

## MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO E NUMÉRICOS APLICADOS A VIBRAÇÃO DE COLUNAS SEMI-ENTERRADAS EM UM SOLO NÃO LINEAR

Thiago A. de Queiroz<sup>1</sup>, Donald M. Santee<sup>2</sup>

*<sup>1</sup>Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Goiás – CaC, Avenida Lamartine Pinto de Avelar, n° 1120, 75705-220, Catalão – GO, Brasil, th.al.qz@gmail.com*

*<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Universidade Federal de Goiás – CaC, Avenida Lamartine Pinto de Avelar, n° 1120, 75705-220, Catalão – GO, Brasil, donald\_santee@yahoo.com.br*

**Palavras-Chave:** Colunas semi-enterradas, Métodos numéricos, Métodos de perturbação, Oscilações não-lineares, Fórmula de Ramberg-Osgood.

**Resumo.** O problema de colunas semi-enterradas tem chamado a atenção pela sua grande utilização como elemento estrutural, além de ter poucas referências na literatura. Nesse trabalho desenvolve-se um modelo matemático para uma coluna semi-enterrada em um solo com não linearidade representado pela fórmula de Ramberg-Osgood. Existem vários obstáculos que dificultam a análise do modelo, entre eles há a dificuldade de se encontrar uma solução analítica exata. Essa dificuldade é aumentada quando o elemento estrutural é submetido a carregamentos dinâmicos, em especial, periódicos. Para tanto se aplica métodos numéricos e de perturbação para a análise da solução do presente modelo. Por conseguinte, faz-se uma análise quantitativa dos métodos numéricos e de perturbação utilizados, comparando-os de acordo com os critérios de precisão, estabilidade e esforço computacional. Os métodos numéricos considerados são: métodos de passo simples (Runge-Kutta, Runge-Kutta-Fehlberg), passos múltiplos (Adams-Bashforth, Preditor-Corretor) e extrapolação (Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer). Já para os métodos de perturbação, considera-se o método do Equilíbrio dos Harmônicos (*Harmonic Balance*) e o método de Múltiplas Escalas. Feita a comparação destes métodos, fornecem-se dados concisos aos pesquisadores, cientistas e/ou engenheiros quanto ao melhor tipo de método a empregar na análise de problemas como o aqui descrito ou a problemas semelhantes.

## 1 INTRODUÇÃO

O uso de colunas é muito comum em construções civis, por isso seu estudo merece de minuciosa atenção e os critérios de dimensionamento devem ser bem estabelecidos para garantir a segurança da estrutura, evitando o comprometimento da mesma. Em particular colunas semi-enterradas são usadas em chaminés, torres, estruturas “off-shore”, etc.

Estas colunas podem aparecer totalmente enterradas, desenterradas ou semi-enterradas nos mais diferenciados tipos de solos. Existem modelos e soluções propostas para o caso totalmente enterrado e totalmente desenterrado, como o que se encontra em [Santee and Gonçalves \(2005\)](#) e [Bazant and Cedolin \(1991\)](#). Já para o caso semi-enterrado, poucas são as referências na literatura, existindo uma carência de estudos nesse tópico. Alguns modelos de colunas semi-enterradas são conhecidos, como os propostos por [Sampaio \(2004\)](#) e [Serebrenick \(2004\)](#).

No presente trabalho será proposto um modelo matemático que descreve o comportamento de uma coluna semi-enterrada em um solo quadraticamente não linear do tipo “com enfraquecimento” ([Greimann et al., 1987](#)), pois nossos resultados mostram que essa é uma configuração estrutural potencialmente perigosa em termos de estabilidade da coluna.

Devido ao fato do modelo proposto ser regido por uma equação diferencial ordinária não-linear sem solução analítica exata ([Sampaio, 2004](#); [Serebrenick, 2004](#)), é necessário à aplicação de um método aproximado, como um método numérico ou de perturbação para se chegar a uma solução para o modelo. Logo, serão aplicados métodos das seguintes classes: métodos de passo simples, métodos de passos múltiplos, métodos de extrapolação e métodos de perturbação.

Com o intuito de comparar estes métodos, consideram-se fatores como o esforço computacional, a precisão e a estabilidade, garantindo fornecer recursos evidentes sobre quais métodos apresentam maior viabilidade para posterior uso. Assim, nota-se a importância em propor um modelo para o problema e fornecer uma solução para o mesmo.

## 2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se a coluna da [Figura 1](#), com comprimento total  $L$  e rigidez  $EI$ , enterrada a certa altura  $H$ , carregada por uma força axial  $P$  que mantém a mesma intensidade e direção à medida que a viga se deforma e sendo  $F$  a força de reação exercida pela fundação. Também se desconsidera qualquer atrito lateral que esta venha a sofrer.

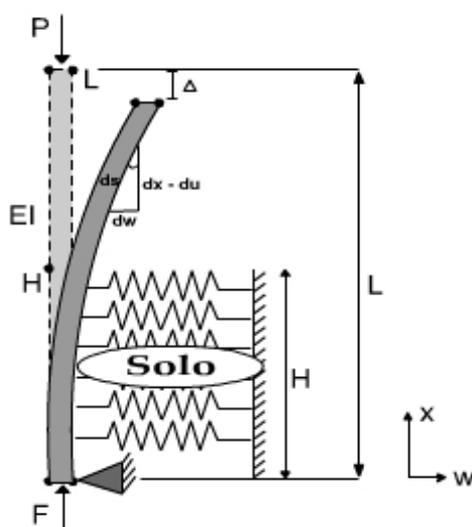


Figura 1. Modelo de coluna semi-enterrada em um solo não linear.

A análise dinâmica da coluna proposta será feita mediante a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli em que a altura da coluna é muito pequena quando comparada com o seu comprimento  $L$  (Sampaio, 2004). Também, como a formulação para o problema semi-enterrado é semelhante a do problema totalmente enterrado, utilizar-se-á as mesmas técnicas e princípios, como o Princípio de Hamilton e as ferramentas do cálculo variacional.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática para a coluna parte do Princípio de Hamilton, expresso na equação (1),

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - \pi - U_{fd}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta (W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

onde  $T$  é a energia cinética,  $\pi$  é a energia potencial total,  $U_{fd}$  é a energia interna de deformação da fundação elástica,  $W_{nc}$  é o trabalho realizado por forças não conservativas e  $\delta$  é a variação dos termos entre parênteses.

Seguem-se as formulações de cada parcela de energia até chegar à equação diferencial ordinária para a coluna semi-enterrada.

