

UN MODELO SIMPLE PARA EL ANÁLISIS DE VIGAS WAGNER UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A SIMPLE MODEL FOR THE ANALYSIS OF WAGNER BEAMS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Alejandro T. Brewer^a, Fernando G. Flores^b y Sergio Preidikman^{ac}

^a*Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. alejandro.brewer@unc.edu.ar*

^b*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET, y Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

^c*CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, Argentina.*

Palabras clave: Vigas Wagner, Elementos Finitos, Aeronáutica.

Resumen. En este trabajo se presenta un modelo simplificado para analizar el comportamiento bidimensional de una viga plana compuesta, conocida como viga Wagner, formada por elementos de viga y un alma que soporta esfuerzos en su plano. En el marco del método de elementos finitos, se propone utilizar elementos de viga deformables por corte para modelar los rigidizadores y elementos de sólido (2D) para modelar el alma. Se asume que el alma puede actuar en forma limitada en compresión y se analizan estrategias para modelar esta situación. Este tipo de vigas son características en estructuras aeronáuticas y su análisis, en modelos sencillos, se realiza suponiendo que los rigidizadores sólo son efectivos en resistir esfuerzos normales, mientras que el alma sólo es efectiva soportando esfuerzos de corte. Interesa analizar en qué medida los resultados, obtenidos con estas hipótesis simplificadas, se aproximan a la realidad, para lo cual se comparan con resultados obtenidos utilizando herramientas numéricas de mayor fidelidad.

Keywords: Wagner Beams, Finite Elements, Aeronautics.

Abstract. In this paper we present a simplified model to analyse the two-dimensional behaviour of a composite flat beam, known as Wagner beam, formed by beam elements and a thin core (web) supporting membrane stresses. In the framework of the finite element method, it is proposed to use shear deformable beam elements to model the stiffeners and (2D) solid elements to model the web. The web is assumed to provide low strength in compression and different strategies to model this situation are discussed. This type of beams is characteristic in aeronautical structures and its analysis, in simplified models, is carried out assuming that the stiffeners are only effective in resisting normal stresses, while the web is only effective at supporting shear stresses. It is interesting to analyse to what extent the results, obtained with these simplified hypotheses, are close to reality. The results are compared against higher fidelity numerical tools.

1. INTRODUCCIÓN

Las vigas en campo de tensión diagonal, utilizadas en ingeniería aeronáutica, se derivan de las vigas placa empleadas en la construcción de puentes. En estas vigas de gran altura, el esfuerzo de corte no es significativo por lo que las almas se hacen delgadas. En estas condiciones, el alma de las vigas placa alcanza la carga crítica antes de que se llegue a la carga última de corte. El pandeo se previene incorporando rigidizadores al alma. Sin embargo, en muchas estructuras aeronáuticas el alma es tan delgada que serían necesarios un número excesivo de rigidizadores para garantizar que el alma desarrolle una tensión de corte elevada antes de alcanzar la tensión crítica. En consecuencia, las platabandas de las vigas se conectan mediante montantes cuya función no es la de rigidizar el alma, sino la de mantener separadas las platabandas. En tal situación, el alma se deja libre para alcanzar y superar la carga crítica de pandeo. La idea básica es que el alma, alcanzada su carga crítica, no soporta las cargas de corte desarrollando tensiones de corte, sino a través de tensiones normales en la dirección de los pliegues que se producen como consecuencia del pandeo. [Wagner \(1928\)](#) demostró que una estructura compuesta por un alma delgada rigidizada por montantes transversales, no falla cuando el alma supera la tensión crítica de pandeo, dado que se forman pliegues que funcionan como elementos diagonales en tracción, mientras que los montantes experimentan tensiones de compresión. Las fórmulas planteadas por Wagner bajo un régimen completo de tensión diagonal, resultaban demasiado conservativas. En la práctica, el comportamiento de todas las almas queda comprendido en una región intermedia denominada *estado de tensión diagonal incompleto*. [Kuhn et al. \(1952\)](#) presentaron una teoría ingenieril que describe el estado de tensión diagonal incompleto para el diseño y cálculo de vigas con almas delgadas que puede ser considerado como un método que interpola, entre los casos límites de almas resistentes al corte y estados de tensión diagonal puros.

