

MÉTODO ALTERNATIVO PARA LA CONFECCIÓN DE LAS CURVAS DE DISPERSIÓN DE UNA GUÍA DE ONDA CUALQUIERA

AN ALTERNATIVE METHOD TO CONFECTION OF THE DISPERSION CURVES OF ANY WAVEGUIDE

Eduardo Becker Groth^a y Thomas G. R. Clarke^a

^aLaboratório de Metalurgia Física (LAMEF), Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Bento Gonçalves, 9500 Prédio 43820, Porto Alegre RS, Brasil, lamefembrapi@ufrgs.br,
<https://www.ufrgs.br/lamef/>

Palabras clave: Ondas Guiadas, Curvas de dispersión, Método SAFE.

Resumen. En este trabajo se presenta un método alternativo para la generación de las curvas de dispersión de un guía de ondas cualquiera. Las curvas de dispersión tienen un gran campo de aplicación como método no destructivo para la evaluación de integridad estructuras por medio de la propagación de las ondas guiadas. Placas y cilindros son las dos geometrías de guías de ondas que tienen solución analítica para las curvas de dispersión, pero geometrías más complejas tienen que utilizar un apoyo computacional para resolver el problema. Los métodos que utilizan una estrategia que combina soluciones numéricas en un arreglo analítico para el cálculo de las curvas de dispersión son conocidos como SAFE (semi-analítico finite element). El nuevo método SAFE presentado es de fácil implantación y permite la confección de las curvas de dispersión de guías de ondas de sección arbitraria.

Keywords: Guided Waves, Dispersion Curves, SAFE Method.

Abstract. In this work an alternative method for generation of dispersion curves to any waveguide has been presented. Dispersion curves have a large application of non-destructive methods for evaluating the integrity of structures by means of the propagation of guided waves. Plates and cylinders are the two geometries of waveguides that have analytical solution for dispersion curves, but more complex geometries have to use a computational support to solve the problem. The methods that use a strategy that combines numerical solutions in an analytical array for the calculation of dispersion curves known as SAFE (semi-analytic finite element). The new SAFE method presented is easy to implement and allows the confection of the dispersion curves of waveguide of arbitrary section.

1. INTRODUCCIÓN

Las ondas guiadas son una clase de ondas mecánicas que ocurre en cuerpos sólidos, en los cuales, una o dos dimensiones son mucho mayores que las otra(s). Ejemplos de estructuras con esa característica son tuberías, rieles, cascos de navíos, vasos de presión, etc. En las guías de onda la energía mecánica, cuando propaga por ese cuerpo, puede asumir patrones de desplazamiento que permite que la onda viaje por largas distancias. Los patrones de desplazamiento son conocidos como modos de propagación y tienen campo de desplazamiento ($u(x, y, z)$) y relación entre número de onda (k) y frecuencia (f) particular.

Las ondas guiadas se aplican en la investigación de las propiedades de los materiales y también en ensayos no destructivos para evaluación y monitoreo de la integridad estructural y detección de defectos. Estructuras de larga distancia y difícil acceso, tal como tuberías en lecho marino (extracción de petróleo) pueden ver en las ondas guiadas una buena opción de inspección, principalmente porque las ondas guiadas tienen la capacidad de barrer largas distancias, simplificando el ensayo que necesita acceso a solo una pequeña región del cuerpo. La onda a partir de dicha región propaga, interactúa con defectos y parte retorna al punto de partida.

Los desarrollos de las ondas guiadas en el campo de los ensayos no destructivos están íntimamente ligados con la capacidad de comprensión de las características de propagación de la energía en el guía de ondas y en este contexto las curvas de dispersión son una herramienta completa. De los pares frecuencia versus longitud de onda se sacan informaciones como la velocidad de propagación y la dispersión del modo de propagación.

En los próximos párrafos el trabajo se dedica a hacer una revisión de maneras de confeccionar las curvas de dispersión, desde soluciones analíticas hasta las técnicas semi analíticas (método SAFE) más avanzadas. Será presentado un nuevo método para la generación de las curvas de dispersión y también una revisión de la interpretación de las curvas va ser mostrada.

2. FUNDAMENTACION TEÓRICA

La propagación de ondas es un tema que ya viene siendo estudiado desde a mucho tiempo atrás. En 600 a. C. Pitágoras ya estudió los armónicos de uno tono. Entre los muchos trabajos que se destacan en este campo de ingeniería se puede mencionar *The Theory of Sound* [Strutt \(1887\)](#), *Acoustic Fields and Wave Theory* [Auld \(1973\)](#), y más recientemente *Ultrasonic guided waves* [Rose \(2014\)](#). Estos son algunos ejemplos de las grandes referencias que hay en el campo de la acústica.

La propagación de ondas en medio sólidos se pueden dividir de acuerdo con las características geométricas del medio de propagación, en un medio infinito tenemos las ondas de cuerpo, conocidas como P e S, en un medio semi infinito tenemos las ondas de superficie, conocidas como ondas de Rayleigh, y cuando el medio de propagación tiene una o dos dimensiones mucho menor que la otra la energía va propagar en forma de ondas guiadas.

Las ondas de cuerpo son utilizadas en ensayos de ultrasonido, largamente empleado en la industria. Las ondas de superficie son estudiadas por investigadores del área de sismos, porque son las más dañinas para diversos sistemas. La principal aplicación de las ondas guiadas es la evaluación y monitoreo de la integridad de estructuras esbeltas, pero lo desarrollo de estos ensayos está en constante expansión. Las ondas guiadas tienen gran potencial para aplicaciones en ingeniería.