#### 3.1 Energia potencial total

A energia potencial total de uma estrutura é obtida como (Sampaio, 2004; Serebrenick, 2004):

$$\pi = U + V_p \quad (2)$$

onde  $U$  é a energia interna de deformação e  $V_p$  é o potencial das cargas externas.

Conforme a Figura 1, supondo a coluna inextensível, à medida que ela se deforma, cada ponto do seu eixo central a uma distância  $x$  da extremidade não enterrada move-se para uma posição vertical e uma posição horizontal  $w$ . Sendo a deflexão lateral da coluna descrita pela função matemática  $w(x)$ , onde  $x$  varia de  $0$  à  $L$ .

Tem-se que a variação da curvatura,  $\chi$ , é dada pela taxa de variação do ângulo com o comprimento do arco, assim:

$$\chi = \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} \quad (3)$$

Para a energia interna de deformação  $U$ , considera-se apenas a energia de flexão (Dym and Shames, 1973) resultante do alongamento das fibras tracionadas e o encurtamento das fibras comprimidas, logo:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (4)$$

sendo  $\chi$  a variação de curvatura,  $E$  o módulo de elasticidade ou módulo de Young,  $I$  o momento de inércia da seção transversal, resultando em  $EI$  como a rigidez a flexão da coluna.

Expandindo  $\chi^2$  em série de Taylor até segunda ordem, chega-se a:

$$\chi^2 = \left( \frac{w''^2}{1 - w'^2} \right) \cong w''^2 (1 + w'^2) \quad (5)$$

Resultando em,

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L w'^2 (1 + w'^2) dx \quad (6)$$

Por outro lado, o potencial das cargas externas é definido como sendo o produto entre a carga aplicada  $P$  e o encurtamento total da viga  $\Delta$ , assim:

$$V_p = P \Delta \quad (7)$$

O valor de  $\Delta$  é obtido considerando a seguinte relação observada na [Figura 1](#),

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (8)$$

Dividindo a equação (8) por  $(dx)^2$ , tem-se:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx - du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (9)$$

Visto que a coluna é considerada inextensível, tem-se o elemento linear  $dx$  igual ao elemento curvo  $ds$ . Logo,

$$\frac{du}{dx} = 1 - \sqrt{1 - w'^2} \quad (10)$$

Assim, expandindo em série de Taylor até a quarta ordem a equação (10), chega-se a:

$$\Delta = -\int_0^L \left[ \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right] dx \quad (11)$$

Finalmente, a energia potencial total é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L w'^2 (1 + w'^2) dx - P \int_0^L \left( \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx \quad (12)$$

### 3.2 Energia cinética

Usualmente ([Dym and Shames, 1973](#)), a energia cinética  $T$ , é definida como:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (13)$$

onde  $m$  é a massa por unidade de comprimento da viga e  $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$  representa a velocidade das deflexões laterais da coluna em função do tempo.

### 3.3 Modelo do solo e a fundação elástica

A maioria dos solos apresenta uma não linearidade do tipo “com enfraquecimento” ([Greimann et al., 1987](#)). Para representar tal modelo de solo utiliza-se a fórmula de Ramberg-Osgood por ter seu uso mais comum na literatura ([Greimann et al., 1987](#)). A fórmula de Ramberg-Osgood é:

$$S = \frac{(E_{ii} - E_{ff})y}{\sqrt[n]{1 + \left| \frac{(E_{ii} - E_{ff})y}{P_u} \right|^n}} + E_{ii} y \quad (14)$$

onde  $E_{ii}$  é o módulo de elasticidade tangente inicial,  $E_{if}$  é o módulo de elasticidade tangente final,  $S$  é a resistência generalizada do solo,  $P_u$  é a resistência última do solo,  $n$  é o parâmetro de forma e  $y$  é o deslocamento generalizado da coluna.

A força restauradora da fundação elástica  $F_{fr}$  é dada por uma expansão em série de Taylor até 2ª ordem da função  $S$ , na qual se admite que o parâmetro de forma seja  $n=1$  (Santee and Gonçalves, 2005). Levando a,

$$F_{fr} = -\frac{(E_{ii} - E_{if})y|y|}{P_u} + E_{ii}y \quad (15)$$

A parcela  $y|y|$  na equação (15) aparece devido à simetria da força em relação ao deslocamento lateral, isto é, com a inversão do deslocamento lateral a direção da força de resistência do solo também se inverte.

Logo, a energia interna de deformação armazenada na fundação elástica é:

$$U_{fd} = \int_0^H \int_0^w (F_{fr}) dw dx = \int_0^H \left( -\frac{(E_{ii} - E_{if})|w|^3}{3P_u} + \frac{E_{ii}w^2}{2} \right) dx \quad (16)$$

Note que a integral ao longo do comprimento varia até  $H$ , uma vez que essa parcela só existe na região enterrada da coluna.

### 3.4 Forças não-conservativas

Por se tratar de um problema que sofrerá a influência de uma força externa de excitação e considerar que o amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios (Thomson, 1978), monta-se um funcional para as forças não conservativas que atuam no modelo.

Segundo Thomson (1978), a parcela referente ao amortecimento tem o objetivo de simular a dissipação de energia que os sistemas reais exibem. Logo, a força de amortecimento, para este presente problema, é caracterizada de forma diferenciada na parte enterrada e na parte desenterrada da coluna, visto que na parte enterrada, além da influência das características geométricas da coluna, ocorre à influência direta do solo, enquanto que na parte desenterrada não há esta influência direta. Assim, define-se o amortecimento como:

- Para a parte enterrada:

$$A_e = \int_0^H \beta_e \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx \quad (17)$$

- Para a parte desenterrada:

$$A_d = \int_H^L \beta_d \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx \quad (18)$$

onde  $\beta_e$  representa o parâmetro de amortecimento para a parte enterrada e  $\beta_d$  o parâmetro de amortecimento para a parte desenterrada.

A introdução de um carregamento externo transversal uniformemente distribuído e periodicamente dependente do tempo é descrito como:

$$F_{wp} = \int_H^L A_0 \cos(\Omega t) dx \quad (19)$$

em que  $A_0$  é a amplitude do carregamento harmônico e  $\Omega$  é a frequência da excitação externa.

Conseqüentemente, a variação das forças não conservativas é dada por:

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} = & (F_{wp} - A_e - A_d) \delta w = \int_H^L A_0 \cos(\Omega t) \delta w dx - \int_0^H \beta_e \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx - \\ & - \int_H^L \beta_d \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx \end{aligned} \quad (20)$$

onde  $\delta w$  é a variação da deflexão lateral da coluna em um ponto dado.

A seguir determina-se a respectiva equação de movimento que representa o problema proposto.