A partir del trabajo pionero de Wagner, se propusieron distintos modelos para representar el comportamiento de membranas tales como airbags, velas y paracaídas. Dichas membranas tienen poca resistencia a las tensiones de compresión y, por lo tanto, son fáciles de arrugar. La teoría de campo de tensión diagonal puro (PDT, por sus siglas en inglés) proporciona un modelo adecuado para membranas arrugadas. En la teoría PDT, una membrana se idealiza como una membrana con rigidez nula a la compresión. Por lo tanto, cuando las tensiones de compresión están a punto de aparecer en la membrana, se liberan inmediatamente por deformaciones fuera del plano, es decir, las arrugas de la membrana. El campo de tensión después de las arrugas se modela como un PDT uniaxial, en el que un esfuerzo principal es de tracción y el otro es cero. Además, la deformación fuera del plano causada por las arrugas se reemplaza por la contracción en el plano. Por lo tanto, la membrana arrugada se puede tratar como un problema plano, ya que el pandeo local causado por las arrugas se corresponde con la contracción en el plano. En la mayoría de estos estudios, el fenómeno de las arrugas se modela modificando las relaciones tensión-deformación de las membranas arrugadas ([Liu et al. \(2001\)](#); [Ding y Yang \(2003\)](#)). [Miyazaki \(2006\)](#) revisó diferentes modelos propuestos en la literatura para representar este comportamiento. [Akita et al. \(2007\)](#) proponen un modelo que permite representar el arrugamiento de membranas, en el marco de un estado clásico de tensión plana, conjuntamente con el método de elementos finitos. El mecanismo asociado con las arrugas se representa utilizando una técnica de proyección. En esencia, la energía de la membrana que se encuentra experimentando el arrugamiento, se descompone en dos partes: una parte con energía elástica no nula y otra que contiene la deformación correspondiente con la arruga y cuya energía es nula. A tal fin, se obtiene una matriz de proyección que separa la deformación elástica de la deformación total, de tal modo que la matriz en la relación constitutiva modificada se obtiene del producto

de la matriz constitutiva clásica y la matriz de proyección.

Una tercera opción, más onerosa computacionalmente, para representar el comportamiento de estructuras con poca rigidez en compresión y en consecuencia, susceptibles de experimentar fenómenos de inestabilidad, es la de utilizar elementos no lineales de láminas (Flores y Oñate (2011)).

El objetivo central del presente trabajo está orientado a la representación del comportamiento del alma en una viga Wagner, modelada con elementos bidimensionales (cuadriláteros de 8 nudos) en estado de tensión plana. A tal fin, se han utilizado los resultados propuestos en el trabajo de Akita et al. (2007), con la diferencia de que en la presente propuesta, por estar constituida el alma de materiales metálicos, se ha incorporado la posibilidad de soportar esfuerzos limitados de compresión. Este elemento se incorporó en un código que permite combinarlo con elementos de viga dentro de un modelo no lineal geométrico (Alpha (2012)). Un segundo objetivo es comparar en qué medida los resultados propuestos en forma semi empírica por Kuhn et al. (1952) se aproximan a los obtenidos numéricamente. El interés en estas comparaciones radica en que el método de cálculo propuesto por Kuhn y colaboradores es principalmente un método de diseño, lo que permite comprender la influencia de los distintos parámetros en la construcción de estas estructuras. Los resultados obtenidos en los modelos anteriores se comparan con los obtenidos utilizando un modelo 3D más fidedigno, que utiliza elementos de lámina delgada combinados con vigas. Este análisis se realiza con un código que integra en forma explícita las ecuaciones de equilibrio Simpack (2012), a los fines de evitar los problemas de convergencia originados en la fuerte no-linealidad del comportamiento del alma (pandeo y formación de arrugas).

2. ALGUNAS ECUACIONES BÁSICAS DEL ESTADO DE TENSIÓN DIAGONAL PURO (PDT)

Una viga en estado de tensión diagonal puro es similar en su construcción a una viga placa, salvo el hecho de que su alma es tan delgada que pandea y se arruga en pliegues diagonales para una carga muy por debajo de la carga de diseño. Aunque las estructuras en la práctica no se aproximan a esta situación límite, la PDT resulta de interés habida cuenta de que constituye la base sobre la que se construye la teoría de tensión diagonal incompleta, (Kuhn et al. (1952))

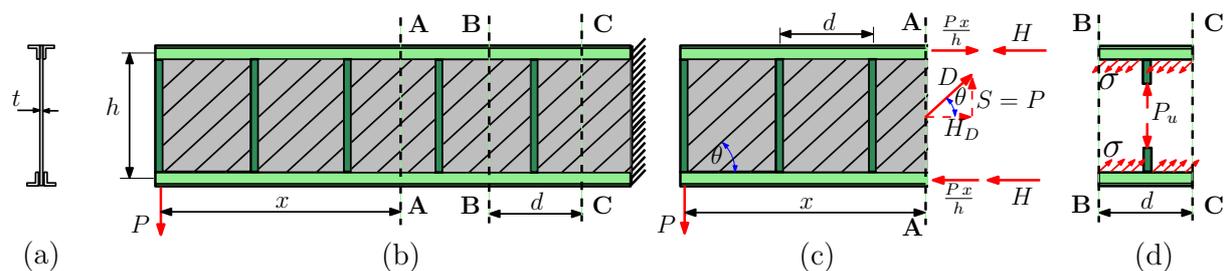


Figura 1: Diagrama de una viga Wagner en estado de tensión diagonal puro (PDT)

