

## ANÁLISIS DINÁMICO DE MÁSTILES ARRIOSTRADOS MEDIANTE INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

**Bruno A. Roccia<sup>1</sup>, Sergio Preidikman<sup>1y2</sup> y Julio C. Massa<sup>1y2</sup>**

<sup>1</sup>Departamento de Mecánica. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Río Cuarto.  
Campus Universitario, Ruta Nacional 36 - Km. 601. 5800 Río Cuarto. Argentina.  
Tel./Fax.:0358-4676246

<sup>2</sup>Departamento de Estructuras. Facultad de C. E. F y N. Universidad Nacional de Córdoba.  
Tel. : 0351-4334145, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina.

e-mail: [broccia@ing.unrc.edu.ar](mailto:broccia@ing.unrc.edu.ar) [spreidik@wam.umd.edu](mailto:spreidik@wam.umd.edu) e-mail: [jmassa@efn.uncor.edu](mailto:jmassa@efn.uncor.edu)

**Palabras clave:** mástiles arriostrados, estructuras de tracción, soluciones periódicas.

**Resumen.** *En este trabajo se estudia la respuesta dinámica de mástiles arriostrados comúnmente utilizados en comunicaciones. Para llevar a cabo simulaciones numéricas de una manera simple se modela el mástil como una viga-columna apoyada sobre un conjunto de soportes no-lineales y sin masa que representan el sistema de riendas. El efecto de segundo orden de las fuerzas de compresión en la dirección del mástil se tiene en cuenta mediante el uso de la matriz de rigidez geométrica. Los cables que representan el conjunto de apoyos elásticos se idealizan usando el modelo parabólico clásico, válido para cables con flecha pequeña. El sistema estructural aquí presentado tiene dos grados de libertad por nudo: el desplazamiento transversal y la rotación de los nudos en los cuales se ha discretizado el sistema. Primero se estudia estáticamente la variación de la rigidez horizontal de los nudos arriostrados en función de la pretensión de montaje y del desplazamiento horizontal del nudo. Para tener en cuenta el valor instantáneo de la rigidez, que es función de la deformación, se desarrolló un algoritmo que permite integrar numéricamente e interactivamente en el dominio del tiempo el sistema de ecuaciones diferenciales que describe al sistema dinámico no lineal. Finalmente, se comparan resultados provistos por el modelo totalmente no lineal de los cables con aquellos provistos por linealizaciones habitualmente utilizadas en la práctica.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Los estudios de fenómenos inherentes a elementos estructurales que contienen cables y trabajan a tracción (estructuras de tracción) tales como mástiles arriostrados<sup>1, 2, 3</sup>, puentes colgantes y arriostrados<sup>4, 5</sup>, líneas que anclan varias estructuras oceánicas como boyas, barcos y plataformas<sup>6, 7, 8</sup>, permiten desarrollar nuevos tipos de diseños que pueden soportar satisfactoriamente esta clase de solicitaciones.

En el caso de mástiles arriostrados, el funcionamiento de los cables es no lineal y depende de la flecha. El funcionamiento como viga-columna del mástil es también no-lineal, esta no-linealidad proviene de la interacción entre las grandes cargas axiales (normalmente cercanas a las de pandeo) y los considerables desplazamientos laterales que ocurren en condiciones normales de trabajo<sup>9, 10, 11</sup>. Otros factores tales como las ráfagas, las vibraciones inducidas por emisión de vorticidad, el “galope” de las riendas, los sismos, la presencia de masas rotantes desbalanceadas y la ruptura de riendas<sup>12</sup>, entre otros, cobran gran importancia al momento de realizar un análisis dinámico de mástiles arriostrados.

Las estructuras de tracción (conteniendo cables), son susceptibles de experimentar grandes movimientos debido a cargas concentradas y efectos dinámicos debido a su pequeña rigidez. La respuesta de este tipo de sistemas es altamente no-lineal tanto para cargas de pretensión como para cargas en servicio activo de la estructura, a pesar de la linealidad de los materiales y las cargas aplicadas<sup>13</sup>.

Las cargas de pretensión son fuerzas (cargas originadas en el montaje, peso o presión), que actúan sobre una configuración predominante de equilibrio estático en la estructura. Este tipo de cargas estabiliza la estructura y además proporcionan rigidez a futuras deformaciones. La respuesta del sistema a este tipo de cargas es siempre no-lineal en la configuración de equilibrio, ya que el estado de tensión es dependiente de las cargas actuantes. Las cargas de servicio son aquellas fuerzas variables, estáticas o dinámicas, que pueden actuar sobre la estructura a lo largo de su vida útil. La respuesta del sistema a este tipo de carga puede ser no-lineal o cuasi-lineal, dependiendo de la dirección y magnitud relativa de estas cargas respecto a el estado de tensión y la configuración de la estructura pretensionada.

En este trabajo se analiza primero, en forma estática, la incidencia sobre la rigidez horizontal de los nudos arriostrados y sobre la carga de compresión del mástil, de la variación de la rigidez instantánea de los cables función del desplazamiento del nudo al que concurren. Este análisis se realiza para un sistema con cuatro planos de riendas a 90° y para un sistema espacial con tres planos de riendas a 120°. Esas variables, rigidez horizontal y carga de compresión, y su variación instantánea tienen una incidencia muy importante sobre las características dinámicas de los mástiles arriostrados. Posteriormente se realiza un análisis dinámico lineal y un análisis dinámico no-lineal de un sistema mástil-riendas y se presentan gráficos que muestran la incidencia del efecto no lineal de las riendas sobre el período del sistema.

## 2 EL MODELO ESTRUCTURAL.

El mástil se modela como una viga-columna continua, tanto en la distribución de rigidez como en la distribución de masa. Esta viga columna se considera apoyada sobre un conjunto de soportes elásticos no-lineales y sin masa que representan el sistema de riendas.

En la Fig. 1 se muestra el modelo de la viga-columna utilizado para llevar a cabo las

simulaciones numéricas. La viga-columna se modela con dos grados de libertad dinámicos en el plano por nudo:  $U_1$  y  $U_2$  son los desplazamientos transversales de la viga y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los giros de los respectivos nudos.

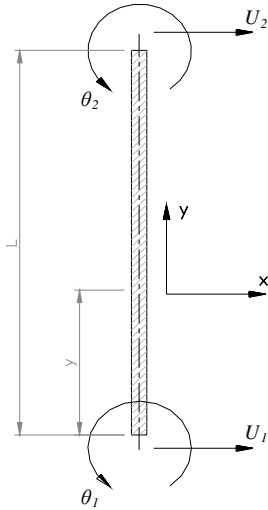


Figura 1: Modelo de viga columna utilizado en las simulaciones numéricas.

El efecto de las fuerzas en la dirección del mástil causadas por las riendas también se tiene en cuenta mediante una matriz de rigidez geométrica. Este efecto introduce no-linealidades del tipo geométrica que son importantes cuando se producen grandes desplazamientos debido a cambios significativos en la geometría de la estructura, de manera que las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la configuración deformada.

Es importante notar que al considerar el equilibrio en la configuración deformada del elemento, se acopla el efecto axial y el efecto de flexión.

Los cables, que constituyen un conjunto de apoyos elásticos no-lineales, se idealizan usando el modelo parabólico clásico. Este modelo es aplicable en el caso de cables con flecha pequeña. En la Fig. 2 se muestra el modelo de cable parabólico utilizado para llevar a cabo las simulaciones numéricas.

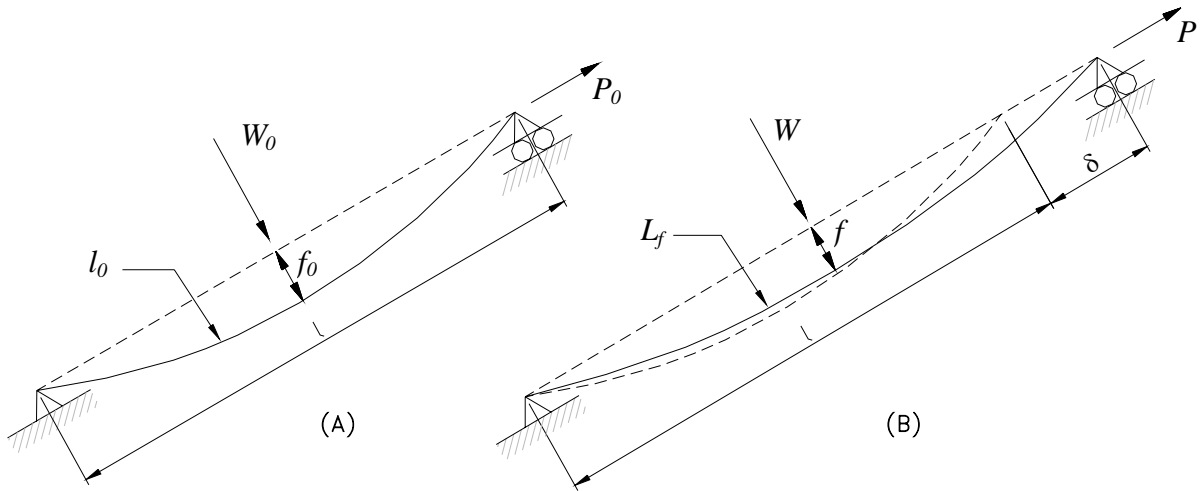


Figura 2: El modelo de cable parabólico.

$$P_0 f_0 = \frac{W_0 l}{8} \Rightarrow \frac{f_0}{l} = \frac{W_0}{8P_0} \text{ Fig. (A)} \quad \frac{f}{l + \delta} = \frac{W}{8P} \text{ Fig. (B)} \quad l_0 = l + \frac{8}{3} l \left[ \frac{f}{l} \right]^2 \quad (1)$$

$\delta$  es la variación de distancia entre los extremos del cable,  $P_0$  es la carga de pretensión,  $P$  es la carga instantánea en el cable y  $f_0$  es la flecha en la configuración inicial del cable.  $W_0$  es la fuerza total transversal al cable en su estado inicial mientras que en la configuración final  $W$  puede resultar distinto de  $W_0$  (por acción del viento, presencia de manguito de hielo, etc.).

