

## VIBRACIONES DE UNA VIGA DE EJE CURVO CON UNA RÓTULA ELÁSTICA INTERMEDIA Y CONDICIONES DE EXTREMO ELÁSTICAS

### VIBRATION OF A CURVED BEAM WITH AN INTERNAL ELASTIC RESTRAINED HINGE AND ENDS WITH GENERALLY ELASTICALLY RESTRAINED CONDITIONS

Javier L. Raffo<sup>a</sup>, Andrés F. Saavedra Calambás<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Mecánica Computacional y Experimental, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

**Palabras Clave:** Vibraciones, Vigas Curvas, restricciones elásticas, Ritz, Cálculo de Variaciones.

**Resumen.** En este trabajo se analiza el problema de vibraciones libres de una viga curva en el plano de dos tramos de longitud arbitraria, diferentes propiedades, con una rótula intermedia afectada por restricciones elásticas traslacionales y rotacionales, ubicada arbitrariamente. Ambos extremos de la viga también se encuentran restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Mediante una aplicación rigurosa del principio de Hamilton, se obtienen: las ecuaciones diferenciales, las condiciones de contorno y las condiciones de transición que corresponden al problema del comportamiento estático y dinámico del sistema mecánico en estudio. Se determina una solución analítica mediante la aplicación del método variacional de Ritz. Para obtener indicadores sobre los resultados obtenidos con la metodología propuesta, se realizan comparaciones de estos, con ciertos casos particulares que figuran en la literatura. Se presentan además resultados nuevos que consisten en: frecuencias naturales y formas modales de vibración para una viga curva con diferentes características.

**Keywords:** Vibrations, Curved Beams, Elastic restraints conditions, Ritz, Calculus of Variations.

**Abstract.** This work deals with the problem of free vibration of an in-plane curved beam of two spans with arbitrary length, different properties, with an internal hinge restrained with translational and rotational elastic restrictions with arbitrary location. The ends of the curved beam are elastically restrained against rotation and translations. Hamilton principle was used in a rigorous framework to obtain the equations of motion, the boundary conditions and the transitions conditions which correspond to the described the static and dynamic behavior of the mechanical system. The Ritz method is used to obtain an analytical solution of the problem. In order to verify the proposed methodology, numerical results are compared with some cases available in the literature. Additional, new numerical results of the frequency parameter and modal shapes are presented for curved beams with different properties.

## 1 INTRODUCCIÓN

Existe una gran cantidad de trabajos publicados en revistas científicas sobre vibraciones de vigas curvas con variadas características geométricas. Si se realiza una descripción de los trabajos realizados al momento, sin la intención de hacer una revisión completa de la bibliografía actual, se encuentra que por un lado [Auciello y De Rosa \(1994\)](#) realizaron una revisión bibliográfica completa de lo realizado al momento en arcos circulares. [Yang y otros \(2017\)](#) presentaron otra revisión completa y actualizada de las diferentes teorías utilizadas al momento para el estudio de vibraciones de vigas curvas en el plano.

Varios trabajos presentaron resultados numéricos de frecuencias naturales y formas modales de vigas de eje curvo obtenidos con métodos numéricos ([Tong y otros, 1998](#); [Litewka y Rakowski, 2001](#); [Karami y Malekzadeh, 2004](#); [Öztürk y otros, 2006](#); [Shahba y otros, 2012](#)). Pero no se observa en la literatura el desarrollo del cálculo de variaciones para la obtención del problema de contorno y transición de vigas de eje curvo en forma rigurosa. Por otra parte, muchos autores que contemplaron deformación axial, inercia rotatoria y/o deformación por corte comparan sus resultados con los de [Henrych \(1981\)](#), los cuales solo contemplan la deformación por flexión por la escasa información existente en el momento de desarrollar sus trabajos.