Una manera de investigar la propagación de las ondas guiadas es la observación de las curvas de dispersión del guía de ondas en cuestión. Las curvas de dispersión tienen una gran cantidad de información, todavía están condensadas, por eso la interpretación de las curvas no es una

cosa trivial. La Fig. 1 presenta las curvas de dispersión de una placa “infinita” de titanio de 10 mm de espesor.

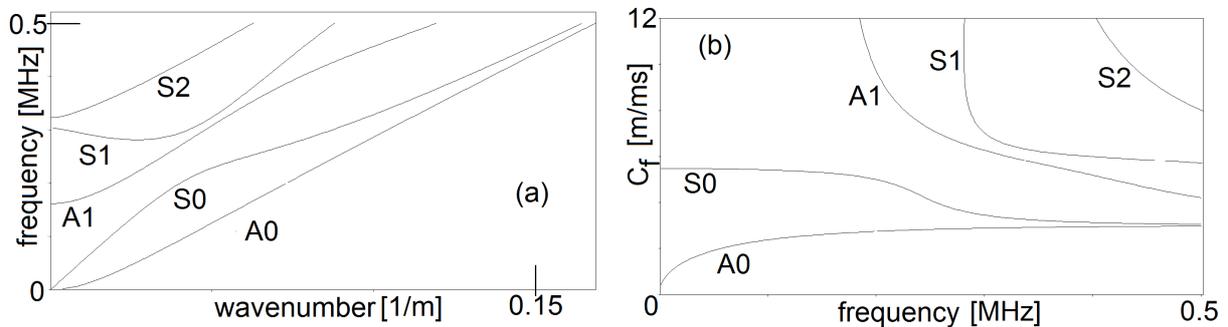


Figura 1: curvas de dispersión de una placa de titanio presentadas en dos dominios. [Groth et al. \(2018\)](#)

2.1. Interpretación de las curvas de dispersión

Cada curva de dispersión es la representación de un modo de propagación, también conocido en la literatura como onda modal. Los modos están asociados a los movimientos naturales de vibraciones de la estructura que está sirviendo de guía de onda. La relación fundamental que genera las curvas de dispersión es el par frecuencia (f) x longitud de onda (λ) de cada modo de propagación que existe en el guía de ondas. Dos definiciones acá son importantes: $k = 2\pi/\lambda$, es el número de onda; y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular. Y desde esa relación fundamental se descubre la velocidad de propagación de fase (C_f) y la velocidad de grupo (C_g), que son calculadas a partir de las relaciones: $C_f = \omega/k$ y $C_g = d\omega/dk$.

Cuando una perturbación es producida en una región puntual de la frontera del guía de ondas la energía ingresada al dominio material del guía se convierte en uno de los modos de propagación. El modo que será activado depende de la manera como se aplique la perturbación, pudiendo excitar uno u otro modo.

La velocidad de propagación es la información más importante en el desarrollo de ensayos que buscan localizar defectos y evaluar la integridad de la estructura porque justamente el “tiempo del vuelo” es la variable más sencilla que se puede medir, y que pueden localizar el defecto, aunque es conocida la velocidad del vuelo. Pero las curvas de dispersión contienen más información, la propia dispersión, que como el nombre ya dice, es el fenómeno que hace con que el modo de propagación se disuelva y pierda su campo de desplazamiento característico a lo largo de la propagación. Eso va a pasar con intensidad proporcional a la dependencia de la velocidad de propagación con la frecuencia, cuanto más constante es la velocidad C_f , menos dispersión. Por ejemplo la Fig. 1, el modo A0 empieza dispersivo (a las bajas frecuencias) y después se arregla y el S0 empieza no dispersivo y después tiene una banda de frecuencia crítica (0,2 a 0,35 MHz).

Características geométricas del guía de ondas también pueden ser percibidas al mirar la curva de dispersión, por ejemplo, si el perfil tiene paredes delgadas y cuantos ejes de simetría tiene la sección. Esos datos se puede inferir por la cantidad de curvas que tiene el guía de ondas, o mejor, la densidad de las curvas, cuanto más lleno el espacio cartesiano, más delgado y complejo es el guía de ondas.

Eso es un resumen de las interpretaciones de las curvas de dispersión. Esas colección de curvas son un mapa de la propagación indispensable para lo desarrollo de ensayos por ondas

guiadas. La obtención de las curvas es el tema abordado en la próxima sección del trabajo.

2.2. Obtención de las curvas de dispersión

La estrategia de obtención de las curvas va depender de la complejidad del guía de ondas. Placas y cilindros tienen solución analítica, secciones más complejas, como rieles o secciones con distintos materiales necesitan ayuda computacional para la confección de las curvas. Sin embargo, las soluciones analíticas generan un conjunto de ecuaciones conocidas como trascendentales y la generación gráfica de esas ecuaciones necesita apoyo computacional también. La Fig. 1, por ejemplo, son las curvas de dispersión de una placa obtenidas por un software comercial llamado Disperse que fue desarrollado en el Imperial College London y resuelve las curvas de dispersión de placas y ductos.