El modelo para la viga-columna y el sistema de riendas se presentan en forma esquemática

en la Fig. 3. El desplazamiento transversal  $U_x(t)$  de la viga-columna se considera positivo en el sentido positivo del eje de las abscisas  $x$  y el giro  $\theta(t)$  se considera positivo en el sentido antihorario de las manecillas del reloj.

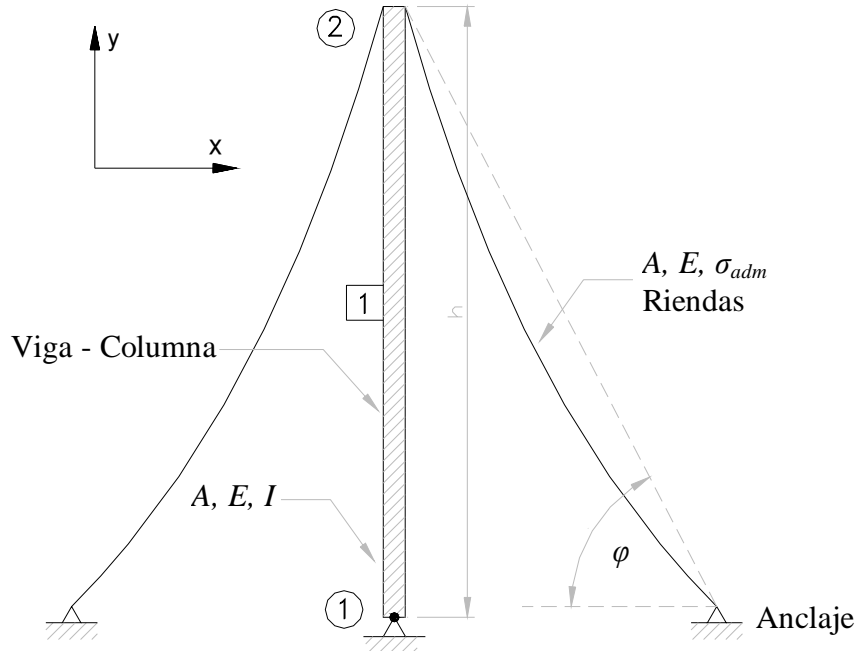


Figura 3: Esquema del modelo viga-columna y sistema de riendas.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen fácilmente a partir de las leyes de movimiento de Newton. Cuando se ignora el amortiguamiento, estas tienen la siguiente forma:

$$[M] \ddot{\mathbf{x}}(t) + [K] \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  representa el vector de desplazamientos nodales,  $[M]$  es la matriz de masa consistente del sistema <sup>14</sup>,  $[K]$  es la matriz de rigidez total de la estructura,  $\mathbf{P}(\mathbf{x}(t))$  representa el vector que tiene en cuenta la contribución de rigideces proveniente de los cables,  $\mathbf{F}(t)$  es un vector que contiene las fuerzas de excitación externa.

Las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal del sistema se integran numéricamente en forma simultánea en el dominio del tiempo utilizando un método implícito predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming <sup>18,19</sup>.

La matriz de masa consistente del elemento en coordenadas locales esta dada por:

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 36 & 32 L & 54 & -13 L \\ & 4 L^2 & 13 L & -3 L^2 \\ & & 156 & -22 L \\ \text{simet} & & & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la densidad por unidad de volumen,  $A$  es el área del elemento y  $L$  su longitud.

La matriz de rigidez total está compuesta por la suma de la matriz de rigidez elástica,  $[K_E]$ , y la matriz de rigidez geométrica,  $[K_G]$ , como se muestra a continuación:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (4)$$

La matriz de rigidez elástica del elemento en coordenadas locales está dada por,

$$[K_E] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{simétrica} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material e  $I$  es el momento de inercia del elemento.

La matriz de rigidez geométrica utilizada en este trabajo<sup>15</sup> está dada por:

$$[K_G] = -\frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3 \\ \text{simétrica} & & & 4L \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde  $P$  es la carga axial, positiva si es de compresión.

La relación implícita carga–desplazamiento ( $P$ - $\delta$ ), en el modelo de cable parabólico<sup>16, 17</sup> está dada por la siguiente expresión no lineal:

$$P^3 + P^2 \left[ \frac{a_0}{2P_0^2} - P_0 - \frac{AE}{l} \delta \right] - \frac{a}{2} = 0 \quad \text{donde: } a = \frac{EA}{12} W^2, \quad a_0 = \frac{EA}{12} W_0^2 \quad (7)$$

donde  $E$  es el modulo de elasticidad del cable,  $A$  es el área transversal del cable y  $P$ ,  $P_0$ ,  $l$ ,  $\delta$ ,  $W$  y  $W_0$  fueron definidos con anterioridad.

La incorporación de relaciones no-lineales carga-desplazamiento debida a las riendas no presenta complicaciones, ya que la solución del problema se obtiene mediante integración numérica en el dominio del tiempo de las ecuaciones de movimiento.

### 3 ANÁLISIS ESTÁTICO DE LA RIGIDEZ INSTANTÁNEA DE LA RIENDAS

En la Tabla 1 se muestran datos del mástil y de las riendas utilizados en las simulaciones.

Tabla 1: Datos empleados en el análisis de rigidez.

DATOS GENERALES	DATOS DEL MÁSTIL	DATOS DE LAS RIENDAS
Coordenadas de los anclajes [m] $S_1 = (4 ; 0)$ $S_2 = (-4 ; 0)$	Altura: $h = 13 \text{ m}$	$E = 1,56 \times 10^{11} \text{ Pa}$ $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$ $A = 3,44 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ $P_0 = 615,73 \text{ N}$ $\sigma_{adm} = 5,738 \times 10^8 \text{ Pa}$

$P_0$  y  $\sigma_{adm}$  son, respectivamente, la pretensión y la tensión admisible del cable.

En la Fig. 4 se presenta el gráfico de la carga en cada una de las riendas y la carga de compresión sobre el mástil en función del desplazamiento horizontal del nudo arriostrado. La proyección del desplazamiento  $U_2$  sobre la dirección de cada rienda determina el valor de  $\delta$  para ser usado en la ecuación (7) en cada rienda.

Se puede observar la relación no lineal entre estos parámetros: mientras una rienda se estira y toma más carga (rienda 1) la otra se afloja y toma menos carga. Lo que aumenta la rienda 1 es más que lo disminuye la rienda 2 y por lo tanto la carga de compresión sobre el mástil aumenta con el desplazamiento (cualquiera sea el sentido del desplazamiento horizontal). Para el gráfico se usaron los datos de la Tabla 1.

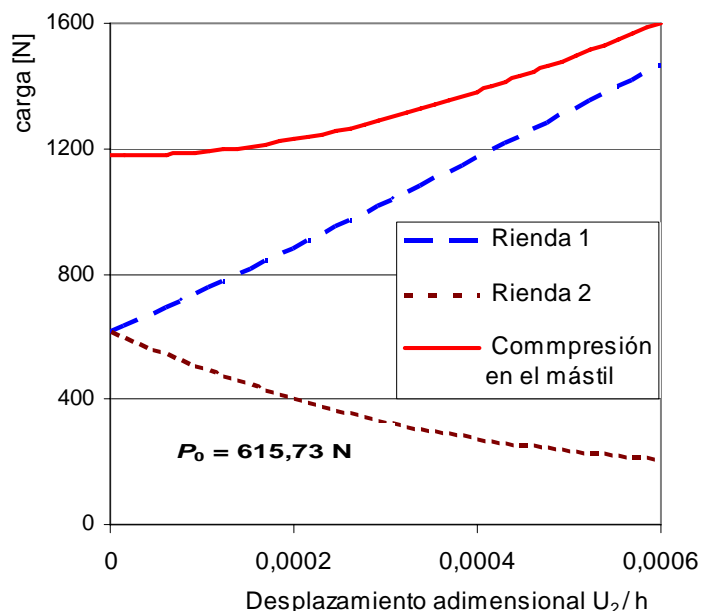


Figura 4: Carga en los cables y en el mástil del sistema de la Fig. 3 en función de  $U_2/h$  usando datos de la Tabla 1.

### 3.1 Análisis de la rigidez horizontal de un nudo arriostrado

La geometría del sistema que se estudia en esta sección se muestra esquemáticamente en la Fig. 3 descripta anteriormente.