Por lo comentado, en el presente trabajo se presenta el problema de contorno y ecuaciones diferenciales de una viga de eje circular con restricciones elásticas en los extremos, con una rótula elástica en un punto intermedio, teniendo en cuenta los desplazamientos radiales y tangentes para la obtención de resultados numéricos de las primeras frecuencias naturales de vibrar. Para la obtención de resultados numéricos se utiliza el método variacional de Ritz utilizando polinomios simples como funciones aproximantes junto con el método de penalidad para considerar las restricciones adicionales en la rótula elástica intermedia. Se presentan algunos resultados del coeficiente de frecuencia para comparar con otros autores y nuevos resultados de configuraciones del sistema mecánico estudiado que no han sido presentados al momento.

## 2 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO

Sea una viga circular de dos tramos cuyo desplazamiento tangencial se denota por  $u$  y el transversal por  $w$ . Los extremos y puntos intermedios de la viga están elásticamente restringidos contra rotación y traslación, tal como se muestra en la [Figura 1](#). Los vínculos rotacionales están caracterizados por los coeficientes de rigidez  $r_1$ ,  $r_c$ ,  $r_{12}$  y  $r_2$ , los vínculos traslacionales en dirección radial por  $t_1$ ,  $t_c$  y  $t_2$ , los vínculos traslacionales en dirección tangencial se denotan por  $s_1$ ,  $s_c$  y  $s_2$ .

Para analizar el comportamiento del sistema mecánico estudiado se utilizará como variable espacial al recorrido del arco denotado por  $x$ , el cual inicia en el extremo izquierdo, la transición está ubicada en  $x = c$  y finaliza en el extremo derecho en  $x = l$ , donde  $l$  denota la longitud total del arco circular estudiado.

Al adoptar valores adecuados de los coeficientes de rigidez de los extremos, se pueden generar distintas combinaciones de apoyos clásicos, esto es: empotrado, simplemente apoyado y libre. Por otra parte, al dar valores adecuados a los coeficientes de rigidez de las restricciones elásticas intermedias, se pueden generar, por ejemplo, el caso de una viga con un apoyo intermedio o el caso de una rótula libre intermedia en  $x = c$ .

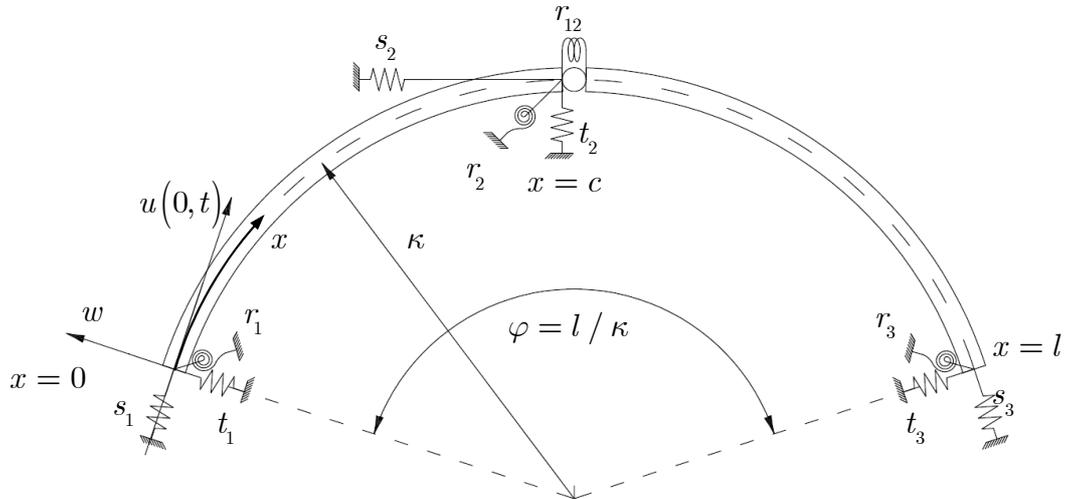


Figura 1: Viga de eje circular analizada restringida elásticamente en los extremos y en un punto intermedio.