### 3.5 A equação de movimento

Concentrando-se a análise no primeiro modo de vibração e com o intuito de reduzir a complexidade do problema analisado, usa-se o método de Ritz, que consiste em substituir a função de deflexão da coluna,  $w$ , por uma função aproximada, usualmente em séries (Rezende, 2005). A seguinte função de aproximação é utilizada:

$$w = w(x) \cong A(t) X^2 \quad (21)$$

sendo  $A(t)$  em função do tempo  $t$ .

Esta função foi obtida de El Naschie (1991) e satisfaz três das quatro condições de contorno do problema e, também, a condição de continuidade da coluna no ponto que separa a parte enterrada da desenterrada. Outra razão para escolha desta função está na sua simplicidade em resolver o problema sem um distanciamento da realidade a qual se pretende modelar.

Logo, aplicando a equação (21) na função  $L_g$  e resolvendo as integrais presentes, chega-se a:

$$\begin{aligned} L_g = T - \pi - U_{fd} = & \frac{L^5 m \dot{A}^2}{10} + \frac{H^7 (E_{ii} - E_{if}) |A|^3}{21 P_u} - \\ & - \frac{A^2 (4 L^3 (20 EI + 3 L^2 P) A^2 + 60 EIL + 3 H^5 E_{ii} + 20 L^3 P)}{30} \end{aligned} \quad (22)$$

Utilizando as ferramentas do cálculo variacional e o princípio de Hamilton (Dym and Shames, 1973; Butkov, 1968), obtém-se parte da equação de movimento para o modelo proposto.

$$\left[ \begin{aligned} & - \frac{L^5 m \ddot{A}}{5} - \frac{A (8 L^3 (20 EI + 3 L^2 P) A^2 + 60 EIL + 3 H^5 E_{ii} + 20 L^3 P)}{30} + \\ & + \frac{H^7 (E_{ii} - E_{if}) A |A|}{7 P_u} \end{aligned} \right] \quad (23)$$

A outra parte da equação é obtida pela atuação das forças não conservativas empregando a equação (21) juntamente com o método de Galerkin.

O método de Galerkin é uma generalização do método de Ritz que se aplica aos problemas de contorno que não podem ser reduzidos aos variacionais (Rezende, 2005). Com isso, será usada a própria função  $\Phi(x)$  definida pelo o método de Ritz em substituição ao fator de ponderação  $\delta w$ . Logo,

$$\Phi(x) = X^2 \quad (24)$$

Substituindo  $\delta w$  pela equação (24), e considerando a equação (21), e resolvendo as integrais, obtém-se:

$$\delta W_{nc} = \frac{A_0(L^3 - H^3)\cos(\Omega t)}{3} - \frac{(\beta_e H^3 + \beta_d(L^3 - H^3))\dot{A}}{3} \quad (25)$$

Assim, com a aplicação do método de Galerkin, deduz-se que as forças não conservativas não podem ser resolvidas pelo o cálculo variacional.

Finalmente a equação de movimento que descreve a coluna semi-enterrada é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{L^5 m \ddot{A}}{5} + \frac{(\beta_e H^3 + \beta_d(L^3 - H^3))\dot{A}}{3} + \frac{(60 EIL + 3H^5 E_{ii} + 20L^3 P)A}{30} - \\ - \frac{H^7(E_{ii} - E_{if})A|A|}{7P_u} - \frac{A_0(L^3 - H^3)\cos(\Omega t)}{3} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

a qual pode ser reescrita, para uma melhor representação, da seguinte maneira:

$$\ddot{A} + c\dot{A} + \omega_0^2 A - \beta A|A| = f \cos(\Omega t) \quad (27)$$

onde,

$$\begin{aligned} c = \frac{5(\beta_e H^3 + \beta_d(L^3 - H^3))}{3mL^5} \quad \omega_0^2 = \frac{(60 EIL + 3H^5 E_{ii} + 20L^3 P)}{3mL^5} \\ \beta = \frac{5H^7(E_{ii} - E_{if})}{7mL^5 P_u} \quad f = \frac{5A_0(L^3 - H^3)}{3mL^5} \end{aligned} \quad (28)$$

Obtida a equação de movimento, parte-se para a apresentação dos métodos numéricos e de perturbação empregados.

#### 4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Com o intuito de encontrar uma solução para a equação diferencial (27), não necessariamente uma solução ótima, já que o propósito específico do presente artigo é realizar a comparação entre os métodos de perturbação e os métodos numéricos aplicados à mesma, porém quando mais eficiente o método utilizado, melhor será a solução proposta. Logo os seguintes métodos numéricos são abordados:

- Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo;
- Runge-Kutta-Fehlberg com o passo adaptável;
- Adams-Bashforth de 4ª ordem com o passo fixo;
- Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem com o passo fixo;
- Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer.

Estes são métodos vastamente apresentados na literatura, assim sem a necessidade de rediscutir especificações sobre cada um, em todo o caso recorrer a [Press et al. \(1992\)](#) ou [Burden and Faires \(2003\)](#) onde se encontra explicações detalhadas juntamente com algoritmos para cada um.

No que diz respeito ao método Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer, em relação às seqüências de valores utilizadas para refinar o subintervalo atual de integração na procura de

um passo ideal, as seqüências propostas por Bulirsch, Deufelhard e Romberg, cada uma com doze elementos, serão as utilizadas pelo o método de extrapolação. Maiores detalhes a respeito destas seqüências, consulte [Press et al. \(1992\)](#), [Schryer \(1974\)](#) e/ou [Bulirsch and Stöer \(1966\)](#).

## 5 MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO

Outra maneira de gerar uma solução aproximada para o problema é utilizar-se de métodos de perturbação. Estes métodos são utilizados para gerar uma solução analítica para o problema, isto é, uma solução aproximada ([Nayfeh and Balachandran, 1995](#)). Existem vários métodos pertencentes a esta classe, porém discutem-se os seguintes:

- Método do Equilíbrio dos Harmônicos (*Harmonic Balance*);
- Método de Múltiplas Escalas.

Nas próximas subseções descrevem-se os passos seguidos até a obtenção da solução analítica aproximada, porém não se atendo a detalhes específicos dos métodos em si.

### 5.1 Método do Equilíbrio dos Harmônicos

A idéia principal do método é considerar a solução da seguinte forma ([Nayfeh, 1973](#)):

$$A = \sum_{m=0}^M A_m \cos(m \omega t) + B_m \sin(m \omega t) \quad (29)$$

Neste caso será efetuada a expansão até  $M=2$ . Logo, substituindo a expansão acima na equação (27) e equacionando os coeficientes de cada termo para zero, obtém-se um sistema não linear de  $2M + 1$  equações algébricas apresentado a seguir.