En la Figura 1 (a) se muestra la sección de una viga Wagner. Las platandas están construidas con perfiles ángulos que sujetan al alma de espesor t . En la Figura 1 (b), las líneas inclinadas indican los pliegues que se forman debido a que la carga aplicada P ha superado el valor de la carga crítica de pandeo al corte del alma y la viga ha alcanzado un estado PDT. En la Figura 1 (c) se esquematiza una parte de la viga, a partir de la cual se pueden establecer expresiones elementales relacionadas con la compresión y tracción en las platandas (F), la compresión en los montantes (P_V) y la tensión diagonal σ (principal) en el alma. La fuerza resultante, debida a

la tensión σ , se ha indicado como D . Las componentes de la fuerza D son H_D (que se equilibra con las fuerzas H en las platabandas) y S . En la Figura 1 (d) se esquematiza la fuerza de compresión en los montantes debido a la tensión diagonal. Las expresiones que resultan para la tensión diagonal (σ), la fuerza en las platabandas (F) y la compresión en los montantes (P_U), son:

$$(1) \quad \sigma = \frac{2S}{ht \sin(2\theta)} \quad ; \quad F = \pm \frac{Px}{h} - \frac{S}{2} \cot(\theta) \quad , \quad (2) \quad P_U = -S \frac{d}{h} \tan(\theta) \quad (1)$$

3. BREVE RESEÑA DEL ESTADO DE TENSIÓN DIAGONAL INCOMPLETO (IDT)

Todas las fórmulas y gráficos necesarios para el uso práctico se recopilan en el trabajo de Kuhn et al. (1952). El método de análisis IDT (por sus siglas en inglés), está compuesto en parte de una teoría simple y en parte de empirismo. A continuación se presentan sólo algunas de las expresiones y consideraciones del IDT en una apretada síntesis.

3.1. Consideraciones generales

Según Kuhn et al. (1952), y en relación a las vigas Wagner, cuando se aplica una carga gradualmente creciente a una viga con un alma delgada, plana, reforzada por montantes y libre de grandes imperfecciones, se pueden hacer las siguientes observaciones: a bajas cargas, el alma se comporta de acuerdo con la teoría de vigas sometidas a esfuerzos de corte, el alma se mantiene plana y no hay tensiones en los montantes. A cierta carga crítica, el alma comienza a pandear. Al comienzo las arrugas son casi imperceptibles, y hacen falta mediciones muy cuidadosas para identificar su patrón inicial. A medida que la carga se incrementa más y más, las arrugas se vuelven más profundas y diferentes y la configuración inicial cambia lentamente para acercarse cada vez más al patrón de pliegues paralelos característica de la tensión diagonal bien avanzada. El proceso de la formación y progreso de las arrugas está acompañado por la aparición y desarrollo de tensiones axiales en los montantes. Está claro, entonces, que la teoría de vigas resistentes al corte se verifica a cargas suficientemente bajas. Es posible (aunque raro) que una viga permanezca en el régimen resistente al corte hasta que la rotura del alma o alguna otra falla tenga lugar. Sin embargo, el estado de tensión diagonal puro, corresponde a un estado límite teórico. Una viga real puede acercarse a este límite y posicionarse bastante cerca del mismo, pero nunca puede llegar al límite, porque se producirá alguna falla antes de que se alcance este límite. Una verificación experimental directa de la teoría de la tensión diagonal pura es, por lo tanto, imposible. La intuición física sugiere, y las mediciones han confirmado, que un alma se aproxima tanto más al estado de tensión diagonal puro en la medida en que la carga aplicada toma valores varios cientos de veces los valores de la carga crítica de pandeo al corte del alma. Existen vigas cuyas almas fallan cuando la carga aplicada es varios cientos de veces la carga de pandeo, pero esta situación es la excepción más que la regla. En la mayoría de las almas, la relación entre carga de falla y carga de pandeo es mucho menor, y la teoría de la tensión diagonal pura da aproximaciones cada vez más pobres a medida que esta relación disminuye. Para mejorar la precisión de la predicción de las tensiones es necesario reconocer que la mayoría de las almas, en situaciones prácticas, funcionan en un estado de tensión diagonal incompleto, o sea, en un estado de tensión intermedia entre el corte puro y el estado de tensión diagonal puro. En primer lugar, se define una tensión de corte nominal según la expresión $\tau = S/(ht)$. Entonces, si esta tensión supera el valor de la tensión crítica al corte del alma (τ_{cr}), la teoría IDT propone que la tensión aplicada se descompone en dos partes. Una

de corte puro y otra parte asociada a la tensión diagonal, según la siguiente expresión:

$$\tau = \tau_S + \tau_{DT} = (1 - k) \tau + k \tau \tag{2}$$

donde k , denominado factor de tensión diagonal, se calcula utilizando la expresión, empírica, $k = \tanh\left(\frac{1}{2} \log_{10}\left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)\right)$ válida cuando $\tau \geq \tau_{cr}$. Cuando $\tau < \tau_{cr}$, $k = 0$.