Para realizar un análisis de la rigidez instantánea se comienza definiendo la rigidez horizontal lineal y la rigidez horizontal variable del nudo arriostrado debido al efecto de las riendas:

$$\text{Rigidez horizontal lineal: } K_L = 2 \frac{AE}{l} \cos^2 \varphi \tag{8}$$

$$\text{Rigidez horizontal variable: } K = \frac{AE}{l} \left[ \left( \frac{P_1^3}{P_1^3 + a_0} \right) + \left( \frac{P_2^3}{P_2^3 + a_0} \right) \right] \cos^2 \varphi$$

donde  $\varphi$  es el ángulo que forma la horizontal con una línea imaginaria que une el anclaje de la rienda con el nudo arriostrado,  $P_1$  y  $P_2$  son valores instantáneos de las cargas que dependen implícitamente de la deformación de los cables. Los parámetros  $A$ ,  $E$ ,  $l$  y  $a_0$  se definieron anteriormente y corresponden a las propiedades de los cables.

En la Fig. 5 se muestra la variación de la rigidez horizontal instantánea de las riendas en función del desplazamiento horizontal del nudo 2 (ver Fig. 3).

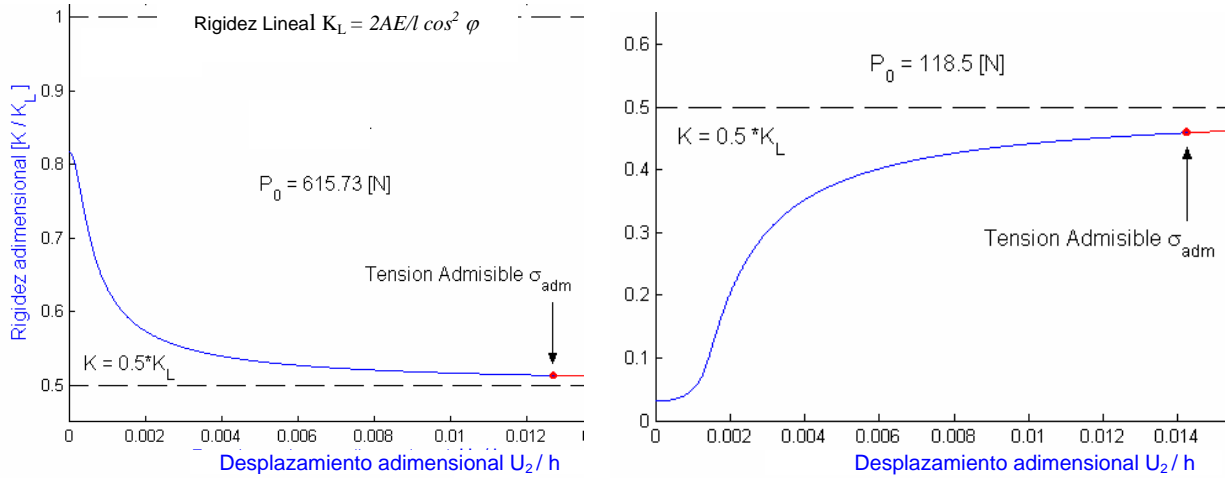


Figura 5: Variación de la rigidez instantánea del nudo 2 en función del desplazamiento horizontal.

En el gráfico anterior se puede apreciar la influencia del parámetro pretensión. Dependiendo del valor de  $P_0$ , la rigidez horizontal del nudo 2 puede aumentar o disminuir a medida que se desplaza ese nudo, esto es conocido como endurecimiento o ablandamiento de la estructura.

También se puede observar que la rigidez horizontal del nudo en ambos casos tiende asintóticamente al valor  $K = 0,5 K_L$  ( $K_L = 2AE/l \cos^2 \varphi$ ). Esta situación se presenta cuando, la deformación del sistema es tal que uno de los cables se estira aportando una rigidez casi igual al valor  $AE/l \cos^2 \varphi$ , y el otro se afloja mucho aportando muy poca rigidez. Este análisis se puede efectuar muy fácilmente utilizando (7) y se puede observar en la Fig. 4.

En la Fig. 6 se ha graficado la rigidez instantánea versus el desplazamiento horizontal del nudo 2 para varios valores de la pretensión.

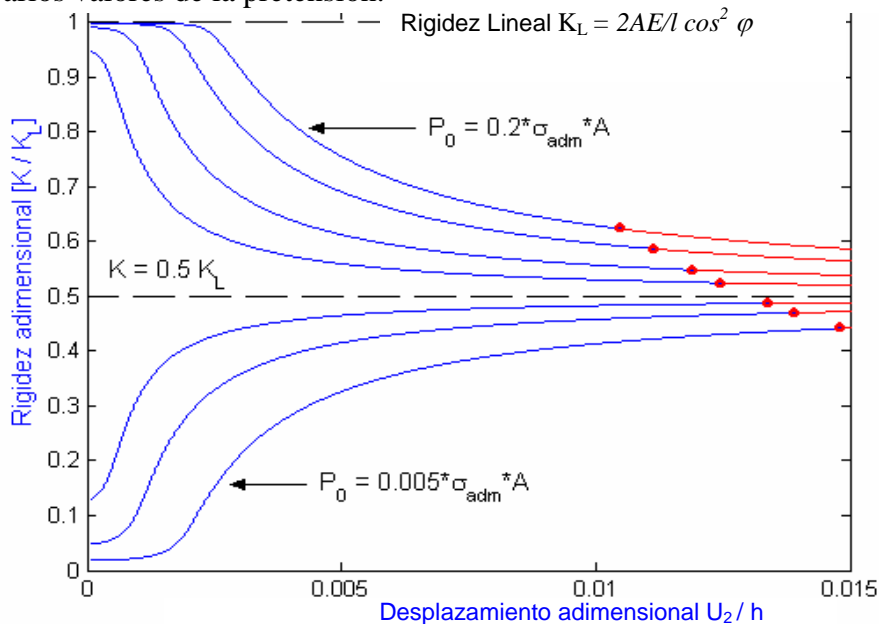


Figura 6: Rigidez instantánea en función del desplazamiento del nudo 2 para varios valores de pretensión.

A continuación se establecen los límites para los valores de pretensión y para el valor de tensión en el cable. Según el Apéndice del Capítulo 5 de la Norma CIRSOC 306, la pretensión mínima de montaje para un mástil está dada por la siguiente expresión:

$$(P_0)_{\min} = 7100 (d_k)^{0,667} \quad (9)$$

donde  $P_0$  es la pretensión en  $[\text{kN/m}^2]$  y  $d_k$  es la proyección horizontal de la rienda medida en metros.

La pretensión máxima de montaje para un mástil no tiene una expresión definida pero en la práctica se la limita de modo que:

$$(P_0)_{\max} \leq 0,15 \sigma_{adm} A \quad (A \text{ es el área del cable}). \quad (10)$$

Finalmente la tensión en el cable para la condición de diseño no debería superar el 40% de la tensión admisible  $\sigma_{adm}$  (para obtener un coeficiente de seguridad mayor a 2).

Estos valores definen un rango de valores que delimitan una zona en la cual trabajarán las riendas. En la Fig. 7 se presenta un gráfico donde se muestra dicha zona de trabajo para un mástil arriostrado cuyos datos están dados en la Tabla 1.

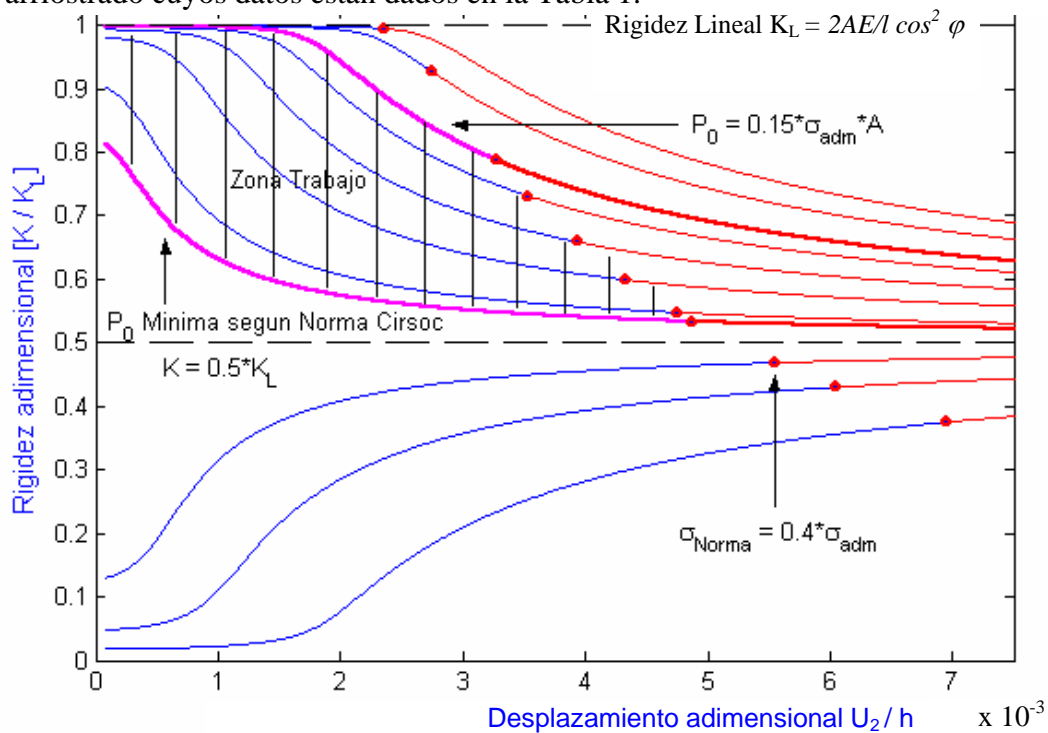


Figura 7: Zona de trabajo de las riendas.

