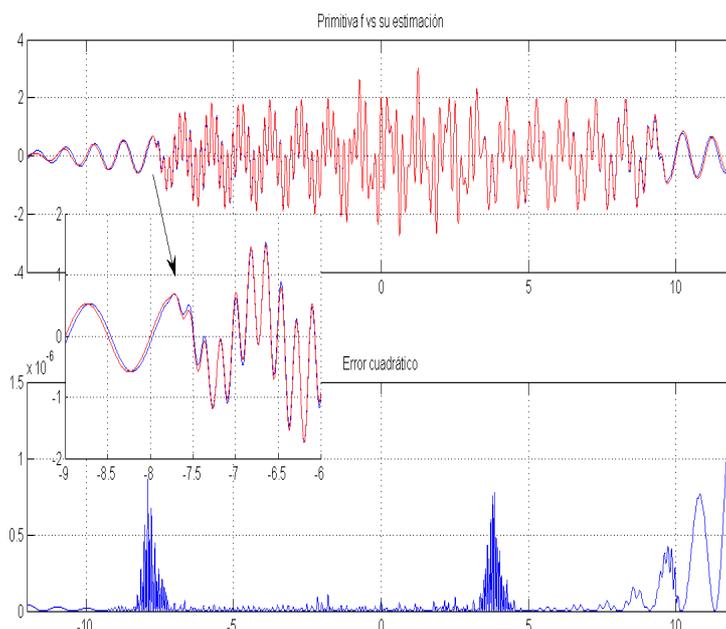


Figura 6: La primitiva f (azul) vs su aproximación $\sum_{j=0}^3 \tilde{f}_j$ (rojo) (arriba) y el error cuadrático (abajo)

9. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos propuesto un método para el cálculo de una primitiva de una función dada, considerando la nueva derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio. Con tal objetivo elegimos una familia de wavelets de banda limitada de propiedades especiales asociadas a un análisis de multirresolución. Descomponemos y proyectamos el dato en dicha base y mediante un esquema tipo Galerkin calculamos los coeficientes de la incógnita invirtiendo una matriz que resulta diagonal dominante. El error introducido en la aproximación puede controlarse ajustando el cálculo de los elementos de la matriz y considerando una proyección truncada más precisa del dato en los subespacios wavelet. Propiedades de la base y del operador garantizan que el esquema de aproximación resultante sea simple, eficiente, numéricamente estable.

En futuros trabajos pretendemos implementar este método en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias presentes en distintas aplicaciones y comparar su desempeño frente a métodos de aproximación existentes para algunas ecuaciones particulares basados en la transformada de Laplace.

10. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por MINCyT-CONICET-CNRS (International Cooperation Programme, CONICET Resol. 147/15) y UBACyT 20020130100671BA .

REFERENCIAS

- Agrawal O.P. A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynam.*, 38:323–337, 2004.
- Al-Salti N., Karimov E., y Kerbal S. Boundary-value problems for fractional heat equation involving Caputo-Fabrizio derivative. 4:79–89, 2016.
- Almeida R. y Torres F.M. Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical*

- Simulation*, 2010.
- Atanackovic T.M. y Stankovic B. On a numerical scheme for solving differential equations of fractional order. *Mechanics Research Communications*, 35:429–438, 2008.
- Atangana A. y Clout A.H. Stability and convergence of the space fractional variable-order schrodinger equation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 10, 2013.
- Baleanu D., Diethelm K., y et. al. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*, volumen 5. Worl's Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, Second Ed., 2017.
- Caputo M. y Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Natural Sciences Publishing Cor., Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1:73–85, 2015.
- Crank J. The mathematics of diffusion. *Calderon Press, Oxford*, 1979.
- Diethelm K. y Ford N. Analysis of fractional differential ecuations. *J. Math. Anal. Appl.*, 265:229–248, 2002.
- Dougmo Goufo E.F. Application of the Caputo-Fabrizio fractional derivative without singular kernel to Korteweg-de Vries-Burgers equation. 132:54, 2017.
- Fabio M.A. y Serrano E.P. Infinitely oscillating wavelets and an efficient implementation algorithm based on the FFT. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 2:61–69, 2015.
- Fabio M.A. y Troparevsky M.I. An inverse problem for the Caputo fractional derivative by means of the wavelet transform. *Progress in Fractional Differentiation and Applications. An International Journal*, 4, 2017.
- Herrmann R. Folded potentials in cluster physicsa comparison of Yukawa and Coulomb potentials with Riesz fractional integrals. *J. Phys. A.*, 40, 2013.
- Losada J. y Nieto J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications. An International Journal*, 2:73–85, 2015.
- Maitama S. y Abdullahi I. New analytical method for solving linear and nonlinear fractional partial differential equations. *Progress in Fractional Differentiation and Applications. An International Journal*, 2:247–256, 2016.
- Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. S. Mallat, 2009.
- Meyer Y. Ondelettes et operateurs 2: Operatteurs de Calderon Zygmund. *Hermann et Cie*, 1990.
- Miller K. y Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley & Sons Inc., New York*, 2:247–256, 1993.
- Odibat Z.M. y Momani S. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *J. Appl. Math. & Informatics*, 26:15–27, 2008.
- Odziejewicz T., Malinowska A.B., y Torres D.F.M. Fractional calculus of variations in terms of a generalized fractional integral with applications to physics. *bstr. Appl. Anal. Art. ID 871912*, 24, 2012.
- Oldham K. y Spanier J. The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. *New York: Academic Press*, 2006.
- Podlubny I. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1991.
- Sheikh N.A., Saqib M., Khan I., Jan S.A., Oldham K., y Spanier J. A comparative study of Atangana-Baleanu and Caputo-Fabrizio fractional derivatives to the convective flow of a generalized Casson fluid. 2017.
- Troparevsky M., Serrano E., y Fabio M. Approximate solutions to integral equations by wavelet decomposition methods. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, páginas 3383–3394, 2016.
- Unser M. y Blu T. Fractional spline and wavelets. *Internaional Journal of Waveletes Multire-*

- solution and Information Processing*, 42, 2000.
- Walnut D.F. *An Introduction to Wavelet Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, Second Ed. Birkhauser, 2002.
- Ye H. y Gao J. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 328:1075–1081, 2007.
- Zhuang P., Liu F., Anh V., y Turner I. Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term. 47:1760–1781, 2009.