Una metodología de resolución son los conocidos métodos SAFE (semi analytical finite element). Esos métodos se basan en análisis modal por elementos finitos para la construcción de las curvas de guía de ondas y fueron publicados por primera vez durante los años setenta por Aalami (1972) y Lagasse (1973). Desde entonces una gran cantidad de formas de implementación de métodos SAFE fueron publicadas, cada una con su particularidad, hay SAFE para medios anisótropos, secciones complejas y, a priori, se puede resolver las curvas de dispersión de cualquier tipo de guía de onda. Una buena revisión de los métodos SAFE encuentran-se en Groth et al. (2018).

El núcleo de los métodos SAFE es el análisis modal, aplicando el método de los elementos finitos. Con este recurso se determinan las frecuencias naturales y los modos propios de vibración de la sección transversal del guía de ondas. Hay muchas estrategias para hacer el acoplamiento entre el modelo de elementos finitos y el guía de ondas, el desafío es hacer que el modelo pueda captar la infinitud del guía de ondas, para comprender eso es importante que se sepa que cuando la onda se propaga, si consideramos un instante de tiempo, apenas una parte del guía está en movimiento, justamente conocido como paquete modelándose de manera finita.

Hay SAFEs que utilizan modelos 2D, discretizando solamente a sección transversal y considerando o desplazamiento longitudinal como una suma de armónicos, $U = U(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$, donde k representa el número de onda y ω la frecuencia angular. Este campo de desplazamiento es insertado en la formulación de los elementos finitos, tanto en códigos comerciales Predoi et al. (2007), ó implementado directamente en un nivel más bajo de programación Hayashi et al. (2003). Una manera muy interesante e eficiente de implementación SAFE, desarrollada por Wilcox et al. (2002), utiliza un modelo axisimétrico, que modela un anillo, lo cual la sección del anillo es la sección del guía de ondas. En un modelo axisimétrico se puede fijar los números de nodos con que va vibrar el anillo y de esa forma se puede mantener fijo la longitud de onda y calcular las frecuencias naturales. Ese método también puede ser consultado en Idzi et al. (2017), donde fue utilizado para la construcción de las curvas de dispersión de un riel ferroviario.

Otra clase de métodos SAFE que existe trabaja con modelo en 3D. Es modelado una porción del guía de ondas y a las extremidades del modelo son aplicadas condiciones de contorno periódicas las cuales permiten que el modelo tenga uno o más λ adentro de la longitud modelada. Cambiando la longitud modelada y tomando las frecuencias naturales del modelo con las condiciones de contorno aplicadas se puede confeccionar la curvas de dispersión de, quizá, cualquiera guía de ondas Sorohan et al. (2011). La dificultad de ese método es la verificación de la longitud de onda y el modo de propagación, siendo que la confección de las curvas por ese método 3D es hecha manualmente, o por un arreglo matemático complejo conocido como número de Mach, resultando laborioso porque tiene que considerar los desplazamientos de todos los nodos del modelo y procesarlo en un número que va ser asignado al modo, actualmen-

te su implementación no resulta sencilla. En este contexto, se presenta el método propuesto, que permite automatización y generación de las curvas de manera más simples. En la próxima sección se aborda en detalle esa construcción e resultados producidos, bien como la validación de ellos.

2.3. Método Propuesto

En el método SAFE propuesto una porción “generosa” del guía de onda debe ser modelado. Para ilustrar mejor la explicación, se modela una barra de acero, con sección transversal rectangular y longitud “infinita” (la guía de ondas). Las curvas de dispersión para esta geometría están disponibles en la literatura, incluso validadas experimentalmente (Groth (2014)). La Fig. 2 abajo contiene las curvas ya confeccionadas por otros métodos SAFE publicadas por Predoi et al. (2007).

Las curvas de esa geometría tienen cuatro modos fundamentales, o cuatro familias de modos. Longitudinal (L), Torsional (T) y Flexiones (Fz y Fy). La curva que empieza en el gráfico explicita $9,3 \text{ e}4$ (93 000 Hz) para T(1) es el segundo modo de la familia T, el T(1).