En la zona de trabajo de las riendas se observa que la rigidez horizontal del nudo disminuye cuando se deforma el sistema, esto es equivalente a decir que la estructura se ablanda.

Obviamente la pretensión de montaje no se mantiene eternamente en el valor inicial, la pretensión del sistema podría disminuir con el paso del tiempo de forma tal que la estructura al deformarse, se endurezca en lugar de ablandarse.

Para mostrar este fenómeno se toma el valor de pretensión mínima que establece la Norma



CIRSOC 306 para el mástil de la Tabla 1, y se obtiene:

$$(P_0)_{\min} = 7100 (4)^{0,667} 0,0000344 = 615,73 \text{ [N]} \quad (11)$$

En la Fig. 8 se muestran los resultados obtenidos suponiendo que transcurrido un largo tiempo posterior al montaje de la estructura, la pretensión cae un 50% :  $P_0 \rightarrow 307.86 \text{ [N]}$ .

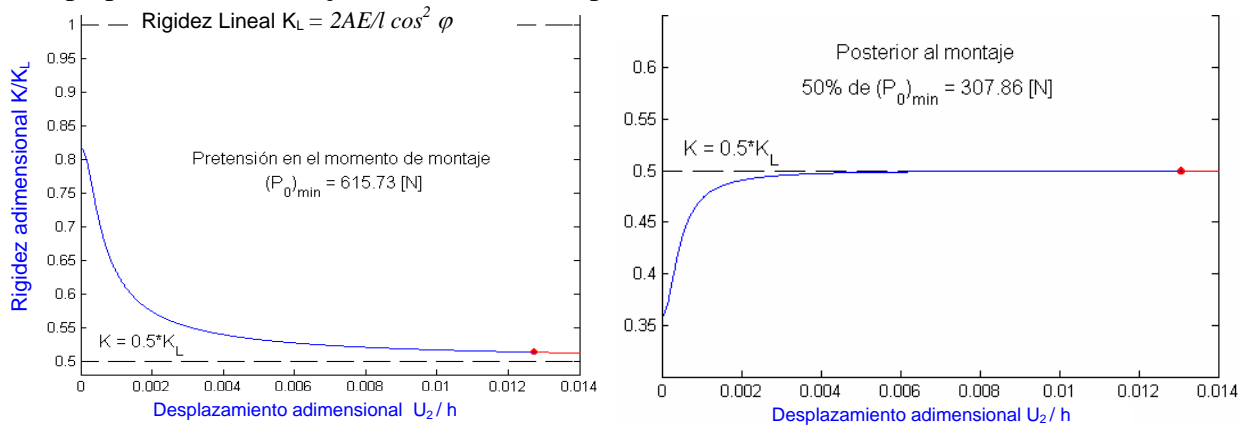


Figura 8: Rigidez del nudo 2: a) al momento del montaje. b) después de transcurrido cierto tiempo.

### 3.2 Análisis de rigidez para un mástil espacial con cuatro planos de riendas a 90°

En la Fig. 9 se presenta un esquema del mástil que se estudia a continuación:

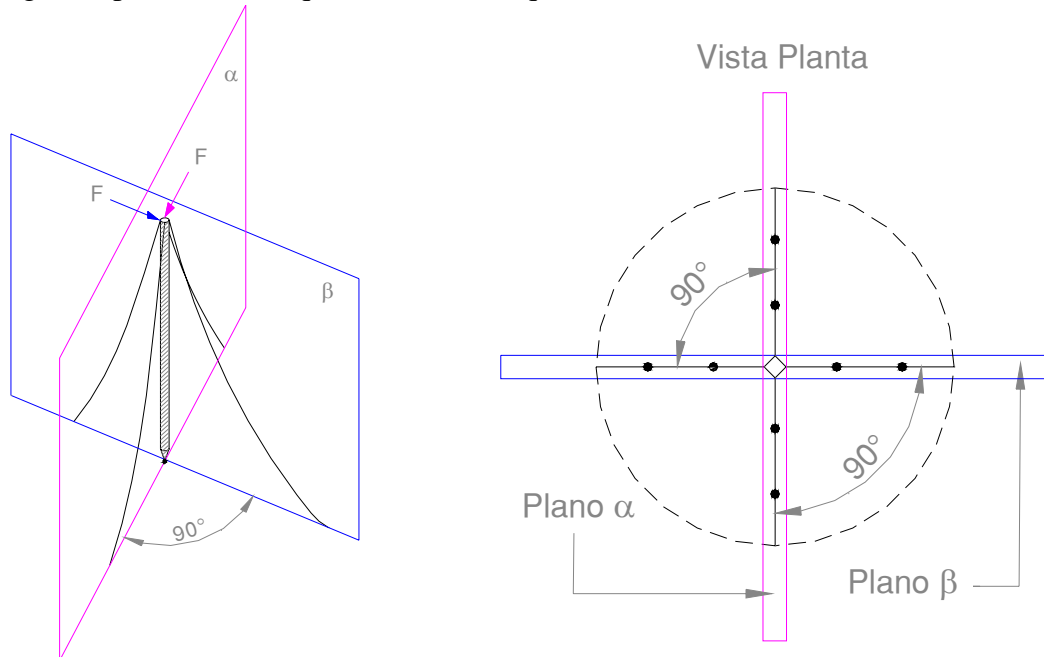


Figura 9: Esquema de una torre espacial con cuatro planos de riendas a 90°.

Considerando un nudo del mástil donde concurren dos riendas iguales y coplanares (uno de cada lado) la rigidez es la suma de la rigidez de cada uno de los cables.

En el límite, cuando el desplazamiento horizontal es muy grande en uno de los dos planos que contienen a las riendas ( $\alpha$  o  $\beta$ ), uno de los cables aportará la rigidez lineal dada por  $K_1 = AE/l \cos^2 \varphi$ , mientras que el otro cable casi no aportará rigidez, como se vio en la sección 3.1. De la misma forma si en el momento del montaje cada una de las riendas aportaba más de 0,5  $K_1$ , la rigidez disminuirá con el desplazamiento, en caso contrario aumentará.

### 3.3 Análisis de rigidez para un mástil espacial con tres planos de riendas a 120°

En la Fig. 10 se presenta un bosquejo de un mástil espacial con tres planos de riendas a 120°.

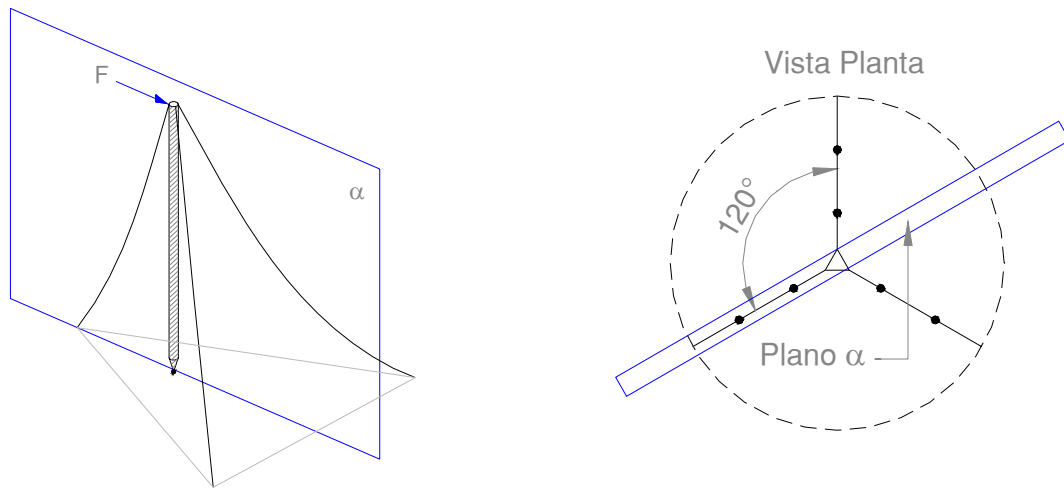


Figura 10: Esquema de una torre espacial con tres planos de riendas a 120°.

Tomando como referencia el plano  $\alpha$  (ver Fig. 10), el cual contiene a una de las riendas, se estudia a continuación la rigidez instantánea aportada por el cable al nudo arriostrado.

La rienda que se encuentra en el plano aporta una rigidez  $K_1 = \psi_1 K_0$ :

$$K_1 = \psi_1 K_0 \quad \text{donde: } K_0 = \frac{AE}{l} \cos^2 \varphi, \quad \text{y} \quad \psi_1 = \frac{P_1^3}{P_1^3 + a_0} \quad (12)$$

$A, E, l, \varphi, P, P_1, P_2$  y  $a_0$  se definieron anteriormente.