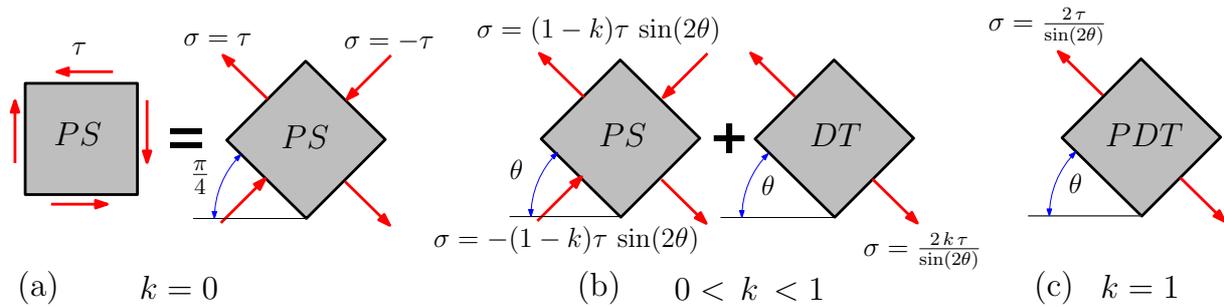


Figura 2: Estados diagonales de tensión

La Figura 2 grafica las situaciones que se encuentran representadas en la Ec.(2). Cuando la carga aplicada produce tensiones de corte inferiores a la crítica, $k = 0$, y la viga trabaja al corte puro (Figura 2(a)). Dado que $k \rightarrow 1$, a medida que la relación $\frac{\tau}{\tau_{cr}}$ aumenta, entonces el comportamiento tiende al estado de tensión diagonal puro (Figura 2 (c)). Para situaciones intermedias, se produce el estado representado en la Figura 2 (b).

A partir de las Ec.(1) y (2), se proponen las siguientes expresiones para el cálculo de las tensiones normales (σ_F) en las platabandas (sólo parte correspondiente a la tensión diagonal) y montantes (σ_U):

$$(1) \sigma_F = -\frac{k \tau \cot(\theta)}{\frac{2A_F}{ht} + \frac{(1-k)}{2}} \quad , \quad (2) \sigma_U = -\frac{k \tau \tan(\theta)}{\frac{A_U}{dt} + \frac{(1-k)}{2}} \tag{3}$$

en las que A_F es el área de las platabandas y A_U el área de los montantes.

La tensión crítica τ_{cr} se calcula a partir de la expresión

$$\tau_{cr} = k_{ss} E \left(\frac{t}{d}\right)^2 \left[R_h + \frac{1}{2} (R_d - R_h) \left(\frac{d}{h}\right)^3 \right] \tag{4}$$

en la que k_{ss} es un coeficiente teórico de pandeo para placas simplemente apoyadas de ancho d (distancia entre montantes) y longitud h (altura de la viga) con ($h > d$). E es el módulo elástico y t el espesor del alma, en tanto que R_h y R_d son coeficientes que miden las restricciones que proporcionan los montantes y platabandas al alma. Tanto k_{ss} como R_h y R_d se obtienen de figuras en la ref. (Kuhn et al. (1952)), en función de la geometría y los espesores y configuraciones de las platabandas y montantes.

La tensión de corte máxima en el alma puede estimarse mediante la expresión:

$$\tau_{max} = \tau (1 + k^2 C_1) (1 + k C_2) \tag{5}$$

en la que C_1 es un factor de corrección que es función de cuanto se aleje el ángulo θ (asociado con la tensión diagonal) de 45° y C_2 es un factor que depende de un coeficiente ω_d que mide la

rigidez de las platabandas. Ambos coeficientes (C_1 y C_2) pueden extraerse de figuras en la ref. (Kuhn et al. (1952)).

Utilizando ábacos, es posible estimar los valores de las tensiones promedio sobre los montantes (σ_U) y su valor máximo ($\sigma_{U_{max}}$).