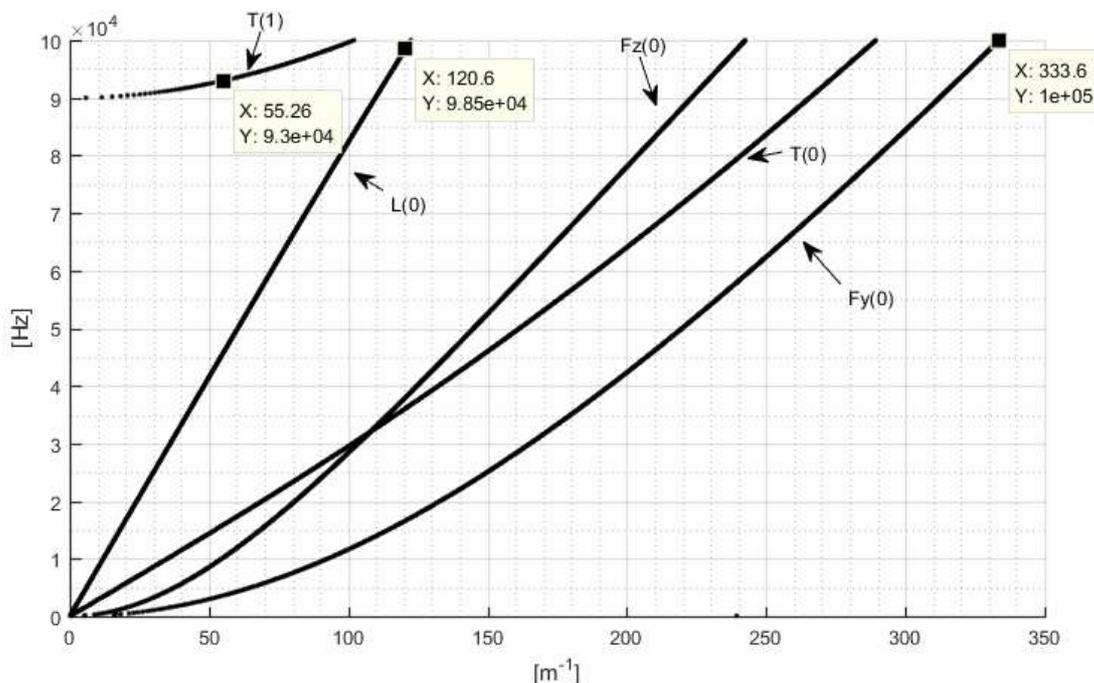


Figura 2: curvas de dispersión en el dominio $f \times k$ de una barra de sección rectangular 15 x 5 mm. Groth et al. (2018)

Así, con el resultado presentado en la Fig. 2 se intentará resolver el problema de la propagación de ondas en una barra de sesión rectangular por el método propuesto, explicando paso a paso su realización, para facilitar la comprensión del método.

La idea central del método es determinar las frecuencias naturales de una porción de tamaño l del guía de ondas. En la Fig. 2, a la izquierda, es presentada una porción de 0,2 m, del guía de ondas de interes. A las caras $y,z,0$ y $y,z,200$ (considerando el origen en el vértice del modelo) son aplicadas condiciones de contorno que fuerzan que los desplazamientos de ellas sean los mismos, $u(y,z,0) - u(y,z,200) = 0$, donde u es el desplazamiento. Otra cosa que el modelo debe tener é una línea perpendicular a la secciones transversales, así como se puede ver la línea negra en el modelo, Fig.3a. En el detalle, Fig. 3b, se muestra que la línea compuesta por puntos con espaciados Δl de 1 [mm],y en cada punto va ser monitoreado el desplazamiento $u(x, y, z)$.

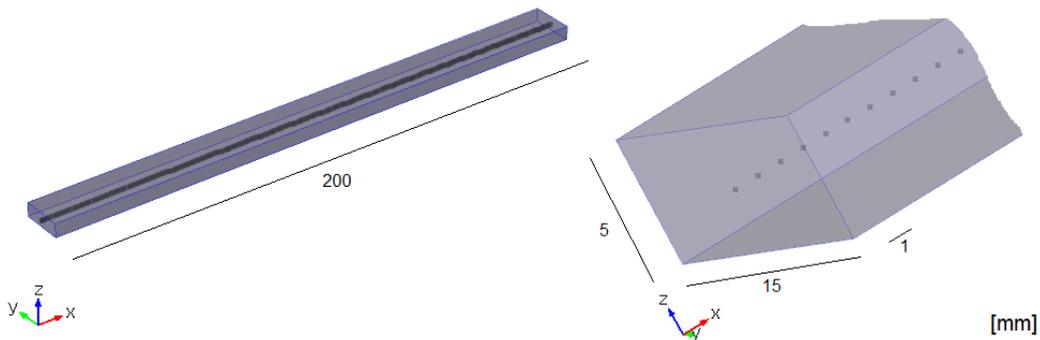


Figura 3: Imágenes del modelo de elementos finitos realizado con COMSOL (2013). Dimensiones de la secciones, $l=200$ mm, distancia entre puntos de desplazamiento (Δl) de 1 [mm].

Posteriormente, una vez realizada la malla en el modelo, se determinan las frecuencias propias en un rango de interes, el cual es ajustado por el programa para el análisis modal, el cual retorna: la frecuencia natural, el campo de desplazamiento en las tres direcciones y los desplazamientos en los puntos de la línea de monitoreo. Con esta información es posible crear los pares $(f; \lambda)$, que van ser la génesis de las curvas de dispersión. En el próximo párrafo se describe como extraer y procesar dicha información.