Si el desplazamiento tangencial y radial de la línea media correspondiente a un punto  $x$ , en un instante  $t$ , es descrito por las funciones  $u = u(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$ ,  $\forall x \in [0, l]$ , respectivamente, la energía cinética de la viga circular antes descrita está dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{c_{i-1}}^{c_i} \rho A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right] dx, \quad (1)$$

donde  $c_0 = 0, c_1 = c, c_2 = l$ , y  $\rho A$  denota la densidad de masa lineal considerada constante a lo largo de toda la viga.

Por otra parte, la energía de deformación de la viga está dada por

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 + EA \left( \frac{w}{\kappa} + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

donde el producto  $EI$  denota la rigidez a la flexión que es constante a lo largo de la viga de eje circular y  $\kappa$  denota el radio de curvatura del eje de la viga. En consecuencia, la energía potencial total debida a la deformación elástica de la viga y de las restricciones elásticas, a la carga transversal y a la deformación por la tensión axial está dada por

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 + EA \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{w}{\kappa} \right)^2 \right] dx + \sum_{i=1}^3 \left[ r_i \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_{i-1}^-, t) \right)^2 + s_i \left( u(c_{i-1}^-, t) \right)^2 + t_i \left( w(c_{i-1}^-, t) \right)^2 \right] + r_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c^-, t) \right)^2, \quad (3)$$

donde para facilitar los desarrollos analíticos se adopta  $c_0^- \equiv 0^+$ . Las notaciones  $0^+, l^-, c_i^+$  y  $c_i^-$  con  $i = 0, 1, 2$ , indican que se usan límites laterales y derivadas laterales. Las restricciones

$r_i, s_i$  y  $t_i$  con  $i = 1, 2, 3$ , están conectadas a un punto fijo, mientras que la restricción  $r_{12}$  indica que está conectada a ambos lados de la viga, en el punto intermedio ubicado en  $c$ . Esto se esquematiza en la [Figura 1](#).

El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener, al pasar de una configuración inicial dada en un instante  $t_a$  a otra dada en un instante  $t_b$ , la que realmente adopta el sistema es la que hace estacionario al funcional

$$F(u) = \int_{t_a}^{t_b} L dt, \text{ en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano } L \text{ es igual a}$$

$$L = E_c - U.$$

Por lo tanto, el funcional energético de acuerdo con (1) y (3) está dado por

$$F(u, w) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ \rho A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right] - EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. - EA \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{w}{\kappa} \right)^2 \right] dx - r_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c^-, t) \right)^2 \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^3 \left[ r_i \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_{i-1}^-, t) \right)^2 + s_i \left( u(c_{i-1}^-, t) \right)^2 + t_i \left( w(c_{i-1}^-, t) \right)^2 \right] \right\} dt. \quad (4)$$

Al aplicar las técnicas del Cálculo de Variaciones al Funcional (4) ([Grossi, 2010](#)) se obtienen las ecuaciones diferenciales, condiciones de contorno y transición del sistema mecánico estudiado, las cuales están dadas por

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) + EI \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) \right] + \frac{EA}{\kappa} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{\kappa} w(x, t) \right] = 0, \quad (5)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{EI}{\kappa} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] - EA \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right] = 0,$$

$$EI \left[ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right] + r_1 \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{EI}{\kappa} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) \right] - EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) + \frac{1}{\kappa} w(0^+, t) \right] + s_1 u(0^+, t) = 0, \quad (7)$$

$$EI \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0^+, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) \right] + t_1 w(0^+, t) = 0, \quad (8)$$

$$EI \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c^-, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right] - r_{12} \left[ \frac{\partial w}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right] = 0, \quad (9)$$

$$EI \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c^+, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(c^+, t) \right] - r_{12} \left[ \frac{\partial w}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right] = 0, \quad (10)$$