- Termos constantes:

$$+ \frac{2\beta A_0^2 + |2A_0 \omega_0^2| + \beta(A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2)}{2} = 0 \quad (30)$$

- Termo  $\cos(\omega t)$  :

$$+ 2\beta A_1 B_1 \sin(\omega t) + 2\beta A_0 A_1 + |-\omega_0 c B_1 + f| = 0 \quad (31)$$

- Termo  $\sin(\omega t)$  :

$$+ 2\beta A_0 B_1 + |\omega_0 c A_1| = 0 \quad (32)$$

- Termo  $\cos(2\omega t)$  :

$$+ 2\beta A_1 A_2 \cos(\omega t) + 2\beta A_2 B_1 \sin(\omega t) + \frac{4\beta A_0 A_2 + \beta(A_1^2 - B_1^2) + |2\omega_0(-2cB_2 + 3\omega_0 A_2)|}{2} = 0 \quad (33)$$

- Termo  $\sin(2\omega t)$  :

$$+ 2\beta A_1 B_2 \cos(\omega t) + 2\beta B_1 B_2 \sin(\omega t) + 2\beta A_0 B_2 + |\omega_0(2cA_2 + 3B_2 \omega_0)| = 0 \quad (34)$$

Para a resolução deste sistema de equações não lineares, utilizou-se o método de Newton-Raphson, sendo as condições iniciais obtidas do sistema linear derivado do não linear e o método iterado  $10^8$  vezes. Portanto a solução final é:

$$A(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) \quad (35)$$

em que os valores de  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$  são obtidos da resolução do sistema de equações não lineares acima.

## 5.2 Método de múltiplas escalas

Este método considera a solução, ao invés de ser em uma única variável, função de escalas ou múltiplas variáveis independentes (Nayfeh and Mook, 1979). Além de ser mais complexa sua aplicação ao fato de existir diversas maneiras ao qual o mesmo pode ser tratado dependendo do problema em questão. Seguiu-se a formulação proposta por Nayfeh and Mook (1979) para a resolução de sistemas com ressonância primária, isto é, a frequência da excitação externa  $\Omega$  é bem próxima da frequência natural  $\omega_0$ .

A solução é representada pela seguinte expansão:

$$A(t; \varepsilon) = A_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon A_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 A_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (36)$$

em que  $T_n = \varepsilon^n t$ ,  $n \geq 0$  e  $\varepsilon \ll 1$  é um fator de perturbação.

A expansão foi realizada até  $O(\varepsilon^2)$ , assim substituindo a equação (36) na equação (27) e equacionando os coeficientes das respectivas séries de  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$  e  $\varepsilon^2$  para zero, tem-se, respectivamente, o seguinte conjunto de equações:

$$D_0^2 A_0 + \omega_0^2 A_0 = 0 \quad (37)$$

$$D_0^2 A_1 + \omega_0^2 A_1 = -2D_0 D_1 A_0 + \beta A_0 |A_0| \quad (38)$$

$$D_0^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = -2D_0 D_1 A_{10} - 2D_0 D_2 A_0 - D_1^2 A_0 - c D_0 A_0 + 2\beta |A_0 A_1| + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_2) \quad (39)$$

Sendo as derivadas da equação (27), em relação a  $t$ , expansões em termos de derivadas parciais com respeito às escalas  $T_n$ , a saber:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (40)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

Logo, a solução da equação (37) é:

$$A_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (41)$$

em que  $A(T_1, T_2)$  é uma função complexa desconhecida e  $\bar{A}(T_1, T_2)$  é o seu conjugado complexo. A função  $A(T_1, T_2)$  será determinada posteriormente eliminando os termos seculares que aparecem em  $A_2$ .

Assim, substituindo a equação (41) na equação (39) surgem termos seculares, ou seja, termos em que a frequência natural no exponencial varia igualmente com a frequência natural da equação, isto ocasionando uma solução não periódica (Nayfeh and Mook, 1979). Logo, para eliminar estes termos faz-se  $D_1 A = 0$ , o que conduz  $A$  a ser independente da escala  $T_1$ . Então a solução da equação (38) torna-se:

$$A_1 = \frac{\beta}{\omega_0^2} \left( -\frac{1}{3} A(T_2) |A(T_2)| e^{2i\omega_0 T_0} + 2 |A(T_2) \bar{A}(T_2)| - \frac{1}{3} \bar{A}(T_2) |\bar{A}(T_2)| e^{-2i\omega_0 T_0} \right) \quad (42)$$

Com isso, substitui-se  $A_0$  e  $A_1$  na equação (39). Isso resulta no aparecimento de termos seculares que devem ser eliminados fazendo,

$$e^{i\omega_0 T_0} \left( -2i\omega_0 A'(T_2) - ci\omega_0 A(T_2) + \frac{10}{3\omega_0^2} \beta^2 A^2(T_2) |\bar{A}(T_2)| + \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_2} \right) = 0 \quad (43)$$

Para a resolução da equação (43) toma-se  $A$  na forma polar, isto é,  $A = 0.5x e^{iy}$ , assim separando em parte real e imaginária, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{cx}{2} + \frac{k}{2\omega_0} \sin(\gamma) \\ x\gamma' &= x\sigma + \frac{5\beta^2|x|^3}{12\omega_0^3} + \frac{k}{2\omega_0} \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (44)$$

onde  $\gamma = \sigma T_2 - y$ , sendo  $x, y, \gamma$  reais em função de  $T_2$ . Adotou-se a mesma estratégia aplicada a resolução do sistema não linear do método do Equilíbrio dos Harmônicos para a resolução do sistema de equações (44) e obtenção dos valores de  $x, y, \gamma$ . A seguir, tem-se a solução obtida pela aplicação do método de múltiplas escalas.

$$A(t; \varepsilon) = x \cos(\Omega t - \gamma) - \varepsilon \frac{\beta}{6\omega_0^2} x|x| \cos(2\Omega t - 2\gamma) + \varepsilon \frac{\beta}{2\omega_0^2} x^2 + O(\varepsilon^2) \quad (45)$$

Com isso, parte-se para a realização dos testes aplicados a equação (27), visando comparar os métodos numéricos e de perturbação de acordo com critérios estabelecidos.

## 5 TESTES

Com o intuito de investigar o desempenho dos métodos apresentados, vários testes foram realizados e seus resultados apresentados para discussão. Os valores dos coeficientes da equação são definidos por valores atribuídos a cada variável, sendo alguns destes valores obtidos de [Santee and Gonçalves \(2005\)](#) e outros utilizados pela literatura comum ([Bazant and Cedolin, 1991](#); [Nayfeh and Mook, 1979](#)).