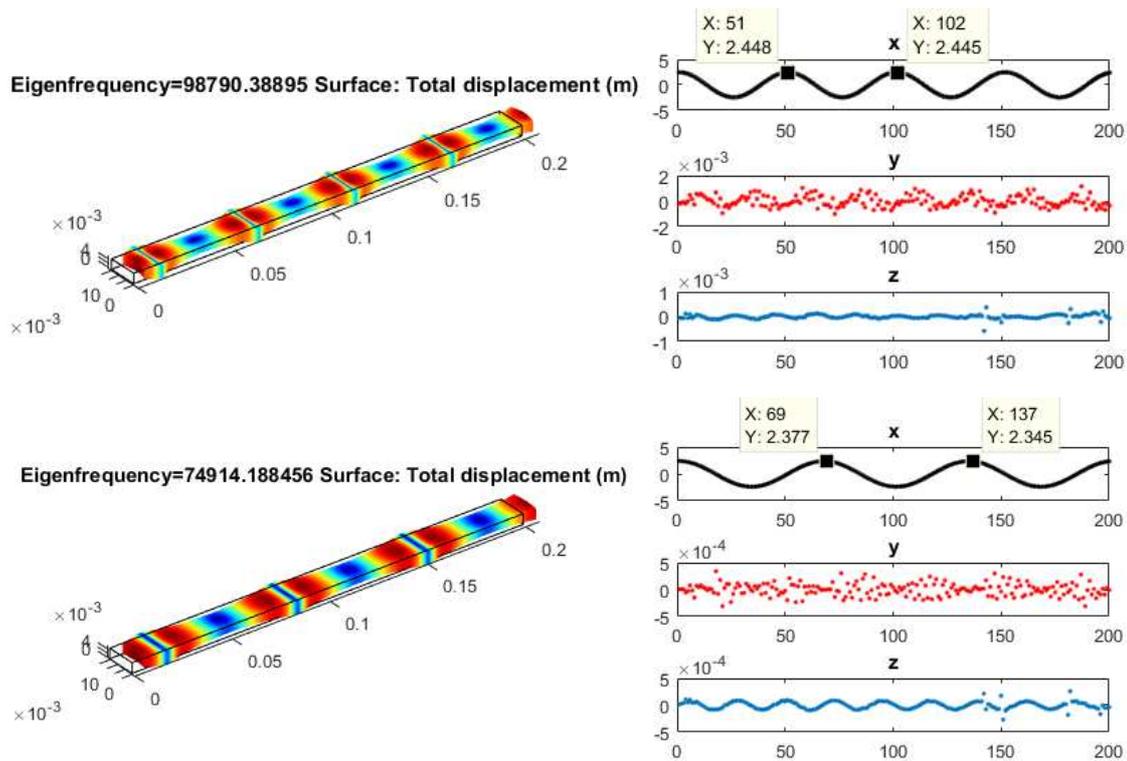


Figura 4: Modo longitudinal en dos frecuencias.

En la Fig. 4, se presentan dos frecuencias naturales calculadas numéricamente y campo de desplazamiento y monitoreo del desplazamiento. Vámonos ahora empezar con la obtención del valor de longitud de onda (λ), para después tener el número de onda k , recordando que $k = 2\pi/\lambda$. Analizando a Fig. 4, superior, la frecuencia natural é 98790 Hz, tenemos el desplazamiento total representado en colores, y los desplazamientos de la línea de monitoreo a la derecha. Notasé que el desplazamiento en x es dominante y armónico, y, análogamente a uno periodo de un seno, tenemos el λ el tamaño de una longitud de onda, como la distancia de pico a pico, que está marcada en la figura. Haciendo el cálculo $(102-51)$, son 51 puntos, con 1 mm entre ellos, son $\lambda = 50$ mm. Aplicando $k = 2\pi/\lambda$, tenemos $k=125$. Mirando la curva de la Fig. 2, que es la referencia, la curva $L(0)$ también tiene aproximadamente lo mismo valore de k para esa frecuencia.

Entonces ese es el procedimiento para la obtención de los pares $(f; k)$ e poder graficar las curvas de dispersión de guía de intereses. En la Fig. 4, arriba, tenemos el par $(74914; 91)$, del mismo modo $L(0)$. Así, punto a punto se puede componer las curvas de dispersión. En los próximos parágrafos va ser abordado algunos detalles de la implementación.

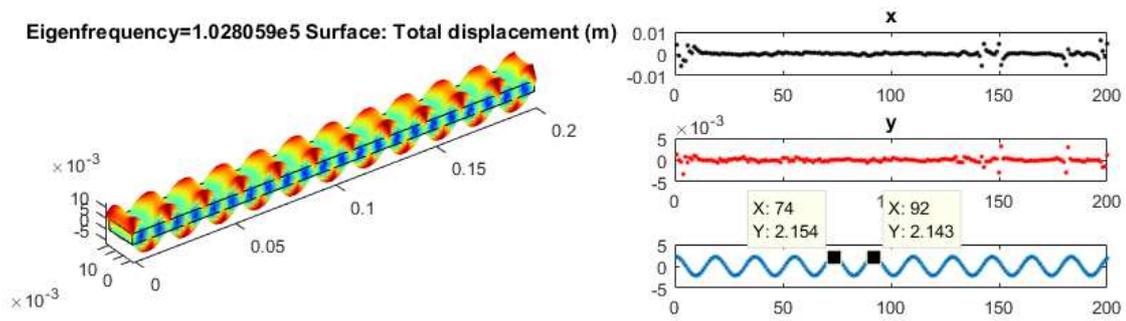


Figura 5: El Modo $F_y(0)$.

La Fig. 5 muestra el modo $F_y(0)$ y sus desplazamientos, en este modo es posible notar que el z presenta el dirección preferencial de desplazamiento. También es posible ver que el par (f, k) extraído ahí está de acuerdo con la curvas de la figura 4.