4. SIMULACIÓN 2D DEL ESTADO DE TENSIÓN DIAGONAL INCOMPLETO

4.1. Modificación de la matriz de elasticidad

En un estado de tensión plana, las tensiones y deformaciones relevantes están relacionadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Determinadas las direcciones principales, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, asociadas con el ángulo θ (Figura 1 (b)) que forma la dirección 1 con el eje x_1 , se puede escribir la deformación como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{s}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{s}_2 \quad (7)$$

con $\mathbf{s}_1 = [\cos^2 \theta, \sin^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta]^T$ y $\mathbf{s}_2 = [\sin^2 \theta, \cos^2 \theta, -2 \sin \theta \cos \theta]^T$. Si la deformación (Ec.(7)) describe un estado de arrugamiento, entonces $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 < 0$. La deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede expresar como la suma de una deformación elástica ($\boldsymbol{\varepsilon}_e$) y una deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}_w$) asociada con el arrugamiento:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_w = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \varepsilon_{2w} \mathbf{s}_2 \quad \text{con} \quad \varepsilon_{2w} \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^T \mathbf{C}}{\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \mathbf{s}_2} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

La deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_w$ tiene asociada una energía elástica nula, por lo que la tensión de tracción uniaxial está asociada con la componente elástica de deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}_e$) a través de la Ec.(6):

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_w) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C}\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{con} \quad \mathbf{P} = \mathbf{1} - \mathbf{Q} \quad (9)$$

La matriz $\bar{\mathbf{C}}$ recibe el nombre de matriz de elasticidad modificada y permite calcular el vector tensión (tracción) cuyo módulo está orientado en la dirección principal 1, mientras que el vector tensión asociado a la dirección principal 2 tiene módulo nulo. Para una descripción más completa de las expresiones (Ecs.(7) a (9)) ver la referencia (Akita et al. (2007)).

4.2. Inclusión de la deformación umbral

Las estructuras de interés admiten un valor limitado de compresión asociado con la tensión de pandeo (σ_{cr}), que se asume bidimensional uniforme, de tal modo que a la tensión crítica, le corresponde una deformación crítica en la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{cr} \\ \sigma_{cr} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{cr} \\ \varepsilon_{cr} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \text{si} \quad \begin{cases} \sigma_{crit} = -\frac{f\pi^2}{12} \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \\ \varepsilon_{cr} \simeq -\frac{1,64}{(1+\nu)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \end{cases} \quad (10)$$

donde f es un factor que depende del estado de carga, de las condiciones de contorno y la relación de los lados del "rectángulo" y l es la longitud del lado cargado. Se adopta el valor $f =$

2 y la longitud l es un parámetro introducido por el usuario que puede determinarse igualando la tensión crítica σ_{crit} (Ec.(10)) con otra expresión que permita determinar la tensión crítica de corte en el alma, (ver Ec.(4)). Debido a que una forma bilineal para la transición de la relación constitutiva en compresión puede resultar inconveniente en procesos iterativos, se ha preferido utilizar las relaciones $\varepsilon - \sigma$ descritas en la Figura 3.

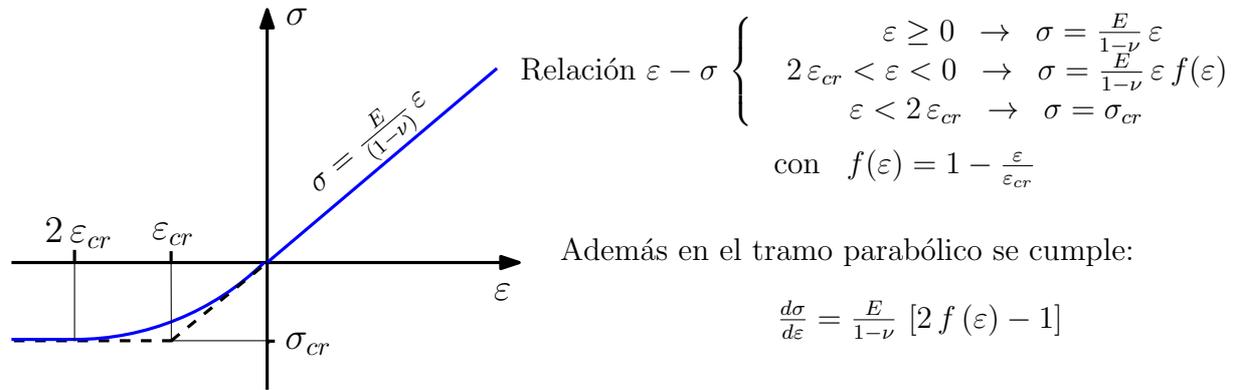


Figura 3: Relación tensión-deformación en compresión

4.3. Cálculo de las tensiones efectivas

El esquema de cálculo para obtener las fuerzas nodales equivalentes en cada punto de integración, luego de evaluar los desplazamientos u^t , las deformaciones ε^t , y las deformaciones principales ε_1 y ε_2 , es el siguiente:

1. Si $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ (*taut*), se utiliza la relación constitutiva normal (Ec.(6)).
2. Si $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 < 0$ (*wrinkled*), se calcula el módulo de la arruga $\varepsilon_{2w} = \frac{s_2 \cdot C \varepsilon^t}{s_2 \cdot C s_2}$, ver (Ec.(18) en Akita et al. (2007)), y la deformación elástica $\varepsilon_e = \varepsilon^t - \varepsilon_{2w} s_2$. De acuerdo al valor de la deformación de arruga (ε_{2w}), y al comportamiento en compresión descrito en la Figura 3, resultan los siguientes casos:
 - a) si $\varepsilon_{2w} > 2\varepsilon_{cr}$ (todavía no alcanzó el valor crítico), $\sigma = C \left[\varepsilon_e + \varepsilon_{2w} \left(1 - \frac{\varepsilon_{2w}}{4\varepsilon_{cr}} \right) s_2 \right]$.
 - b) si $\varepsilon_{2w} \leq 2\varepsilon_{cr}$ (ha pasado el valor crítico), $\sigma = C [\varepsilon_e + \varepsilon_{cr} s_2]$.
3. Si $\varepsilon_1 < 0$ y $\varepsilon_2 < 0$ (*slack*), entonces se relacionan cada una de las deformaciones principales con la Figura 3. Para la dirección principal i ($i = 1, 2$)
 - a) Si $\varepsilon_i > 2\varepsilon_{cr}$ (todavía no alcanzó el valor crítico) entonces $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{4\varepsilon_{cr}} \right)$.
 - b) Si $\varepsilon_i < 2\varepsilon_{cr}$ (ha pasado el valor crítico) entonces $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_{cr}$.
 - c) Finalmente $\sigma = C \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}$, ver la Ec.(7).

Por último, se calculan las fuerzas nodales equivalentes a partir de la integral de $B^T \sigma$.

5. EJEMPLOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos de una viga en voladizo de 5 vanos uniformes de longitud $d = 1\text{m}$, altura $h = 0,75\text{m}$, espesor del alma $t = 0,635\text{mm}$. La viga tiene una carga puntual en el punto inferior de su extremo libre $P = 50\text{kN}$ y en el apoyo están restringidos los desplazamientos en la unión entre montante y platabandas. Los montantes tienen una área $A_M = 1,51\text{cm}^2$ y una inercia $I_M = 0,84\text{cm}^4$, en tanto que el perfil en la platabanda superior (comprimido) tiene $A_S = 4,31\text{cm}^2$ e $I_S = 9,68\text{cm}^4$ y el perfil en la platabanda inferior (traccionado) $A_I = 2,44\text{cm}^3$ e $I_I = 4,56\text{cm}^4$. En la Figura 4 se muestra la geometría deformada (escalada por un factor 5) obtenida con el modelo 3-D, donde puede observarse el estado poscrítico del alma. El modelo 3D con resultados convergidos incluye 6230 nudos, 12000 elementos triangulares de lámina clásica y 580 elementos de viga de Timoshenko, con un total de 18689 grados de libertad. Por otro lado, el modelo 2D tiene 4731 nudos, 1500 elementos cuadriláteros serendípticos de membrana y 290 elementos cuadráticos de viga de Timoshenko, con un total de 10034 grados de libertad.

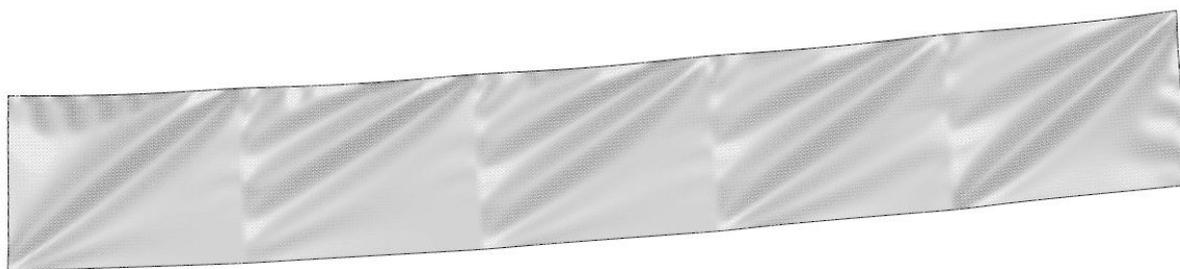


Figura 4: Deformada del modelo 3D (5X)