$$u(c^+, t) = u(c^-, t) = u(c, t), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{\kappa} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c^+, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c^-, t) \right] - \frac{EI}{\kappa^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right] \\ & - EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c^-, t) \right] - \frac{EA}{\kappa} [w(c^+, t) - w(c^-, t)] + s_2 u(c, t) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$w(c^+, t) = w(c^-, t) = w(c, t), \quad (13)$$

$$EI \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(c^+, t) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(c^-, t) \right] - \frac{EI}{\kappa} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c^+, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c^-, t) \right] + t_2 w(c, t) = 0, \quad (14)$$

$$EI \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) \right] + r_3 \frac{\partial w}{\partial x}(l^-, t) = 0, \quad (15)$$

$$EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) + \frac{1}{\kappa} w(l^-, t) \right] - \frac{EI}{\kappa} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) \right] + s_3 u(l^-, t) = 0, \quad (16)$$

$$-EI \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l^-, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l^-, t) \right] + t_3 w(l^-, t) = 0. \quad (17)$$

La presencia de los distintos coeficientes de rigidez permite generar distintas situaciones de apoyo, así por ejemplo, para considerar, que la viga no tiene ninguna restricción intermedia se debe adoptar  $r_2 = s_2 = t_2 = 0$  y  $r_{12} = \infty$ . Si se considera  $t_1 = t_3 = \infty$  y  $r_1 = r_3 = 0$ , se obtiene el caso de una viga curva simplemente apoyada en sus extremos.

### 3 EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Para realizar un análisis de vibraciones libres y determinar los modos normales de vibración del sistema mecánico, se deben determinar los valores de las frecuencias naturales para los cuales las ecuaciones diferenciales (5) tienen como solución no trivial la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U(x) \cos(\omega t), \\ w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W(x) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $U(x) = U_n(x)$ ,  $W(x) = W_n(x)$  son las formas modales del modo  $n$ -ésimo de vibración natural y  $\omega$  representa la frecuencia de oscilación de la viga en su estado libre por lo cual se denomina frecuencia natural. Luego, en virtud de la continuidad de la función coseno y de sus derivadas, la función dada por (18) es continua junto con sus derivadas de cualquier orden respecto de  $t$ .

Al reemplazar (18) en las ecuaciones diferenciales (5), suponiendo que no existe carga distribuida aplicada, se obtiene

$$\begin{aligned}
& -\rho A \omega^2 W(x) + EI \left[ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}(x) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x) \right] + \frac{EA}{\kappa} \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(x) + \frac{1}{\kappa} W(x) \right] = 0, \\
& -\rho A \omega^2 U(x) + \frac{EI}{\kappa} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(x) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) \right] - EA \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial W}{\partial x}(x) \right] = 0, \quad (19) \\
& \forall t > 0.
\end{aligned}$$

Si se aplica el cambio de variable  $\bar{x} = x/l$ , que para simplificar la notación se adopta  $\bar{x} = x$ , con  $x \in [0, 1]$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
& \Omega^2 W(x) - \left[ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}(x) - \frac{l}{\kappa} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x) \right] - \frac{Al^3}{\kappa I} \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(x) + \frac{l}{\kappa} W(x) \right] = 0, \\
& \Omega^2 U(x) - \frac{l}{\kappa} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(x) - \frac{l}{\kappa} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) \right] + \frac{Al^2}{I} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) + \frac{l}{\kappa} \frac{\partial W}{\partial x}(x) \right] = 0, \quad (20)
\end{aligned}$$

$\forall t > 0$ , donde  $\lambda$  denota al coeficiente de frecuencias  $\Omega^2 = \frac{\rho A}{EI} l^4 \omega^2$ .