Las riendas que están fuera del plano de referencia aportan poca rigidez:

$$K_2 = \psi_2 K_0 \cos^2 60 = 0,25 \psi_2 K_0 \quad \text{donde: } \psi_2 = \frac{P_2^3}{P_2^3 + a_0} \quad (12)$$

Por lo tanto la rigidez horizontal instantánea del nudo arriostrado resulta:

$$K = K_1 + 2 K_2 = \psi_1 K_0 + 0,5 \psi_2 K_0 \quad (13)$$

La rigidez horizontal inicial de montaje del nudo arriostrado es:

$$K_{\text{montaje}} = 1,5 \psi_0 K_0 = \psi_0 K_L \quad \text{donde: } \psi_0 = \frac{P_0^3}{P_0^3 + a_0} \quad \text{y} \quad K_L = 1,5 \frac{AE}{l} \cos^2 \varphi \quad (14)$$

Cuando el desplazamiento es muy grande ( $U_2 \rightarrow \infty$ ), se estira el cable contenido en el plano y se aflojan las riendas no contenidas en el plano:

$$U_2 \rightarrow +\infty \quad \psi_1 \rightarrow 1 \quad \psi_2 \rightarrow 0 \quad K_{+\infty} \rightarrow K_0 \quad (15)$$

Si el desplazamiento es muy grande pero en sentido opuesto, se estiran las riendas fuera del plano:

$$U_2 \rightarrow -\infty \quad \psi_1 \rightarrow 0 \quad \psi_2 \rightarrow 1 \quad K_{-\infty} \rightarrow 0,5 K_0 \quad (16)$$

Si la pretensión  $P_0$  tiene un valor suficiente grande como para hacer que el valor de  $\psi_0$  sea superior a  $2/3$ , el nudo se ablanda con el desplazamiento cualquiera sea el sentido, ya que:

$$\psi_0 > 2/3 \Rightarrow K_{\text{montaje}} > K_0 \Rightarrow K_{\text{montaje}} > K_{+\infty} > K_{-\infty} \Rightarrow \text{"ablanda"} \quad (17)$$

Por el contrario, si la pretensión  $P_0$  tiene un valor suficientemente pequeño para que  $\psi_0$  sea inferior a  $1/3$ , el nudo se endurece con el desplazamiento cualquiera sea el sentido, ya que:

$$\psi_0 < 1/3 \Rightarrow K_{\text{montaje}} < 1/2 K_0 \Rightarrow K_{\text{montaje}} < K_{-\infty} < K_{+\infty} \Rightarrow \text{"endurece"} \quad (18)$$

**CONCLUSIÓN: Cuando el coeficiente  $\psi_0$  debido a la pretensión es mayor a  $2/3$  el mástil se ablanda con el desplazamiento y cuando  $\psi_0$  es menor a  $1/3$  el mástil se endurece.**

En la Fig. 11 se presenta un gráfico donde  $\psi_0$  es mayor que  $2/3$ ; se observa que el mástil se ablanda en ambos sentidos. Notar que este ablandamiento no es simétrico, sino que la torre se ablanda más en un sentido que en el otro.

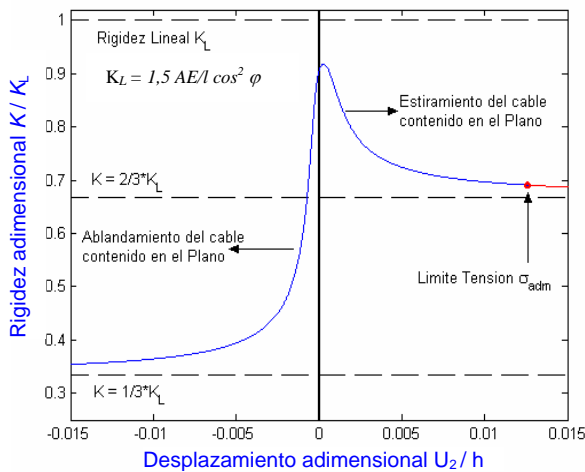


Figura 11: Rigidez vs. desplazamiento para  $\psi_0 = 0,9$ .

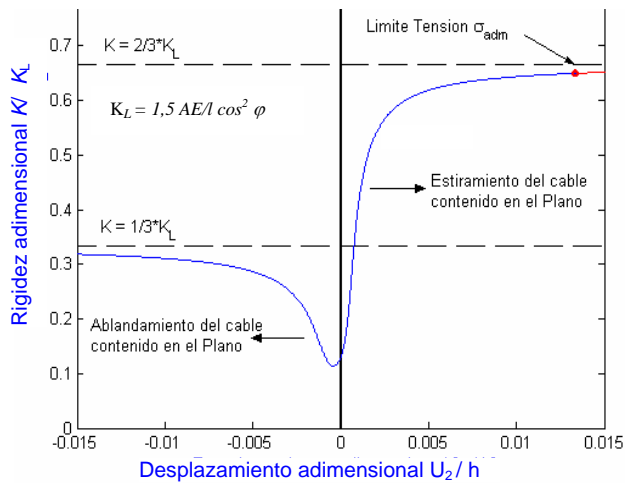


Figura 12: Rigidez vs. desplazamiento para  $\psi_0 = 0,13$ .

En la Fig. 12 se muestra un gráfico donde  $\psi_0$  es menor que  $1/3$  y se observa un comportamiento contrario al de la Fig. 11 ya que el mástil se endurece en ambos sentidos, pero nótese también que este endurecimiento no es simétrico.

En la Fig. 13 se presenta el caso intermedio donde  $\psi_0$  es mayor que  $1/3$  y menor que  $2/3$ ,

$$1/3 < \psi_0 < 2/3 \quad \Rightarrow \quad K_{-\infty} < K_{\text{montaje}} < K_{+\infty} \quad (19)$$

esta situación produce un resultado muy interesante, ya que hace que el mástil se ablande en un sentido del desplazamiento y se endurezca en el otro.

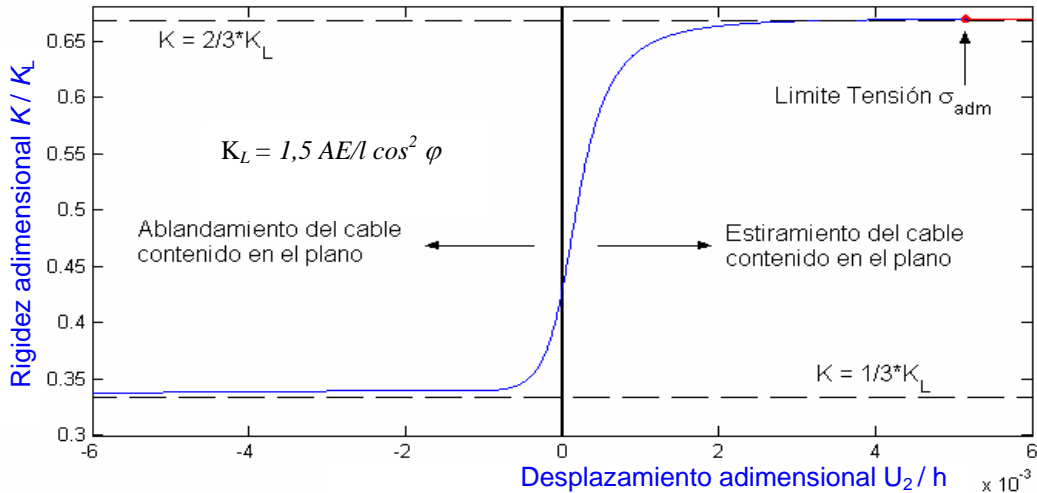


Figura 13: Gráfico de rigidez horizontal vs. desplazamiento para  $\psi_0 = 0,42$ .

En la Fig. 14 se puede observar la variación de la rigidez instantánea horizontal del nudo 2 respecto al desplazamiento para distintos valores de  $\psi_0$ .

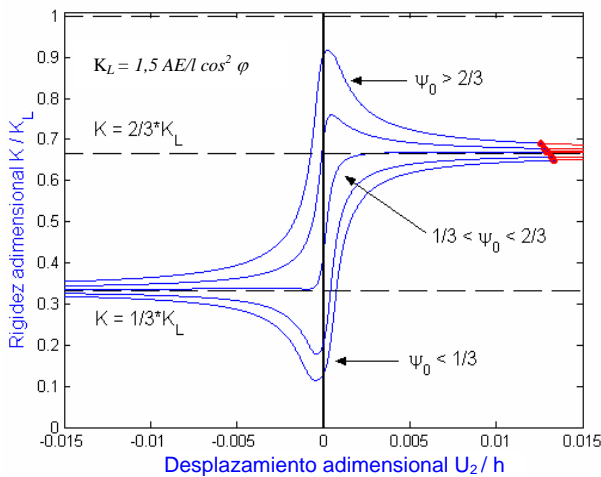


Figura 14: Rigidez horizontal del nudo para varios  $\psi_0$ .