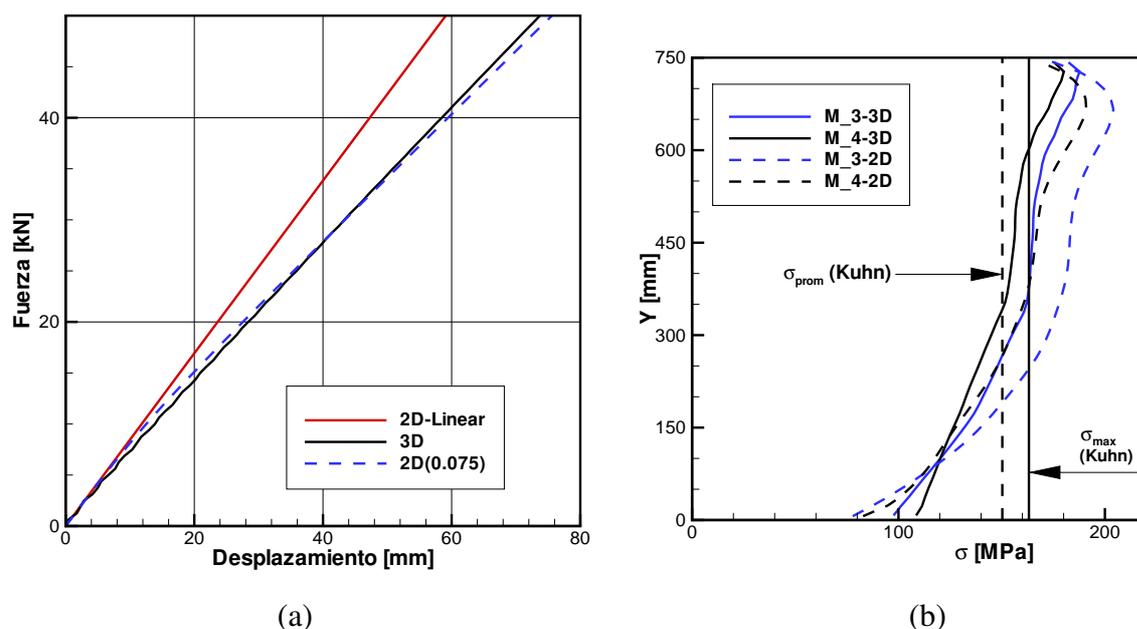


Figura 5: (a) Carga-desplazamiento, (b) Tensiones en los montantes centrales

Para el análisis 2-D simplificado se ha utilizado una longitud (Ec.(10)) $l = 75\text{mm}$. En la

Figura 5 (a) se muestra la relación carga versus desplazamiento del punto cargado. Puede observarse el muy buen acuerdo a lo largo del proceso entre el modelo 3-D de referencia y el modelo simplificado. Se observa también que en el estado poscrítico la pendiente es prácticamente lineal. En la Figura 5 (b) se ha graficado los perfiles de tensión de compresión en los montantes que limitan el paño central (M_3 más cercano al apoyo y M_4 más cercano al extremo libre). El modelo 2-D muestra valores un poco superiores al de referencia y las curvas presentan perfiles similares. Como referencia se incluyen los valores obtenidos usando la aproximación de Kuhn et al. (1952).

La Figura 6 muestra las tensiones axiales en las platabandas superior (comprimida) e inferior. Puede observarse una muy buena correlación entre los resultados de referencia 3D y los obtenidos con el modelo 2-D. La aproximación de Kuhn responde a la Ec.(1.2), modificada por la Ec.(3.1).

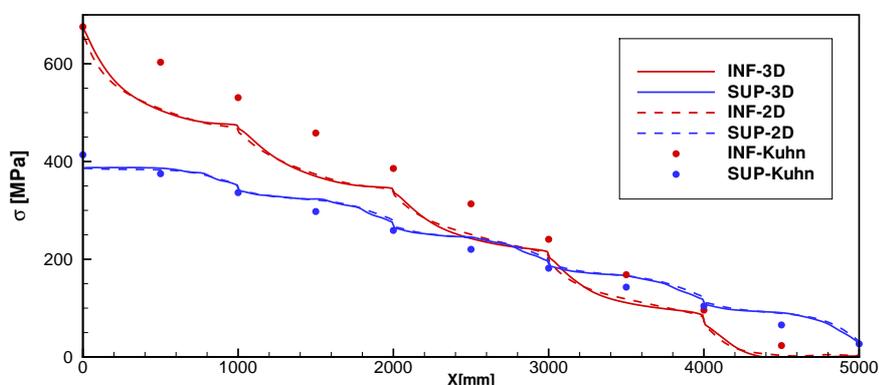


Figura 6: Tensiones en las platabandas Inferior (traccionada) y Superior (comprimida)