### 5.1 Considerações diversas

Para avaliar e comparar os métodos numéricos e de perturbação utiliza-se três fatores, que são:

- **Esforço Computacional:** Número de avaliações funcionais efetuadas ao total;
- **Precisão:** Quanto mais próximo da solução real, mais preciso é o método. No caso em que não existe a solução exata para a eventual comparação, leva-se em conta a média total da distância entre uma solução aproximada padrão e a outra solução obtida pelo método numérico ou de perturbação. Assim, quanto menor for esta média, mais preciso será o método.
- **Estabilidade:** Associa-se ao fato de que os pequenos erros que são introduzidos durante a execução do método tendam a zero no final, ou seja, pequenas alterações ou perturbações nas condições iniciais produzam alterações igualmente pequenas nas aproximações posteriores.

Outras considerações são seguidas para todos os métodos evitando mencioná-las repetidamente ao decorrer do presente trabalho, a saber:

- Os métodos numéricos com o passo adaptável possuem o tamanho mínimo que o passo pode atingir de  $10^{-5}$ , o tamanho máximo que o passo pode atingir de  $1$  e a tolerância ao erro da solução de  $10^{-5}$ ;
- O tamanho do passo a ser utilizado foi calculado inicialmente pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg com uma tolerância ao erro da solução de  $10^{-6}$ ;
- O intervalo de integração está situado entre  $t=0$  a  $t=40\pi/\Omega$ , sendo  $\Omega$  a frequência da excitação externa;
- As condições iniciais para os métodos numéricos são:  $A(0)=0$  e  $\dot{A}(0)=0$ ;
- O método da Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg é utilizado para gerar a solução aproximada padrão. Esta seqüência tem mostrado resultados com maior precisão, porém com elevado esforço computacional (Queiroz and Santee, 2006). Como o propósito é averiguar quão preciso são os outros métodos, tanto os numéricos quanto os de perturbação, esta seqüência é a utilizada.

Também, o tempo gasto na execução de cada método numérico será levado em conta. Este valor é em função do tempo de execução do Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo para evitar depender tanto da máquina utilizada nos testes.

Para os testes, a máquina utilizada possui as seguintes características: processador AMD Athlon XP 2600+, 1024 megabytes de memória RAM, disco rígido de 120 megabytes e o Microsoft Windows XP Professional como sistema operacional.

Todos os métodos e equações utilizadas foram codificados na linguagem de programação Java seguindo os padrões de orientação a objeto.

## 5.2 Um exemplo com dados reais

Nos testes considera-se uma coluna cilíndrica circular de aço com  $L=30$  m, densidade linear de massa  $m=20$  kg/m, rigidez à flexão  $EI=5672067$  Nm<sup>2</sup>, diâmetro  $D=20$  cm e espessura  $s=2$  cm.

Para a função de Ramberg-Osgood, equação (14), considerando o solo de argila rígida, tem-se:  $E_{ii} = 4037$  Pa;  $E_{ff} = 0$  Pa;  $n=1$ ;  $P_u = 50$  N/m;

A carga aplicada à coluna é de  $P=5000$  N, o parâmetro de amortecimento satisfaz á  $c \cong 0.05 \sqrt{4\omega_0^2}$ , que corresponde a aproximadamente 5% do amortecimento crítico. Já para o forçamento externo:  $f=0.001$  N e  $\Omega = \omega_0$  rad/s, pois para grandes valores de  $f$  e pequenos valores  $\Omega$  a solução tende a uma região de escape (Santee and Gonçalves, 2005). Em seguida, têm-se os testes realizados.

## 5.3 Caso 1: $H = 40\%L$

Com  $H = 40\%L$  a equação (27) reduz-se a:

$$\ddot{A} + 0.33 \dot{A} + 10.92 A - 4.25 A|A| = 0.001 \cos(3.31t) \quad (46)$$

Para o teste realizado, o tamanho do passo dado é de  $0.235$  s e a seguir a tabela contendo os resultados obtidos.

Método Numérico	Esforço Computacional	Precisão	Tempo
Método do Equilíbrio dos Harmônicos	0	$1.14 \times 10^{-4}$	$3.61 \times 10^{-3}$

Método de Múltiplas Escalas	0	$9.27 \times 10^{-4}$	$6.94 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo	644 avaliações	$8.36 \times 10^{-5}$	1 ( <i>Padrão</i> )
Runge-Kutta-Fehlberg com o passo adaptável	1092 avaliações	$8.25 \times 10^{-7}$	1.48
Adams-Bashforth de 4ª ordem com o passo fixo	170 avaliações	<i>Instável</i>	0.74
Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem com o passo fixo	328 avaliações	$3.16 \times 10^{-4}$	0.85
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Deufelhard	5346 avaliações	$4.4 \times 10^{-8}$	9.15
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Bulirsch	9223 avaliações	$4.4 \times 10^{-8}$	9.95
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg	15695 avaliações	<i>Solução Padrão</i>	11.50

Tabela 1. Resultados da aplicação dos métodos numéricos e de perturbação a equação (46), sendo a Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg a “solução padrão”.

De acordo com a [Tabela 1](#), observa-se que o método da Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Deufelhard e Bulirsch, em termos de precisão, apresentou-se melhor que os outros métodos, no entanto com um esforço computacional relativamente alto. Segundo [Schryer \(1974\)](#) e [Gupta et al. \(1985\)](#), o método possui essa característica de elevado esforço computacional, com isso gastando maior tempo de execução e, como se percebe, são métodos utilizados para obter alta precisão ([Press et al., 1992](#)). Para os métodos de passo simples, Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo e Runge-Kutta-Fehlberg, a melhor opção é Runge-Kutta-Fehlberg. Este método apesar de ser mais complexo em questões de codificação, apresenta boa precisão com um número regular de avaliações funcionais. O método, também, possui o passo adaptável, representando vantagem sobre os de passos simples, já que o passo pode ser modificado para obter uma alta ordem de precisão. Runge-Kutta de 4ª ordem prima pela a facilidade de codificação, sendo vantajoso neste ponto sobre os outros métodos numéricos.

Para os métodos de passos múltiplos, o Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem mostrou ser a melhor opção custo/benefício, pois possui baixo esforço computacional e não deixa a desejar em precisão, além de ser facilmente codificado. Por outro lado, o método de Adams-Bashforth de 4ª ordem com o passo fixo mostrou ser instável. Apesar do baixo esforço computacional, não ofereceu resultados satisfatórios em termos de solução numérica.

Os métodos de perturbação possuem vantagem em relação ao tempo de execução sobre os métodos numéricos, visto que estes métodos não realizam avaliação funcional alguma, já que a solução analítica é fornecida, porém é aproximada, daí o valor zero como esforço computacional.