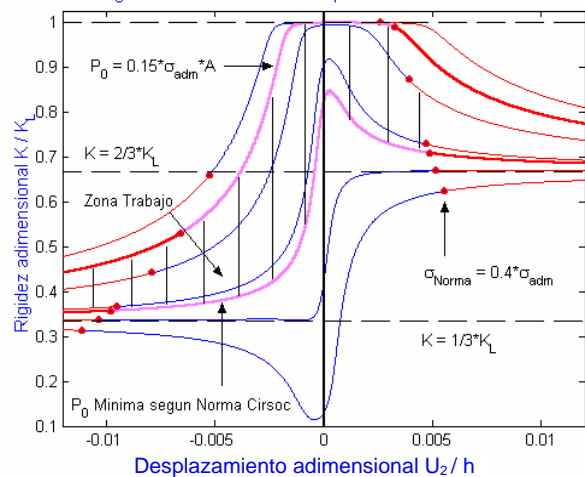


Figura 15: Zona de trabajo de las riendas.

Es interesante analizar la Fig. 15 puesto que en este gráfico se presenta la zona de trabajo de las riendas según las Normas CIRSOC (ver Eq. 8). Como se ve, **en la práctica sólo es posible el caso donde  $\psi_0$  es mayor que  $2/3$  y por lo tanto la estructura después del montaje perderá rigidez con el desplazamiento en las dos direcciones, más en el sentido de ablandar el cable contenido en el plano y menos en la dirección opuesta.**

## 4 ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MÁSTIL ARRIOSTRADO EN EL PLANO

### 4.1 Esquema de Integración Numérica

A efectos de integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento (2) en el dominio del tiempo, se introduce el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t))^T = (x_1, \theta_1, x_2, \theta_2, \dots, x_n, \theta_n; \dot{x}_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{x}_n, \dot{\theta}_n)^T \quad (20)$$

Premultiplicando ambos miembros de (2) por la inversa de la matriz de masa  $[M]$  se obtiene la siguiente expresión para las aceleraciones:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{y}}_2(t) = [M]^{-1} [K] \mathbf{y}_1(t) - [M]^{-1} (\mathbf{P}(\mathbf{y}_1(t)) - \mathbf{F}(t)) \quad (21)$$

Por consiguiente el sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden dado por (2) puede ser escrito como un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\dot{\mathbf{y}} = [A] \mathbf{y} + \mathbf{f} \quad (22)$$

donde,

$$[A] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ \hline -[M]^{-1} [K] & \mathbf{0}_{n \times n} \end{array} \right] \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{n \times n} \\ -[M]^{-1} (\mathbf{P}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{F}(t)) \end{array} \right\} \quad (23)$$

El sistema de ecuaciones (22) se integra numéricamente en el dominio del tiempo mediante un esquema predictor–corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming<sup>18, 19</sup>.

En cada paso de integración, al cual corresponde un estado, se calculan las fuerzas en cada cable, las cuales tienen que ser descompuestas en el sistema de referencia global. Después de calcular la fuerza en cada cable se obtiene a continuación la fuerza aplicada al mástil en el nudo correspondiente.

De esta manera se obtienen dos fuerzas en coordenadas globales aplicadas al mástil: una fuerza transversal a la torre y una fuerza en la dirección del mástil a la cual se le suma también el peso de todos los tramos de la torre que se encuentran por encima del nudo analizado, con lo cual se pueden producir fenómenos de inestabilidad (pandeo)

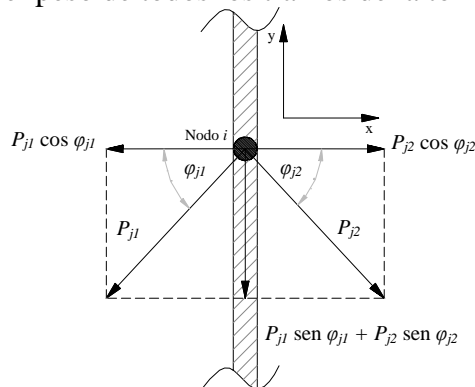


Figura 16: Descomposición de las fuerzas inducidas por las riendas.

La fuerza transversal debido a los cables en el nudo  $i$  resulta:

$$P_i = P_{j2} \cos \varphi_{j2} - P_{j1} \cos \varphi_{j1} \quad (24)$$

La fuerza en la dirección del mástil debido a los cables en el nudo  $i$  está dada por:

$$Q_i = P_{j1} \text{sen } \varphi_{j1} + P_{j2} \text{sen } \varphi_{j2} \quad (25)$$

En la Fig. 16 se esquematiza la forma en que se descomponen las fuerzas ejercidas por las riendas sobre el mástil.

#### Resumen de las etapas llevadas a cabo en cada paso de integración:

1. Se calculan los desplazamientos de los nudos y el  $\delta$  en cada uno de los cables.
2. Se resuelve la ecuación cúbica (7) para obtener la carga en cada cable.
3. Se calcula la matriz de rigidez elástica, la matriz de rigidez geométrica y el vector de cargas externas.
4. Se predice el estado de la estructura al final del paso de integración.
5. La solución predicha es modificada usando el llamado “error de truncamiento local”.
6. La solución predicha y modificada es “corregida” mediante un procedimiento iterativo hasta obtener convergencia. Los desplazamientos en los cables y las matrices de rigidez elástica y geométrica son recalculados en cada iteración.
7. Se determina el nuevo error de truncamiento para utilizarlo durante el siguiente paso de integración y para evaluar la solución final correspondiente al paso actual.
8. Se obtiene el estado del sistema correspondiente al tiempo actual.
9. Se incrementa el tiempo y se retoma el ciclo desde 1.

Los detalles del método de integración pueden encontrarse en [18].

#### 4.2 Simulaciones Numéricas

En las simulaciones numéricas se utilizó una torre simétrica con dos riendas. Los datos utilizados se detallan en la Tabla 2.

Tabla 2: Datos empleados en la simulación Numérica.

DATOS GENERALES	DATOS DEL MÁSTIL	DATOS DE LAS RIENDAS
$N_n = 6$	$h = 13 \text{ m}$	$E = 1,56 \times 10^{11} \text{ Pa}$
$N_a = 2$	$\rho = 7700 \text{ Kg/m}^3$	$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$
$\Delta t = 0,001 \text{ seg.}$	$E = 2,06 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$A = 3,44 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
$N_{\Delta t} = 15000$	$I = 3,06796 \times 10^{-7} \text{ m}^4$	$P_0 = 615,73 \text{ N}$
Coordenadas Anclajes [m] $S_1 = (4 ; 0) \quad S_2 = (-4 ; 0)$	$A = 0,0019635 \text{ m}^2$	

$N_n$  es el número de nudos utilizados para discretizar el mástil,  $N_a$  es el número de anclajes de riendas y  $P_0$  es la pretensión de las riendas.

Para llevar a cabo las simulaciones cuyos resultados se muestran en las figuras 17 y 18, se usaron 15000 pasos de tiempo. El tiempo de CPU, en una computadora personal estándar fue aproximadamente de 20 minutos.

### Aspectos físicos de las simulaciones

Condiciones iniciales: El sistema se encuentra en reposo, con desplazamientos prefijados. Esos desplazamientos corresponden a la forma del primer modo de vibrar del sistema linealizado donde las riendas tienen el valor de la pretensión de montaje independientemente del desplazamiento.

Efecto de las riendas: Se puede observar que el efecto de las riendas sobre el mástil modifica radicalmente la forma de vibrar de la estructura. A diferencia de los problemas lineales donde el período es una propiedad del sistema, en este tipo de problemas altamente no-lineales el período se ve afectado por las condiciones iniciales y por las características físicas del cable. Siendo un poco más rigurosos no es correcto hablar de un período de la estructura, ya que diferentes puntos de la estructura se mueven con distintos periodos, esto se observa en las Figuras 19, 20, 21 y 22.

### 4.3 Características dinámicas del sistema

Como se mencionó anteriormente no es posible hablar de un período del sistema ya que cada punto del mismo se mueve con diferente período. En un primer análisis se descartan las fuerzas de compresión en la dirección del mástil, para luego ver la incidencia de estas fuerzas sobre el período de cada nudo de la estructura.

Las condiciones iniciales impuestas para realizar las distintas simulaciones numéricas son las mostradas en la Tabla 3 multiplicadas por 50 (notar que el desplazamiento horizontal máximo del nudo arriostrado es igual a 0,836 cm.). Los valores que se muestran en la Tabla 3 corresponden al modo fundamental de la estructura linealizada normalizado respecto a la componente mas grande.

Tabla 3: Condiciones Iniciales de las vibraciones libres.

	<b>Desp. [cm]</b>	<b>Giro [rad]</b>	<b>Vel. Lineal [cm/seg]</b>	<b>Vel. Ang. [rad/seg]</b>
<b>Nudo 1</b>	0.000000000	-0.002526457	0.000	0.000
<b>Nudo 2</b>	0.614773895	-0.002047006	0.000	0.000
<b>Nudo 3</b>	0.996260881	-0.000791168	0.000	0.000
<b>Nudo 4</b>	1.000000000	0.000762768	0.000	0.000
<b>Nudo 5</b>	0.625483344	0.002022147	0.000	0.000
<b>Nudo 6</b>	0.016719733	0.002504390	0.000	0.000

En la Fig. 17 se presenta un grafico donde se observa la respuesta del sistema de un nudo específico, el nudo 4, resolviendo el problema en forma lineal. La **curva en color azul** corresponde a la respuesta del sistema ignorando las fuerzas de compresión en la dirección del mástil ( $T = 1.685$  [seg]). La **curva en color rojo** tiene en cuenta las fuerzas de compresión en el mástil ( $T = 1.890$  [seg]).