#### 4 APLICACIÓN DEL MÉTODO VARIACIONAL DE RITZ EN COMBINACIÓN CON EL MÉTODO DE PENALIDAD

Dada la complejidad en la determinación de una solución exacta que resuelva las ecuaciones diferenciales (5) y dada la discontinuidad de las derivadas primera de  $u$  y  $w$  en la rótula intermedia, el problema de contorno (5) a (17) no admite una solución exacta válida en todo el dominio. Por lo tanto, se recurre a utilizar el método variacional de Ritz en combinación con el método de penalidad (Reddy, 1986; Rektorys, 1980).

Si se considera que  $u_i = u(\cdot, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i)$ , son las soluciones clásicas en cada tramo del

Teniendo en cuenta que las condiciones de transición que requieren la continuidad de la deflexión radial y tangencial en el punto donde se encuentra la rótula, se deben imponer las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
& u(c^-) = u(c^+) = u(c), \\
& w(c^-) = w(c^+) = w(c). \quad (21)
\end{aligned}$$

El método de penalidad requiere que sea estacionario el funcional aumentado (Luenberger, 1969)

$$F_\nu(u) = F(u) + \nu_1 [u(c^-) - u(c^+)] + \nu_2 [w(c^-) - w(c^+)], \quad (22)$$

donde  $\nu_i \in \mathbb{R}$  son los parámetros del método de penalidad.

Los desplazamientos radial y tangencial están representados por  $u(x) = u_i(x)$ ,  $\forall x \in (c_{i-1}, c_i)$ , con  $i = 1, 2$ , donde

$$\begin{aligned}
& u_i(x) = \sum_{j=1}^M a_{i,j} \varphi_{i,j}, \quad \forall x \in (c_{i-1}, c_i), \\
& w_i(x) = \sum_{j=1}^M b_{i,j} \varphi_{i,j}, \quad \forall x \in (c_{i-1}, c_i), \quad (23)
\end{aligned}$$

donde  $\{\varphi_{i,j}\}_{j=1}^M$ ,  $i = 1,2$  es una base de polinomios.

La aplicación del método de Ritz en combinación con el método de penalidad conduce a la ecuación de frecuencias:

$$[[K] - \lambda[M]] = 0, \tag{24}$$

### 5 RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIONES

Los valores numéricos del coeficiente de frecuencia  $\Omega$ , se obtienen según:

$$\Omega^2 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4. \tag{25}$$

En la [Tabla 1](#) se realiza un estudio de convergencia de los 10 primeros valores de  $\Omega$ , para una viga curva S-S esbelta para no tener en cuenta los efectos de deformación axial. La relación de esbeltez,  $RE = l/\sqrt{I/A}$ . En el caso de la [Tabla 1](#)  $RE > 10^7$ , que se obtiene con  $A = 10^6$ ,  $I = 10^{-3}$ ,  $\kappa = 10^3$  y  $\varphi = 20^\circ$ .

Modo	$M$							
	4	6	8	9	12	15	18	20
1	10.875	9.797	9.794	9.794	9.794	9.794	9.794	9.794
2	25.728	21.065	21.020	21.020	21.020	21.020	21.020	21.020
3	50.111	39.569	39.403	39.403	39.403	39.403	39.403	39.403
4	$3.63 \cdot 10^5$	65.474	60.658	60.565	60.557	60.557	60.557	60.557
5	$6.09 \cdot 10^5$	131.707	90.259	88.772	88.751	88.751	88.751	88.751
6	$9.44 \cdot 10^5$	194.367	123.675	120.596	119.798	119.797	119.797	119.797
7	$8.72 \cdot 10^6$	275.893	164.493	164.493	157.840	157.838	157.838	157.838
8	$1.74 \cdot 10^7$	$5.07 \cdot 10^5$	246.918	211.681	198.878	198.766	198.766	198.766
9	$2.61 \cdot 10^7$	$7.05 \cdot 10^5$	508.272	266.785	247.782	246.665	246.664	246.664
10	$3.58 \cdot 10^7$	$9.54 \cdot 10^5$	665.637	404.107	300.095	297.483	297.469	297.469

Tabla 1: Estudio de convergencia de los primeros 10 valores de  $\Omega$ , para una viga circular S-S esbelta.