Percebe-se o método do Equilíbrio dos Harmônicos, tanto em precisão quanto em tempo de execução, é superior ao método de Múltiplas Escalas, além de ter sido bem simples sua aplicação para encontrar a solução analítica. Um problema que pode surgir com o método é na resolução do sistema de equações não lineares para encontrar os valores das constantes presentes na solução analítica, equação (35), pois se faz o uso de cálculos aproximados, logo

prejudicando a precisão da solução encontrada para o problema. Também, o método do Equilíbrio dos Harmônicos mostrou-se melhor que os métodos de passos múltiplos em todos os critérios de comparação. Já o método de Múltiplas Escalas mostrou ser regular em precisão.

#### 5.4 Caso 2: $H = 70\%L$

Neste segundo teste a coluna está 70% enterrada. Assim, a equação (27) fica

$$\ddot{A} + 0.65 \dot{A} + 42.78 A - 213.73 A|A| = 0.001 \cos(6.54t) \quad (47)$$

Os mesmos testes anteriores foram realizados. O tamanho do passo é de  $0.118 s$  e tem-se a seguinte tabela com os referidos resultados.

Método Numérico	Esforço Computacional	Precisão	Tempo
Método do Equilíbrio dos Harmônicos	0	$4.62 \times 10^{-5}$	$7.21 \times 10^{-3}$
Método de Múltiplas Escalas	0	$2.21 \times 10^{-4}$	$8.62 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo	660 avaliações	$3.22 \times 10^{-5}$	1 (Padrão)
Runge-Kutta-Fehlberg com o passo adaptável	1104 avaliações	$5.05 \times 10^{-7}$	1.48
Adams-Bashforth de 4ª ordem com o passo fixo	174 avaliações	<i>Instável</i>	0.75
Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem com o passo fixo	336 avaliações	$6.46 \times 10^{-5}$	0.87
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Deufelhard	3675 avaliações	0.0	8.18
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Bulirsch	5677 avaliações	0.0	8.89
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg	23864 avaliações	<i>Solução Padrão</i>	13.27

Tabela 2. Resultados da aplicação dos métodos numéricos e de perturbação a equação (47), sendo a Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg a “solução padrão”.

A partir dos dados da Tabela 2, tem-se o método de Runge-Kutta-Fehlberg, novamente com o melhor resultado em termos de precisão, porém com um esforço computacional maior que os demais, isto relacionado aos métodos de passo simples, passos múltiplos e de perturbação. Logo, o método tem mostrado ser de boa aplicação e estabilidade para os problemas com o mesmo caráter que o apresentado neste artigo, isto é, problemas de oscilações não lineares. O Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo tem mostrado eficiência regular, tanto em esforço computacional quanto em precisão, além de ter sido estável em todos os testes efetuados. Já o Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem, novamente, possui a melhor relação custo/benefício, com baixíssimo esforço computacional se comparado aos demais e com uma precisão aceitável, além de ter sido estável nos testes, contudo o método de

Adams-bashforth de 4ª ordem com o passo fixo não se mostrou estável para o problema, divergindo rapidamente, apesar do baixo esforço computacional.

Em relação aos métodos de extrapolação, mais uma vez, apresentaram melhores resultados, porém com alto esforço computacional, sendo questionável o seu uso. E, o uso da seqüência de Bulirsch fez aumentar o esforço computacional e o tempo de execução quando comparado com a seqüência de Deufelhard nos dados da [Tabela 1](#) e [Tabela 2](#), porém a precisão permaneceu igual, dando créditos à seqüência de Deufelhard.

Os métodos de perturbação, como discutido anteriormente, apresentam o valor zero de esforço computacional, visto que a solução analítica é fornecida, portanto sem a necessidade de fazer avaliação funcional alguma.

O método do Equilíbrio dos Harmônicos demonstra ser superior em todos os critérios de comparação ao método de Múltiplas Escalas e aos métodos de passos múltiplos. Já o método de Múltiplas Escalas tem mostrado ser regular em precisão, uns dos fatores para isto é que o sistema de equações (44) deve ser resolvido de forma numérica assim como é feito para o sistema de equações não lineares que surge no método do Equilíbrio dos Harmônicos. Na próxima subseção é apresentado um último teste considerando a coluna totalmente enterrada.

#### 5.4 Caso 3: $H = L$

Neste último teste a coluna encontra-se totalmente enterrada. Logo a equação (27) resulta em:

$$\ddot{A} + 1.45 \dot{A} + 210.7 A - 2595.21 A|A| = 0.001 \cos(14.52t) \quad (48)$$

Sendo o tamanho do passo dado de  $0.060 s$  e os resultados apresentados na [Tabela 3](#).

Método Numérico	Esforço Computacional	Precisão	Tempo
Método do Equilíbrio dos Harmônicos	0	$1.41 \times 10^{-5}$	$3.11 \times 10^{-3}$
Método de Múltiplas Escalas	0	$4.18 \times 10^{-5}$	$6.55 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo	628 avaliações	$9.03 \times 10^{-6}$	1 ( <i>Padrão</i> )
Runge-Kutta-Fehlberg com o passo adaptável	1182 avaliações	$1.28 \times 10^{-7}$	1.50
Adams-Bashforth de 4ª ordem com o passo fixo	166 avaliações	<i>Instável</i>	0.72
Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem com o passo fixo	320 avaliações	$2.23 \times 10^{-5}$	0.87
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Deufelhard	4037 avaliações	0.0	8.64
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Bulirsch	9006 avaliações	0.0	9.98
Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg	32072 avaliações	<i>Solução Padrão</i>	17.55

Tabela 3. Resultados da aplicação dos métodos numéricos e de perturbação a equação (48), sendo a Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg a “solução padrão”.

Dado os resultados da tabela acima, o método de extrapolação tem seu esforço computacional aumentando drasticamente quando comparado a [Tabela 1](#) e a [Tabela 2](#). Este fato é observado pela alta não linearidade presente no modelo matemático, visto que o método tenta dar passos grandes, porém extrapola a tolerância imposta, assim tendo que reavaliar novamente com o novo tamanho de passo modificado. Logo é um método caro em esforço computacional, porém para quem busca alta precisão sem se preocupar com tempo ou esforço computacional, torna-se uma boa escolha. Para os demais métodos, o método de Runge-Kutta-Fehlberg, novamente tem o melhor resultado em termos de precisão, tendo relevância para problemas que necessitam de boa precisão sem um alto esforço computacional. Já o Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo tem mostrado ser regular, além de ser simples seu processo de codificação. Em relação ao melhor custo/benefício, o Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem com o passo fixo tem-se sobressaído comparando-o com os demais métodos, tendo baixo esforço computacional e uma precisão regular, porém o método de Adams-bashforth de 4ª ordem com o passo fixo não tem demonstrado ser estável para o problema apresentado.