En la Fig. 18 se grafica nuevamente la respuesta del nudo 4, pero resolviendo el problema en forma no-lineal. Los resultados del modelo no-lineal son prácticamente idénticos al del modelo lineal.

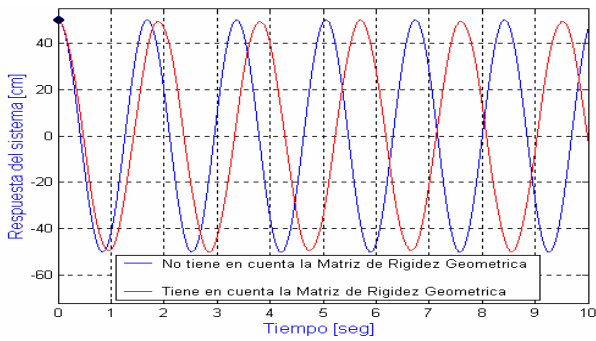


Figura 17: Respuesta del sistema Lineal.

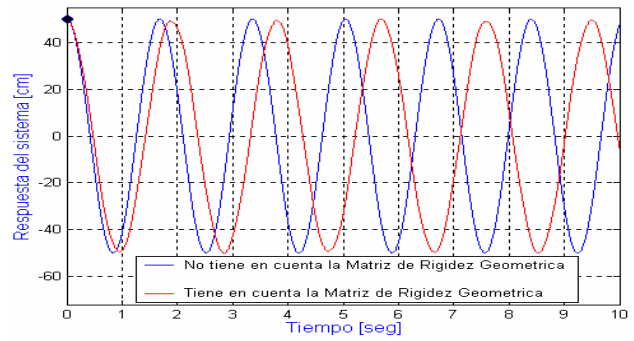


Figura 18: Respuesta del sistema No-Lineal.

En las figuras 19 y 20 se presentan dos gráficos donde se muestra como varían los períodos de los distintos nudos de la estructura al considerar el efecto no lineal de las riendas. Se puede observar que la fuerza de compresión en el mástil debida a las riendas disminuye la rigidez flexional del mástil. Este efecto no lineal aumenta considerablemente el período (alrededor del 11%). La “forma del modo no-lineal” es diferente de la correspondiente al caso lineal, por eso las condiciones iniciales dadas en la Tabla 3 tienen pequeñas componentes en los modos superiores, eso resulta notorio en el gráfico correspondiente al nudo 6 porque el desplazamiento horizontal de ese nudo es muy pequeño y el error resulta comparable.

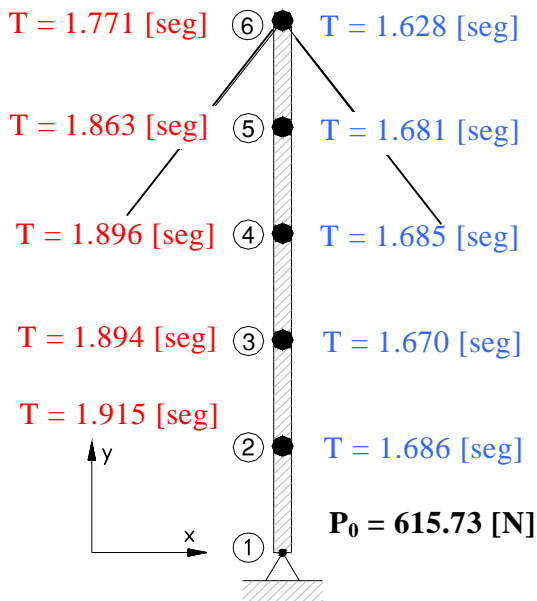


Figura 19: Período de los distintos nudos.

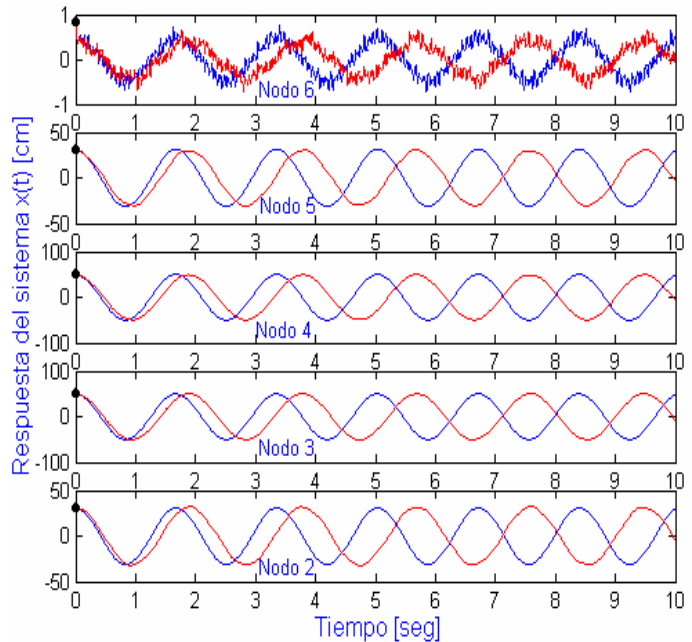


Figura 20: Desplazamiento horizontal de los nudos vs. tiempo.

En las figuras 21 y 22 se muestra el cambio en el período de los distintos nudos de la estructura para las vibraciones libres no amortiguadas con condiciones iniciales especificadas en la Tabla 3 igual que en el caso anterior (Fig. 19 y 20), pero en este caso consideró la pretensión reducida a la mitad del valor de montaje por transcurso del tiempo. Esto permite evidenciar en mayor medida el comportamiento no-lineal de las riendas.



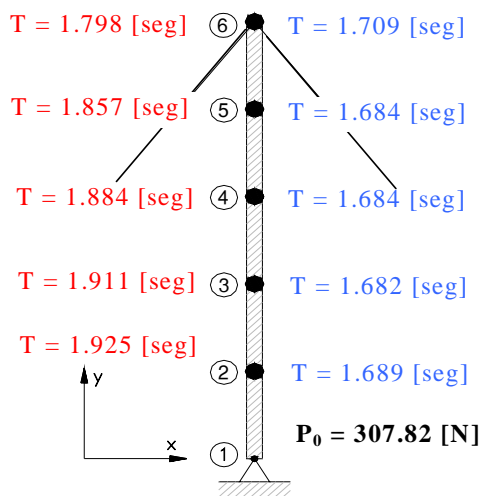


Figura 21: Período de los distintos nudos.

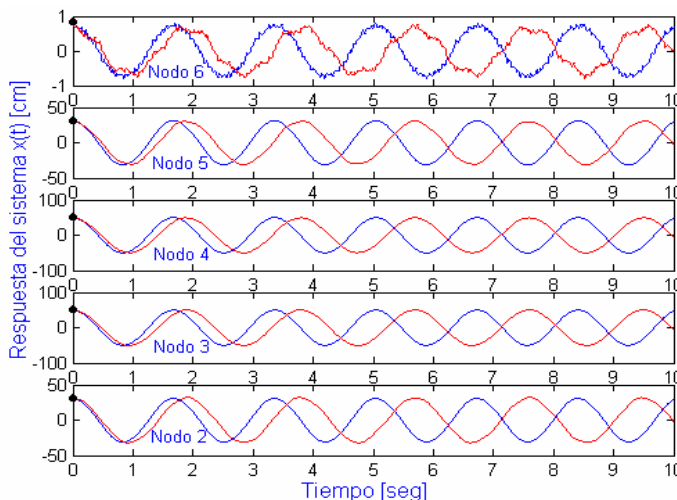


Figura 22: Desplazamiento horizontal de los nudos vs. el tiempo.

Los períodos naturales de vibración calculados utilizando distintos modelos lineales y no lineales se resumen en la Tabla 4. En los casos no lineales se ha usado el período promedio: (■) valor promedio de los 5 nudos en la Fig.19, (♠) promedio de los 5 nudos en la Fig. 21

Tabla 4: Períodos de las vibraciones calculados con varios modelos.

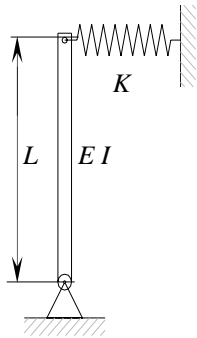
Referencias: Viga simplemente apoya sin carga axial → $T = 1,6640$ seg. Carga crítica de pandeo viga biarticulada → $P_E = 3690,9$ N.			<b>RIENDAS</b>		
			<b>A:</b> normales $P_0 = 615,73$	<b>B:</b> muy flojas $P_0 = 307,86$	
<b>MÁSTIL</b>	Ignorando compresión en el mástil	1	Modelo lineal (ver página siguiente) Apoyo elástico lineal. Ref [20]	1,673	1,683
		2	Apoyo elástico no lineal. Historia en el tiempo. Ignorando compresión del mástil.	1,670 (■)	1,690 (♠)
	Considerando compresión en el mástil	3	Columna biarticulada. Apoyos fijos y carga de compresión fija. Utilizando software para autovalores.	1,966	1,789
		4	Modelo totalmente no lineal. Historia en el tiempo. Rigidez de las riendas y carga de compresión variables instante a instante	1,868 (■)	1,875 (♠)

Según se observa en la Tabla 5, las cargas de compresión en el mástil son importantes cuando se las compara con la carga crítica de pandeo  $P_E$  (calculada como viga biarticulada).