Se resaltan los valores que se consideran con suficiente convergencia donde se observa que para obtener una buena precisión del primer modo es suficiente utilizar  $M = 8$ , pero para un valor preciso del coeficiente de frecuencias del modo 10, es necesario considerar  $M = 18$ .

$\varphi$		Modo 1, no simétrico		Modo 2, simétrico		
		Gutierrez y otros (1989)	Trabajo actual	Gutierrez y otros (1989)	Trabajo actual	
S-S	10		39.40	39.402	84.25	84.245
	20		39.18	39.176	84.09	84.080
	30		39.80	38.802	83.81	83.804
	40		38.29	38.288	83.43	83.420
E-E	10		61.59	61.593	110.94	110.939
	20		61.35	61.356	110.78	110.777
	30		60.96	60.965	110.51	110.507
	40		60.42	60.425	110.13	110.131

Tabla 2: Comparación de los primeros dos valores de  $\Omega$ , para una viga circular uniforme S-S y E-E esbelta con los presentados en [Gutierrez y otros \(1989\)](#).

En la [Tabla 2](#) se comparan los valores de  $\Omega$  del primer y segundo modo no simétrico y simétrico respectivamente con los obtenidos por [Gutiérrez y otros \(1989\)](#), para el caso de una viga curva simplemente apoyada y otra empotrada en ambos extremos para diferentes valores de  $\varphi$ , con  $RE > 10^7$ , que se obtiene con  $A = 10^6$ ,  $I = 10^{-3}$ ,  $\kappa = 10^3$ . Los resultados para  $M = 9$  muestran una excelente concordancia numérica.

En la [Tabla 3](#) se presentan comparaciones de los primeros seis valores de  $\Omega$  para una viga circular uniforme S-S, para diferentes valores de  $\varphi$ , con  $A = 10^6$ ,  $I = 10^{-3}$ ,  $\kappa = 10^3$  y  $M = 19$ . Los resultados se comparan con los presentados en [Yang y otros \(2008\)](#). Se observa una buena concordancia de los resultados obtenidos y se destaca que los resultados numéricos del presente trabajo en su mayoría son inferiores a los de la referencia donde utilizaron el método de los elementos finitos para obtener estos resultados.

Modo	$\varphi = 20^\circ$		$\varphi = 40^\circ$		$\varphi = 80^\circ$	
	Yang y otros (2008)	Trabajo actual	Yang y otros (2008)	Trabajo actual	Yang y otros (2008)	Trabajo actual
1	39.296	39.176	38.931	38.288	37.468	35.022
2	84.055	84.080	83.704	83.420	82.304	80.843
3	157.553	157.610	157.187	156.714	155.726	153.315
4	241.978	242.229	241.618	241.558	240.179	238.902
5	354.712	355.002	354.347	354.105	352.884	350.689
6	478.788	479.188	478.426	478.515	476.977	475.843

Tabla 3: Comparación de los primeros diez valores de  $\Omega$ , para una viga circular uniforme S-S esbelta con los presentados en [Yang y otros \(2008\)](#).

A continuación se presentan nuevos resultados de vigas curvas con la presencia de una rótula intermedia.

En la [Tabla 4](#) se presentan los primeros cuatro valores de  $\Omega$  para una viga circular uniforme E-S con una rótula libre intermedia, con  $\varphi = 70^\circ$ ,  $A = 10$ ,  $I = 10^{-1}$ ,  $\kappa = 1$ ,  $M = 15$  y  $c = 0.7$ .