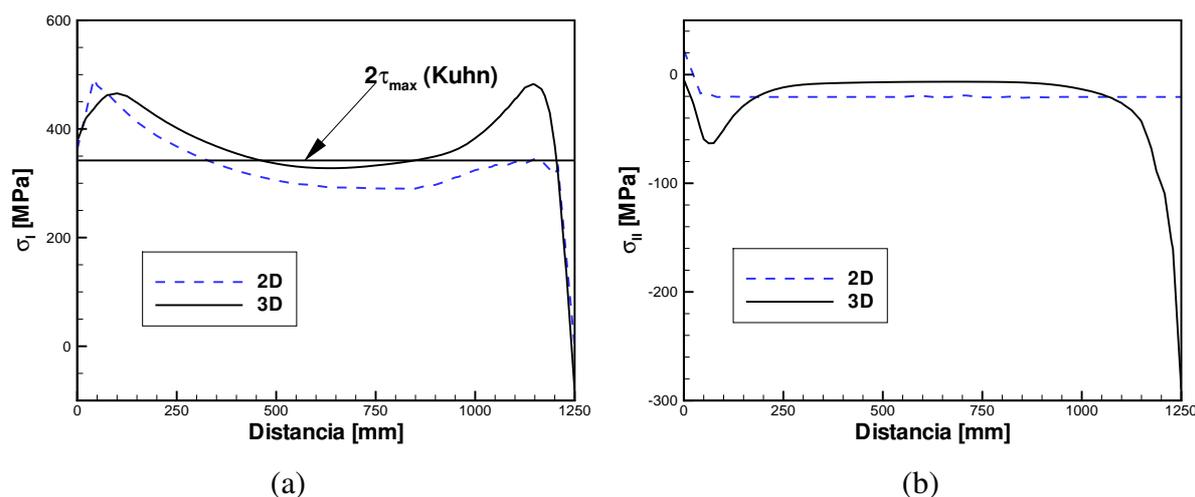


Figura 7: Tensiones principales a lo largo de la diagonal traccionada (a) σ_I (b) σ_{II}

Finalmente en la Figura 7 se muestran las tensiones principales a lo largo de la diagonal en el vano central. En el caso de la tensión σ_I (Figura 7 (a)) puede verse una buena correlación entre los dos modelos. Se incluye el valor de la tensión de corte máxima predicha por la aproximación de Kuhn. En el caso de la tensión σ_{II} (Figura 7 (b)) el modelo 2D predice un valor casi constante

asociado al umbral impuesto, en tanto que el modelo 3D indica una mayor variación asociada a las restricciones cinemáticas en las esquinas y una menor tensión en la zona arrugada. Esto se relaciona con la longitud l que se determinó utilizando la Ec.(4) en conjunto con la Ec.(10), lo que arrojó un valor de $l = 300\text{mm}$. El valor adoptado de $l = 75\text{mm}$ lo fue en el sentido de mejorar la convergencia numérica del modelo y de ajustar la curva carga-desplazamiento (Figura 5 (a)). El aumento de σ_{II} asociado a esta elección se pone de manifiesto en la Figura 7 (b) en la que se observa que el modelo 3D predice una menor tensión de compresión.

6. CONCLUSIONES

El objetivo central de este trabajo estuvo orientado a modelar el comportamiento del alma en una viga Wagner utilizando un modelo bidimensional en estado de tensión plana. Tomando como punto de partida el trabajo propuesto por Akita et al. (2007), se incorporó la posibilidad de considerar esfuerzos limitados de compresión. Los resultados obtenidos con el modelo 2D se contrastaron con los obtenidos en un modelo 3D Simpack (2012). En general hubo muy buena correspondencia en la predicción de los resultados. También se comparó con los valores que predice la teoría de tensión diagonal incompleta de Kuhn et al. (1952), que da valores que pueden tomarse como referencia pero que resultan incapaces de describir el comportamiento en mayor detalle.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET y de la SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- Akita T., Nakashino M., Natori M., y Park K. A simple computer implementation of membrane wrinkle behaviour via a projection technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71:1231–1259, 2007.
- Alpha. *Análisis Estático/Dinámico Implícito de Sólidos con énfasis en Estructuras Laminares, version 5.5*. Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- Ding H. y Yang B. The modeling and numerical analysis of wrinkled membranes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1785–1801, 2003.
- Flores F. y Oñate E. Wrinkling and folding analysis of elastic membranes using an enhanced rotation-free thin shell triangular element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47:982–990, 2011.
- Kuhn P., Peterson J., y Ross Levin L. *A summary of diagonal tension. Part I - Methods of analysis*. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note, Nro 2661, Washington, USA, 1952.
- Liu X., Jenkins C., y Shur W. Large deflection analysis of pneumatic envelopes using a penalty parameter modified material model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37:233–251, 2001.
- Miyazaki Y. Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:1179–1209, 2006.
- Simpack. *Análisis Dinámico Explícito de Sólidos por el Método de Elementos Finitos, version 7.2*. Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- Wagner H. *Structures of thin sheet metal, their design and construction*. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Memorandums, Nro 490, Washington, USA, 1928.