Tabla 5: Carga de compresión  $C$  en el mástil vs. carga crítica de pandeo  $P_E$  en los modelos 3 y 4.

<b>ESTADO DE LAS RIENDAS</b>	$P_E$ [N]	$C_{\min}$ [N]	$C_{\max}$ [N]	$C_{\min}/P_E$	$C_{\max}/P_E$
Caso <b>A:</b> Riendas <b>normales</b>	3690,9	1177	1654	0,319	0,448
Caso <b>B:</b> Riendas <b>muy flojas</b>	3690,9	588	1139	0,159	0,308

Para comparar los resultados de las simulaciones con valores tabulados se agregó en la Tabla 4 el modelo lineal 1 ( ver datos del mástil en la Tabla 2) . El periodo de vibración de una viga deformable ( $E, I, L$ ) con un extremo articulado y el otro sobre un apoyo elástico de rigidez  $K$  (sin carga axial), se encuentra tabulado<sup>20</sup>:



$$T = \frac{2\pi L^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{m}{EI}} \rightarrow T = \frac{16,4235}{\lambda^2} \text{ seg.} \quad (26)$$

El valor de  $\lambda$  se determina en función de las rigideces relativas:

$$x = \frac{KL^3}{EI} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1,3098 x^{0,2486} & \text{cuando } x < 1 \\ \lambda = \pi - 16/x + 75/x^2 - 60,8318/x^3 & \text{cuando } x \geq 1 \end{cases}$$

Figura 23: Modelo 1 viga con apoyo elástico.

Las expresiones analíticas de  $\lambda$  aquí utilizados se obtuvieron ajustando los valores tabulados en la referencia anteriormente mencionada<sup>20</sup>.

**Datos del mástil:**

$$m = \rho A = 7700 \times 0,0019635 = 15,11895 \text{ Kg/m}$$

$$EI = 2,06 \cdot 10^{11} \times 3,068 \cdot 10^{-7} = 63200,8 \text{ N-m}^2$$

$$L = 13 \text{ m}$$

**Datos de las riendas:**

$$l = \sqrt{13^2 + 4^2} = 13,60147 \quad \cos \varphi = 4/13,60147 = 0,294086$$

$$\text{Peso de la rienda: } \text{Peso} = \rho g A l = 7800 \times 9,8 \times 0,0000344 \times 13,60147 = 35,7655 \text{ N}$$

$$W = \text{Peso} \times \cos \varphi = 35,7655 \times 0,294086 = 10,5181 \text{ N}$$

$$AE = 0,0000344 \times 1,56 \times 10^{11} = 5366400 \text{ N} \rightarrow a = AE W^2 / 12 = 4,9474 \times 10^7 \text{ N}^3$$

$$K = 2 \frac{AE}{l} \left( \frac{P_0^3}{P_0^3 + a} \right) \cos^2 \varphi \rightarrow K = \frac{68245}{1 + a/P_0^3} \rightarrow x = \frac{KL^3}{EI} = \frac{2372,37}{1 + 49474000/P_0^3}$$

Tabla 6: Períodos de las vibraciones libres del modelo 1 de la Tabla 4 (Modelo 1: viga con un apoyo elástico y sin carga axial de la Fig 23).

ESTADO DE LAS RIENDAS	$P_0$ [N]	$K$ [N/m]	$x$	$\lambda$	$T$ [seg]
Caso A: Riendas normales	615,73	56310	1957,46	3,13344	1,673
Caso B: Riendas muy flojas	307,82	25316	880,04	3,12350	1,683

Para el caso de la viga simplemente apoyada:

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda = \pi \Rightarrow T = 1,664 \text{ seg.}$$

Comparando este valor con los resultados mostrados en la Tabla 6 se observa que el efecto de la flexibilidad horizontal provista por las riendas es muy poco significativo.

El análisis realizado muestra que **al disminuir la pretensión en las riendas** se producen dos acciones opuestas sobre el período de las vibraciones libres del mástil:

- a) El **período aumenta** por la disminución de la rigidez horizontal del nudo arriostrado en el caso “normal” de riendas, pero disminuye si las riendas están muy flojas.
- b) El **período disminuye** por la disminución de la carga de compresión en el mástil.

El efecto b) es bastante más acentuado que el a). El problema es aún más complejo, porque al aflojar las riendas se agrega otro ingrediente: la relación entre la carga en los cables y los desplazamientos se hace más no-lineal.

Observando los resultados presentados en la Tabla 4 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- 1 ) La acción las riendas tiene mucha incidencia sobre las características dinámicas de la estructura ya que modifica notablemente el período de las vibraciones libres al inducir importantes cargas de compresión en el mástil.
- 2 ) La variación de rigidez horizontal de los nudos arriostrados debida a la acción de las riendas modifica muy poco el período natural porque la mayor parte de la energía puesta en juego durante las vibraciones libres es del tipo flexional. Hay poca diferencia entre el valor del período de una viga simplemente apoyada y el correspondiente a una viga con un apoyo elástico en un extremo.

No obstante hay que recordar que el mástil estudiado (datos de la Tabla 2) tiene un único tramo. En el caso de un mástil alto con muchos niveles de riendas, si la pretensión en las riendas es baja puede aparecer un modo de traslación horizontal de baja frecuencia, que entre en competencia con el modo fundamental de flexión.

## 5 CONCLUSIONES

Se desarrolló una metodología de cálculo capaz de simular la respuesta dinámica de una torre arriostrada, el código es lo suficientemente complejo como para captar el efecto no-lineal introducido por las riendas. Se considera al mástil, el sistema de apoyos no-lineales y las cargas actuantes como elementos de un único sistema dinámico. El potencial de este método radica en la capacidad de describir el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo.

El método de integración numérica predictor-corrector desarrollado por Hamming que utiliza el programa permite realizar las simulaciones en una computadora PC estándar. Además, la estructura modular del programa permite la fácil incorporación de nuevos elementos al sistema.

En este trabajo se presenta un método que es útil en la etapa de diseño cuando se necesita analizar el comportamiento dinámico de una torre arriostrada. Por otra parte al poder estudiar las oscilaciones, también es una herramienta valiosa cuando se desea estudiar los elementos del sistema en el campo de la fatiga.

En investigaciones futuras se prevé usar elementos finitos para modelar el sistema de apoyos no lineales que constituye el sistema de riendas con más exactitud, también se intentará dotar a los cables de masa para poder estudiar su influencia dinámica

## 6 REFERENCIAS

- [1] M. Irvine, *Cable Structures*, Dover Publications Inc., New York, (1981).
- [2] Reglamento CIRSOC 306, *Estructuras de Acero para Antenas*, INTI, Buenos Aires, (1992).
- [3] Recomendación CIRSOC 303, *Estructuras Livianas de Acero*, INTI, Buenos Aires, (1991).
- [4] A. Pugsley, *The Theory of Suspension Bridges*, Edward Arnold Ltd., London, (1968).
- [5] H. A. Buchholdt, "Tension Structures," *Structural Engineer*, vol. 48, n°. 2, February, (1970).
- [6] J.W. Leonard, and J.H. Nath, "Comparison of Finite Element and Lumped Parameter Methods for Oceanic Cables," *Engineering Structures*, vol. 3, n°. 3, July, (1981).
- [7] S.E. Ramberg, and O.M. Griffin, "Free Vibration of Taut and Slack Marine Cables," *Journal of the Structural Division*, ASCE vol. 103, n°.ST11, November, (1977).
- [8] H. Tuah, "Cable Dynamics in an Ocean Environment," Ph.D dissertation, Oregon State University, Corvallis, Oregon, June, (1983).
- [9] W.H. Greene, "Minimum Weight Sizing of Guyed Antenna Towers," *Journal of Structural Engineering*, 111, 10, (1985).
- [10] J.E. Goldberg and J.E. Gaunt, "Stability of Guyed Towers," *Journal of the Structural Division*, ST4, (1973).
- [11] A. Chajes and W. S. Chen, "Stability of Guyed Towers," *Journal of the Structural Division*, ST1, (1979).
- [12] H.A. Buchholdt, S. Moossavinejad and A. Iannuzzi, "Non-Linear Dynamic Analysis of Guyed Masts Subjected to Wind and Guy Ruptures," *Proc. Instn Civ. Engrs*, 2, (1982).
- [13] J.W. Leonard, *Tension Structures: Behavior and Analysis*, McGraw-Hill, (1988).
- [14] M. Paz, *Structural Dynamics: Theory and Computation*, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, (1980).
- [15] J.S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, (1968).
- [16] J.C. Massa, *Compendio de Cálculo Estructural*, Ed. Coop. Dto. Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, (2000).
- [17] R.K. Livesley, *Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, (1969).
- [18] S. Preidikman, "Numerical Simulations of Interactions Among Aerodynamics, Structural Dynamics and Control Systems," *Ph.D. Thesis, Department of Engineering Science and Mechanics*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, (1998).
- [19] S. Preidikman and D.T. Mook, "A new method for actively suppressing flutter of suspension bridges," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, (1997).
- [20] R. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, (1979).