En la [Tabla 5](#) se presentan los primeros seis valores de  $\Omega$  para una viga circular uniforme con una rótula elástica intermedia, con  $\varphi = 50^\circ$ ,  $A = 10$ ,  $I = 10^{-1}$ ,  $\kappa = 1$ ,  $M = 15$ ,  $c = 0.4$ ,  $s_i = t_i = 0.01$ ,  $r_i = 1$ , con  $i = 1, 2, 3$  y  $r_{12} = 1$ .

Secuencia modal	1				2				3				4			
	1				2				3				4			
$\Omega$	12.8020				33.3441				42.8614				76.3183			
$w$																
$u$																

Tabla 4: Primeros seis valores de  $\Omega$  y sus correspondientes valores de  $w$  y  $u$  para una viga circular uniforme E-S con una rótula libre intermedia ubicada en  $c = 0.7$ .

Secuencia modal	$\Omega$	$w$	$u$
1	44.7602		
2	58.9526		
3	66.4519		
4	90.4492		
5	118.8799		
6	130.1430		

Tabla 5: Primeros seis valores de  $\Omega$  y sus correspondientes valores de  $w$  y  $u$  para una viga circular uniforme con diferentes valores de las restricciones elásticas y una rótula elástica intermedia ubicada en  $c = 0.4$ .

## 6 CONCLUSIONES

Se obtuvieron las ecuaciones del problema de contorno, transición y las ecuaciones diferenciales de una viga circular homogénea con restricciones elásticas en los extremos y con una rótula elástica intermedia. El análisis se realizó teniendo en cuenta los desplazamientos tangenciales y radiales.

Se desarrolló un algoritmo para resolver el problema de vibraciones libres de la viga circular analizada.

Se presentaron diferentes valores del coeficiente de frecuencias y formas modales de vibración de vigas donde además algunos casos fueron comparados con los obtenidos por otros autores, y de esta manera demostrar la buena concordancia de los valores obtenidos con el modelo propuesto.

Se presentaron además nuevos resultados numéricos y de formas modales incluyendo la rótula intermedia con restricciones elásticas en los extremos y en el punto intermedio.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en la Facultad Regional Delta de la Universidad Tecnológica Nacional dentro del proyecto UTN 3487 y 4417.

## REFERENCIAS

- Auciello N. M. and De Rosa M. A., Free vibrations of circular arches: A review, *Journal of Sound and Vibration*, 176(4):433–458, 1994.
- Blevins, R. D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold, 1979.
- Grossi, R. O., *Cálculo de variaciones*. CIMNE, 2010.
- Grossi, R. O. and Quintana, M. V., The transition condition in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A., Rossi, R. E., Bertero, R. Villaggi, A., In-plane vibrations of non-circular arcs of non-uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 129(2):181-200, 1989.
- Henrych, J., *Dynamics of Arches and Frames*. Elsevier, 1981.
- Karami G. and Malekzadeh P., In-plane free vibration analysis of circular arches with varying

- cross-sections using differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, 274:777-799, 2004.
- Litewka P. and Rakowski J., Free vibrations of shear-flexible and compressible arches by FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:273–286, 2001.
- Luenberger D.G., *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- Öztürk H., Yesilyurt I. and Sabuncu M., In-plane stability analysis of non-uniform cross-sectioned curved beams, *Journal of Sound and Vibration*, 296:277–291, 2006.
- Reddy J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw Hill, New York, 1986.
- Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Reidel Co., 1980.
- Shahba A, Attarnejad R. and Eslaminia M., Derivation of an efficient non-prismatic thin curved beam element using basic displacement functions, *Shock and Vibration*, 19:187–204, 2012.
- Tong X., Mrad N. and Tabarrok B., In-plane vibration of circular arches with variable cross-sections, *Journal of Sound and Vibration*, 212(1):121–140, 1998.
- Yang F, Sedaghati R. and Esmailzadeh E., Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, 850–867, 2008.
- Yang F, Sedaghati R. and Esmailzadeh E., Free in-plane vibration of curved beam structures: A tutorial and the state of the art, *Journal of Vibration and Control*, 1–18, 2017.