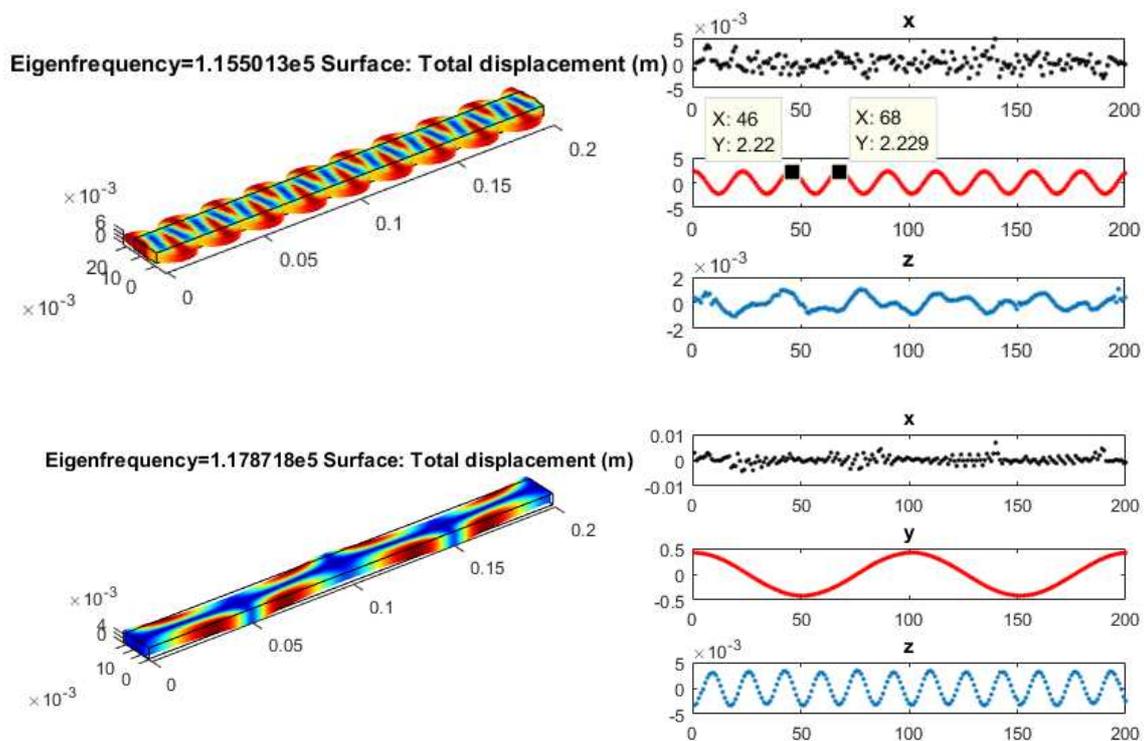


Figura 6: Modos $F_z(0)$ y $F_z(1)$

La figura 6 presenta los dos primeros modos de la familia F_z . Es posible observar que el desplazamiento preferente de estos modos es la dirección y .