Considerando os métodos de perturbação, o método do Equilíbrio dos Harmônicos tem se comportado igualmente como nos testes anteriores, o mesmo vale para o método de Múltiplas Escalas. Portanto, o método do Equilíbrio dos Harmônicos é bem aconselhado quando se trabalha com métodos analíticos, visto simplicidade na técnica de aplicação e eficácia na solução gerada. Porém, para o método de Múltiplas Escalas não se percebe tanta eficácia, além de ser mais complexa sua aplicação, visto o grande número de detalhes que devem ser considerados.

Na próxima subseção são apresentadas figuras contendo gráficos da solução numérica gerada pelo método de extrapolação com a seqüência de Romberg e os métodos de perturbação.

### 5.3 Soluções qualitativas

As figuras abaixo mostram a solução numérica a partir dos três testes efetuados. A curva de oscilação foi obtida pelo método de Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg, o método do Equilíbrio dos Harmônicos e o método de Múltiplas Escalas.

A [Figura 2](#) representa o gráfico da solução para o caso 1, equação (46). Nota-se que as oscilações estão entre valores de  $1.2 \times 10^{-3}$  a  $-1.3 \times 10^{-3}$ , isto é devido à coluna ter uma parte desenterrada, a qual não sofre influência direta do solo, assim suscetível a uma maior vibração, além da maior influência ocasionada pela aplicação da força externa em sua extremidade desenterrada.



Figura 2. Solução da equação (46) obtida pelo método de Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg (cor verde), método do Equilíbrio dos Harmônicos (cor vermelha) e método de Múltiplas Escalas (cor azul), sendo  $H = 40\%L$ .

A Figura 3 apresenta o gráfico da solução para a equação (47) considerando a coluna 70% enterrada. Percebe-se que as oscilações são menores que na Figura 2 e, está entre valores de  $3 \times 10^{-4}$  a  $-3 \times 10^{-4}$ , pois a coluna possui mais de sua metade enterrada atuando o solo como um amortecimento para a mesma.

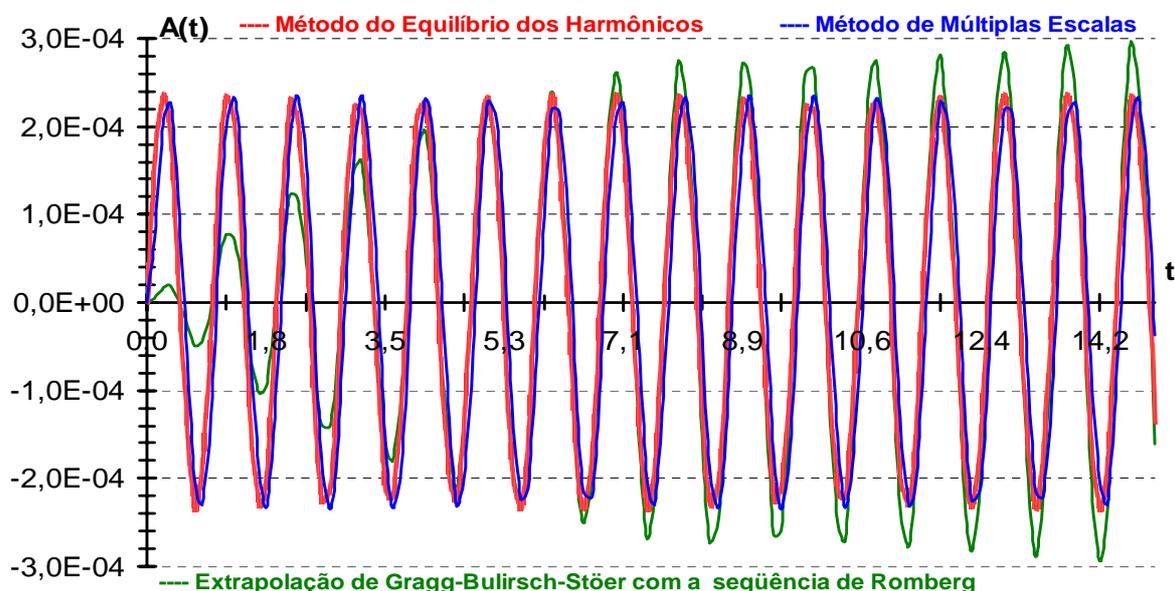


Figura 3. Solução da equação (47) obtida pelo método de Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg (cor verde), método do Equilíbrio dos Harmônicos (cor vermelha) e método de Múltiplas Escalas (cor azul), sendo  $H = 70\%L$ .

Por outro lado, a Figura 4 mostra o gráfico para a coluna totalmente enterrada. Ao fato de ser totalmente enterrada, as oscilações são bem menores, dado que o solo atua intensamente para impedir grandes amplitudes de oscilações.



Figura 4. Solução da equação (48) obtida pelo método de Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer com a seqüência de Romberg (cor verde), método do Equilíbrio dos Harmônicos (cor vermelha) e método de Múltiplas Escalas (cor azul), sendo  $H = L$ .

Nas três figuras apresentadas acima, observa-se que a solução gerada pelo o método de extrapolação possui um movimento mais complexo. A razão disso é que nos métodos numéricos, a parcela transiente da solução está incluída. Já os métodos de perturbação aproximam apenas a parcela permanente da solução. O parâmetro  $\Omega$  adotado, também, está relacionado diretamente com o intervalo de integração dos métodos numéricos, então, enquanto maior o valor  $\Omega$ , menor o intervalo de integração, visto que o limite superior do intervalo de integração é  $40\pi/\Omega$ . Logo, os métodos numéricos têm maiores chances de apresentarem estáveis e com boa solução, porém a alta não linearidade do modelo matemático nem sempre garante isto.

## 6 CONCLUSÕES

A modelagem matemática de uma coluna semi-enterrada em um solo não linear do tipo “com enfraquecimento” forneceu uma equação diferencial ordinária não linear que descreve como tal elemento estrutural se comporta de acordo com os parâmetros utilizados, isto é, a profundidade da fundação e a frequência da excitação externa. A obtenção de tal equação adotou algumas técnicas comuns da literatura visando um modelo real e ao mesmo tempo simples.

Tal modelo serviu de base para o emprego de diversos métodos, tanto numéricos como de perturbação, almejando averiguar o potencial de cada um.

Diversos testes foram realizados, todos procurando proporcionar uma base de dados concisa para uma possível discussão a respeito dos métodos empregados. Diante destes fatos, chegou-se a várias conclusões:

- Os métodos de extrapolação surgiram com o intuito de modificar o conceito de precisão. Com resultados altamente precisos, estes métodos fornecem detalhes importantes para a análise do comportamento de diversos problemas propostos. Contudo, um problema decorre do alto esforço computacional, sendo um dos fatores para isto, a seqüência de subdivisão de passos utilizada pelo método para obter o passo ideal. Citada as três seqüências utilizadas, Press et al. (1992) sugere utilizar a de Deufelhard, visto que seu

uso representa um esforço computacional menor, porém, segundo testes efetuados, a precisão é inferior à apresentada pelo a seqüência de Romberg, sendo a seqüência de Romberg a que fornece a melhor precisão, porém é a que produz um aumento significativo no número de avaliações. Estes métodos também possuem grande vantagem no tamanho do passo que podem dar a cada iteração, pois se o tamanho do passo estiver pequeno em relação à tolerância, o mesmo é aumentado visando dar passos grandes. Nos testes efetuados, a alta não linearidade da equação fez com que o método desse passos pequenos visando obter resultados precisos e estáveis. A respeito de um estudo de estabilidade destes métodos recorra a [Fornberg et al. \(2004\)](#);

- Runge-Kutta-Fehlberg de passo adaptável tem demonstrado melhor precisão que os demais métodos, salvo os de extrapolação. Este método, também possui o passo adaptável, facilitando o controle do tamanho de passo a ser dado. Apesar de ser considerado um método de 4ª ordem, o mesmo fornece bons resultados em precisão se comparado com os demais métodos, além ter uma boa estabilidade. O método de Runge-Kutta-Fehlberg pode-ser uma alternativa ao método de Extrapolação de Gragg-Bulirsch-Stöer para quem procura boa precisão com um esforço computacional regular, além de o método ser muito mais simples para a codificação que o de extrapolação;
- O Runge-Kutta de 4ª ordem com o passo fixo pode ser a escolha para quem procura comodidade na hora da codificação, além de baixo esforço computacional se comparado aos de extrapolação. E para quem vem usando este método por muito tempo, talvez seja à hora de mudar para outro um pouco melhor em termos de precisão, mas em todo o caso, ele continua uma boa opção, além de ser bem estável;
- Para o melhor custo/benefício, o Preditor-Corretor de Adams de 4ª ordem com o passo fixo é a escolha correta. Com baixo esforço computacional e resultados dentro do padrão de aceitação, continua tendo o uso viável. Apesar do método de Adams-Bashforth de 4ª ordem apresentar instável para os testes efetuados, principalmente pelo o caráter não linear da equação diferencial ordinária, isto não é verificado para o preditor-corretor, já que o corretor melhora a solução instável, tornando-a estável. Este método é implícito, o que valida ainda mais sua boa estabilidade.
- Em relação aos Métodos de perturbação, destaque para o método do Equilíbrio dos Harmônicos. Este método apresentou-se melhor em todos os critérios de comparação adotados se comparado com o método de Múltiplas Escalas e os métodos de passos múltiplos discutidos no presente trabalho, porém em questão de codificação do método numérico ou resolução do problema de forma analítica, é preferível realizar a codificação, pois resolvendo de forma analítica, ainda ter-se-á o problema do sistema de equações não lineares que dificilmente se consegue resolver de forma analítica exata. Para o método de Múltiplas Escalas o maior problema está na complexidade envolvida para encontrar a solução analítica, dado o grande número de detalhes que devem ser levados em conta, além do método não ter mostrado um resultado tão satisfatório como se esperava.

Todos os testes efetuados confirmam alguns estudos já efetivados a respeito dos métodos numéricos e de perturbação aqui empregados. Isto reforça o quão importante são estes métodos, dado que diversos problemas não seriam resolvidos de maneira rápida, mesmo que com soluções aproximadas. Assim, fortalecendo toda a teoria já desenvolvida a respeito dos mesmos e servindo de base para novas teorias.

Novos trabalhos têm sido propostos em paralelo a este, visando fornecer novos meios e ferramentas para o uso e aplicação destes métodos. Em particular, testes aplicados a problemas reais envolvendo equações com soluções caóticas almejando determinar como se comportam diante de tal problema.

**REFERÊNCIAS**

- Z. P. Bazant and L. Cedolin. *Stability of Structures. Elastic-Inelastic Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, 1991.
- R. Bulirsch and J. Stöer. Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods. *Numerische Mathematik* 8, pp. 1-13, 1996.
- R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical Analysis*. Pioneira Thomson Learning, 2003.
- E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, 1968.
- C. L. Dym and I. H. Shames. *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Kogakusha, 1973.
- M. S. El Naschie. *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: an Energy Approach*. McGraw-Hill, 1991.
- B. Fornberg, J. Zuev and J. Lee. Extrapolation Methods for Solving Wave Equations. Submitted to: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004.
- L. F. Greimann, A. M. Wolde-Tinsae and P. S. Yang. Finite Element Model for Soil-Pile Interaction in Integral Abutment Bridges. *Computers and Geotechnics* 4, pp. 127-149. Elsevier Science, 1987.
- G. K. Gupta, R. Sacks-Davis and P. E. Tischer. A Review of Recent Developments in Solving ODEs. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 17, n. 1, pp. 5-47, 1985.
- A. H. Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, 1973.
- A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics - Analytical, Computational, and Experimental Methods*. John Wiley and Sons, 1995.
- A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, 1979.
- W. T. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- T. A. Queiroz and D. M. Santee. Comparison of the Most Popular Numerical Methods when Applied to Duffing's Equation. *DINCON 2006 – 5<sup>th</sup> Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, 2006.
- V. Rezende. *O Método de Galerkin*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá/Paraná, 2005.
- A. E. G. Sampaio. *Análise do Comportamento Dinâmico de Colunas Semi-Enterradas*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio/Rio de Janeiro, 2004.
- D. M. Santee and P. B. Gonçalves. Oscillations of a Beam on a Non-Linear Elastic Foundation under Periodic Loads. *XI DINAME – XI International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2005.
- N. L. Schryer. An Extrapolation Step-Size Monitor for Solving Ordinary Differential Equations. *Proceedings of the 1974 annual conference (ACM/CSC-ER)*, pp. 140-148, 1974.
- G. Serebrenick. *Análise da estabilidade de colunas parcialmente enterradas em uma fundação elástica não-linear*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio/Rio de Janeiro, 2004.
- W. T. Thomson. *Theory of Vibration with Applications*. Interciência, 1978.