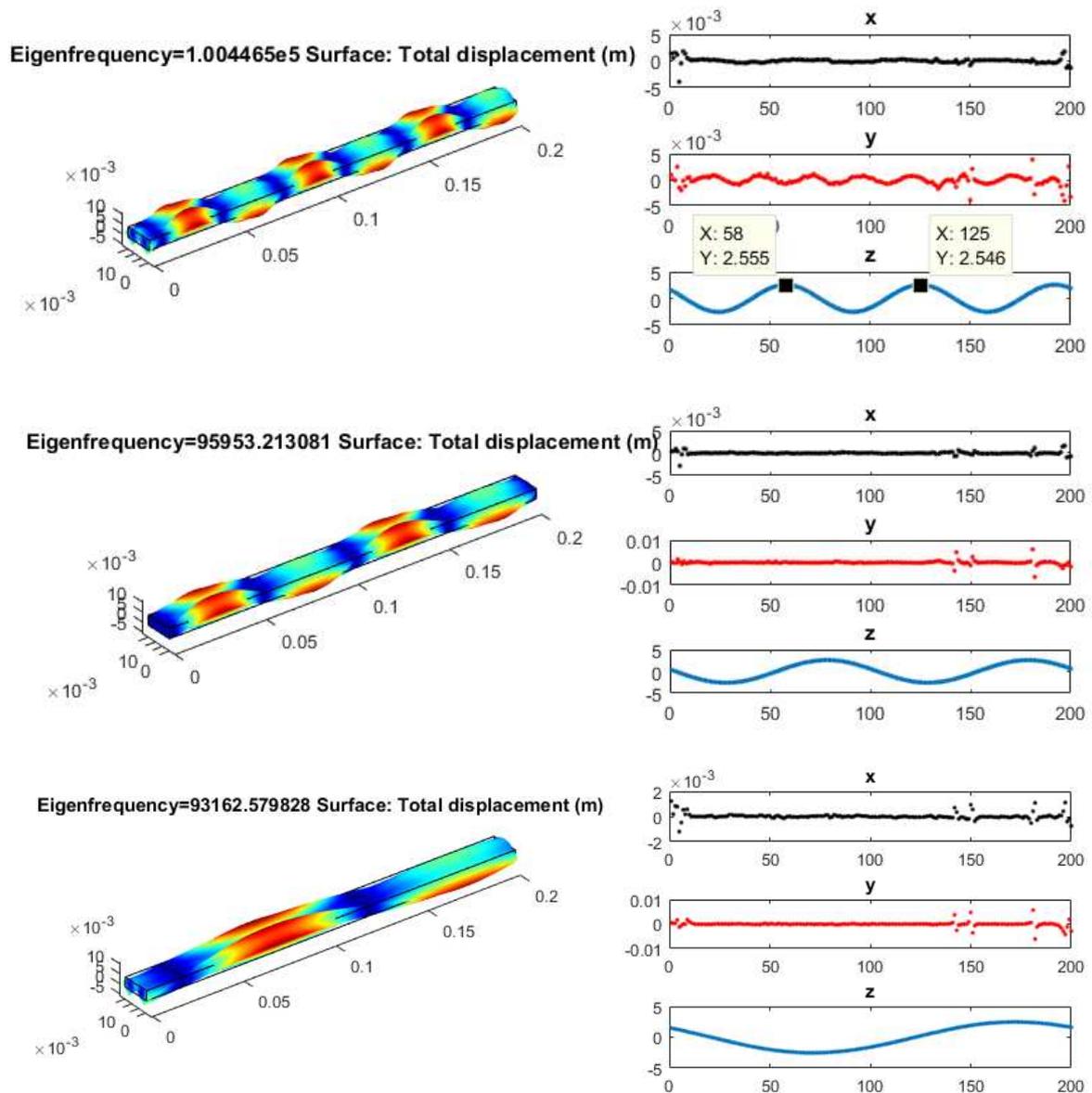


Figura 7: La evolución del modo T(1).

La Fig.7 presenta el modo T(1) en tres puntos distintos de la curva de dispersión. Así es posible evaluar cómo se va aumentando el número de longitudes de onda en la misma longitud del modelo, donde para barrer una gran cantidad de frecuencias modales es necesario establecer adecuadamente el tamaño del modelo.

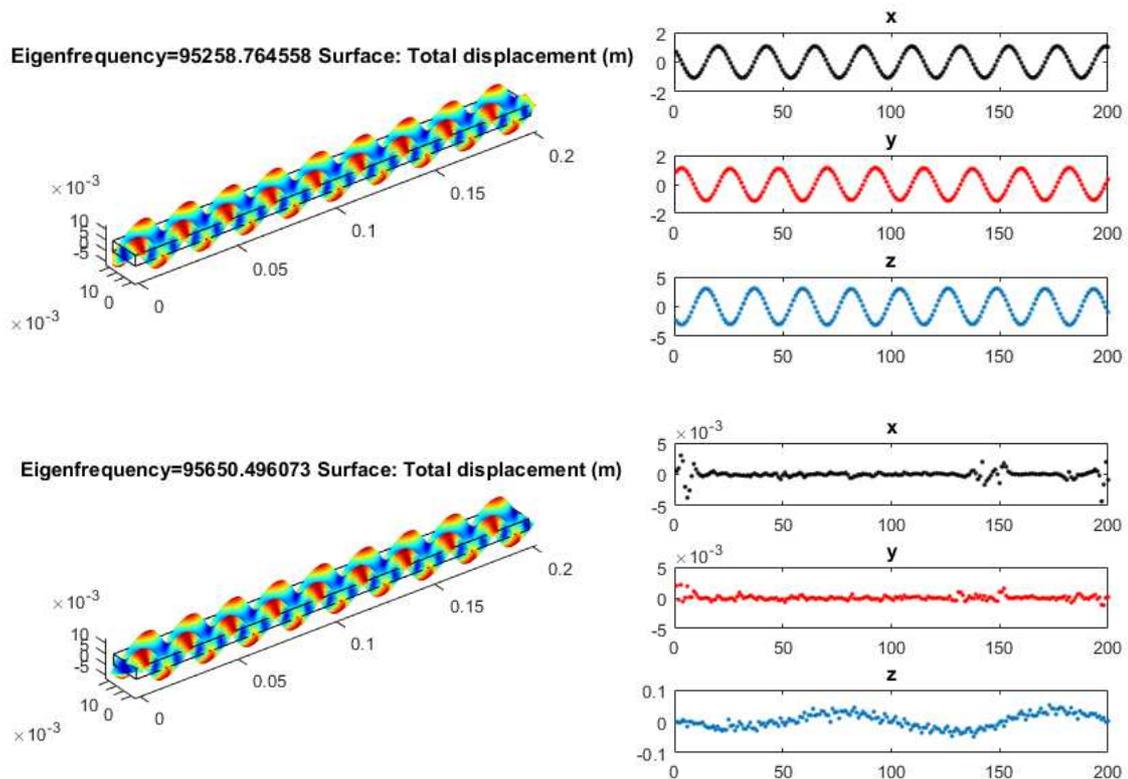


Figura 8: El modo $T(0)$. Abajo con la línea de monitoreo en el baricentro y arriba con la línea de monitoreo en el vértice de la sección transversal.

En la Fig. 8, además de mostrar el modo torsional $T(0)$, muestra un detalle importante en la implementación de ese método, que es el punto en la sección transversal donde va a cruzar la línea de monitoreo. En la 8 arriba, la línea está en el centro de la sección, y los desplazamientos son muy bajos pero cuando se hace el monitoreo a la extremidad del modelo, se queda claro medir la longitud de onda.

2.3.1. Detalles de automatización

Los valores que deben ser llevados en cuenta son $\Delta l, l$ y el punto de la sección donde se va a ubicar la línea de monitoreo. Para automatizar el modelo se puede utilizar el artificio de la FFT (Fast Fourier Transform), que va a sacar directamente el inverso de la longitud de onda ($1/\lambda$), se realiza sobre la línea de monitoreo. Por lo cual, se implementa un lazo cerrado que incrementa la frecuencia central del análisis modal, y simultáneamente reduce el tamaño del modelo. La discretización de la línea de monitoreo debe tener un Δl que no pase el problema del aliasing, un Δl refinado es recomendable. Uno detalle más que debe ser llevado en cuenta es el punto de la sección adonde se va a ser puesta la línea de monitoreo, en la implementación automatizada se puede aplicar en dos o más lugares así se tiene mejores amplitudes de desplazamiento para todos los modos del guía de ondas.

La Fig. 9 presenta la comparación entre las curvas generadas por el método propuesto, implementando en el software Comsol, utilizando el link que ello tiene con Matlab y las curvas ya validadas experimentalmente (curvas negras), que se encuentran en la literatura. Por una cuestión de ajuste todavía se ve que la implementación no está optimizada en términos de paso de

frecuencia, pero el resultado producido se puede confirmar que es correcto.

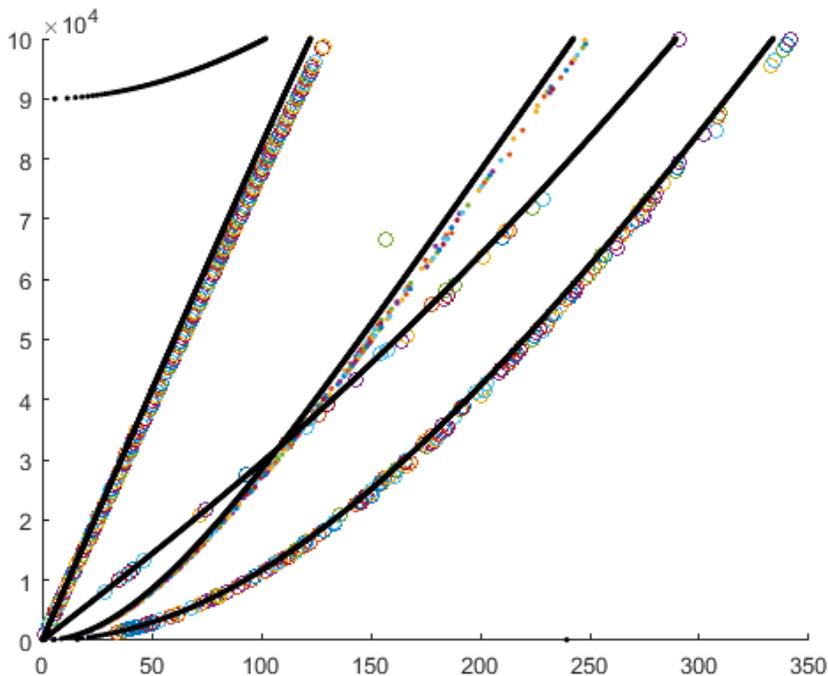


Figura 9: Validación del método propuesto, las curvas negras son las mismas de la Fig. 2.

3. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una manera alternativa de confeccionar las curvas de dispersión de guías de ondas mecánicas. Este método se puede clasificar como un método SAFE y es de simple implementación en paquetes comerciales de elementos finitos. El método utiliza un modelo 3d que facilita la comprensión de los modos de propagación del guía de ondas de interés y es aplicable a practicante cualquier geometría y condiciones materiales. El método puede ser implementado para que funcione con una rutina lo que puede automatizar la confección de las curvas de dispersión del guía de ondas de interés. El método fue implementado para un guía de sección rectangular y validado con soluciones bien fundamentadas disponibles en la literatura.

Las curvas de dispersión pueden ser una herramienta indispensable en el desarrollo de aplicaciones de las ondas guiadas. Por lo tanto, proporcionan una visión amplia de las características de propagación de la guía de ondas, conteniendo los modos de propagación e informaciones como la velocidad de propagación de cada tipo de onda que puede propagarse en la guía de ondas. Por esta razón una metodología simple de confecciones de las curvas de dispersión puede ser de gran aplicación práctica.

REFERENCIAS

- Aalami B. Waves in prismatic guides of arbitrary cross section. *Jornal of Applied Mechanics*, 1972.
- Auld A.B. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, volumen I. Jonh Wiley and Sons Inc, 1973.
- COMSOL. *Multiphysics Reference Manual*. Comsol AB, 2013.
- Groth E.B. *Propagação de ondas de tensão em hastes retangulares no intervalo de frecuencia de (0;100[kHz])*. Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

- Groth E.B., Iturrioz I., y Clarke T.G.R. The dispersion curve applied in guided wave propagation in prismatic rods. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15:1–27, 2018.
- Hayashi, Song W.J., y Rose J.L. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example. *Ultrasonics*, 41:175–183, 2003.
- Idzi J.L., Tanzi B.N.R., Iturrioz I., Groth E.B., y Clarke T.G.R. Estudio de la propagación de ondas guiadas sobre un riel ferroviario. *XXIII Congreso de Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, 2017.
- Lagasse P.E. Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves. *Journal of Acoustic Society of America*, 4:1116–1122, 1973.
- Predoi M., Castaings M., Hostern B., y Bacon C. Wave propagation along transversely periodic structures. *Journal of Acoustical Society of America*, 121, 2007.
- Rose J.L. *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media*, volumen I. Cambridge University Press, 2014.
- Sorohan S., Constantin N., Gavan M., y Anghel V. Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standart element codes. *Ultrasonics*, 51:503–515, 2011.
- Strutt J.W. *The Theory of Sound*, volumen I. MACMILLAN AND CO., 1887.
- Wilcox P., Evans M., Diligent O., Lowe M., y Cawley P. Dispersion and excitability of guided acoustic waves in isotropic beams with arbitrary cross section. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 21, 2002.