

## MODELADO DE CONCENTRADORES DE TENSIÓN EN ÁRBOLES DE TRANSMISIÓN SOLICITADOS A FLEXIÓN Y TORSIÓN CON APLICACIÓN A REDUCTORES DE VELOCIDAD

### TRANSMISSION SHAFT'S STRESS CONCENTRATION MODELING WITH BENDING AND TORSIONAL STRESSES APPLIED TO SPEED REDUCERS

**Simó Valeria, Flamant Adrián, Amico Alfredo, Giner Cristian, Bello Carlos y Giudici Sergio**

*Grupo DIDEME (Grupo Diseño y Desarrollo de Máquinas y Equipos), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza. Rodríguez 273, Mendoza, Argentina. correo-e: valeria.simo@frm.utn.edu.ar; adrian.flamant@frm.utn.edu.ar; aamico@frm.utn.edu.ar; cristian.giner@docentes.frm.utn.edu.ar; cab@frm.utn.edu.ar; smgiudici@yahoo.com , <http://www.frm.utn.edu.ar>*

**Palabras clave:** Simulación numérica, flexo torsión, coeficiente Global de concentración de tensiones, modelado numérico.

**Resumen.** El diseño de reductores de velocidad tiene entre sus componentes más importantes los árboles de entrada y salida, donde hay sollicitación importante tanto de flexión como torsión. El diseño de estos componentes requiere la elección de una geometría que termina incluyendo entallas combinadas que actúan de concentradores de tensión. Este trabajo abordó el desarrollo de una simulación de efectos en un árbol de transmisión con sollicitaciones de flexo torsión cuando se utilizan anillos de fijación junto a un escalón y un chavetero. Esta geometría es bastante común y en los estudios de modelo clásico que se proponen no se encuentran los coeficientes de concentración de la bibliografía específica. El modelado y simulación se encaró en modo paramétrico con el código comercial ANSYS y se lograron obtener las influencias entre las entallas. Como propiedad emergente se buscó además trabajar las habilidades de modelación geométrica en docentes investigadores y becarios del Grupo DIDEME (Grupo Diseño y Desarrollo de Máquinas y Equipos). Los resultados permiten ampliar los criterios de diseño de estos componentes y han pasado a enriquecer el material de estudio a las asignaturas Elementos de Máquinas y Máquinas y Equipos industriales, siendo esta una transferencia esperada al encarar el estudio.

**Keywords:** Numerical simulation, bending and torsional stresses, global stress concentration factors, numerical modeling.

**Abstract.** Speed reducers shafts are under bending and torsional stresses. Their design requires a geometry with different notches combined which behave as a stress concentration area. The work presented in this report includes the simulation development on stress concentration effects in a transmission shaft under bending and torsional forces generated by these geometry changes. The consulted bibliography does not have the stress concentration factors for the notches combination. The obtained results have broaden the design criteria of these components and have enhanced the study material in some subjects.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la práctica de la ingeniería cuando se diseñan elementos de máquinas, la determinación de la forma de los componentes impone cambios de sección, lo que crea condiciones de solicitaciones variadas. En el caso de los árboles de mando, la combinación de los principales esfuerzos a que están sometidos, tales como flexión y torsión, generan en estas discontinuidades, propias del diseño, zonas donde los esfuerzos se incrementan de manera significativa en comparación a los de secciones contiguas. Se trabajó un árbol con un chavetero y una ranura para anillos de sujeción axial en el tramo de mayor sección cercana al cambio de sección (escalón).

La Resistencia de Materiales utiliza diversas estrategias, como métodos extensiométricos y de fotoelasticidad, para evaluar los coeficientes de magnificación de las tensiones en discontinuidades diversas, posibilitando el análisis de las condiciones de sollicitación al momento de dimensionar los componentes, esto además es un tema de estudio importante de la asignatura Elementos de Máquinas.

El método matemático para determinar las tensiones localizadas se sustenta en la teoría matemática de la elasticidad y en general requiere de ecuaciones diferenciales de difícil solución (Timoshenko, 1968). Cabe destacar que los modelos matemáticos suponen hipótesis simplificadoras tales como que la pieza es de un material homogéneo, isótropo y totalmente elástico, por lo que el valor de la tensión obtenida depende sólo de la forma geométrica.

Son muy usadas otras estrategias para resolver los casos donde se presentan discontinuidades, tales como los métodos experimentales para determinar el efecto de la concentración de tensiones, estos permiten validar los modelos matemáticos y definir las restricciones propias del uso de dichos modelos.

El objetivo principal de este trabajo fue modelar mediante los códigos bajo licencia del grupo DIDEME en el Software ANSYS ([http://myweb.ncku.edu.tw/~hhlee/Myweb\\_at\\_NCKU/ANSYS17.html](http://myweb.ncku.edu.tw/~hhlee/Myweb_at_NCKU/ANSYS17.html)), estudiando y aplicando diversos criterios de preparación de los sólidos geométricos, los criterios de discretización eficiente y los de procesos de simulación con sus modos de validación mediante los controles de sensibilidad de malla y criterios de distribución de elementos. Esto permitió comparar los resultados con los modelos clásicos usados en las asignaturas anteriormente mencionadas.

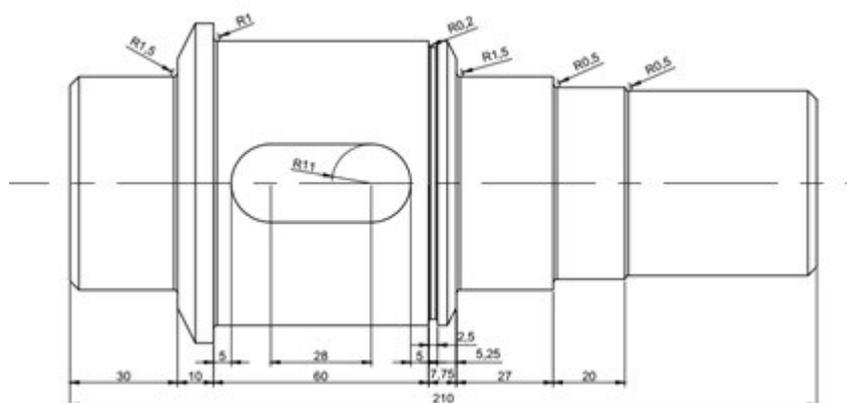


Figura 1: Vista lateral del árbol estudiado, donde se presentan las dimensiones.

El caso de estudio fue un modelo de árbol de salida de un reductor calculado para un proyecto final de la materia de Elementos de Máquinas, donde la potencia a transmitir es de 20 CV, las dimensiones del árbol diseñado en el desarrollo del trabajo práctico se detallan a continuación

(véase la Fig. 1).

## 2. MODELADO CLÁSICO DE ESCALÓN CON RANURA PARA ANILLO DE SUJECIÓN Y CHAVETERO EN CONJUNTO

El modelado clásico de la combinación de estas discontinuidades no está planteado en la bibliografía y esta configuración hace sospechar que no es válida la aplicación de estas descripciones simples, no está claro como los efectos se combinan e influyen unos en otros.

La sospecha de la influencia que tiene la entalla generada por la ranura sobre el cambio de sección es que según sea su distancia al cambio de sección puede incrementar el efecto que produce el escalón, también es válido sospechar la influencia del chavetero. Tampoco se encuentran análisis en la bibliografía existente donde se analice y presenten coeficientes de concentración de tensiones para el caso donde se estudie la variación de las distancias entre el escalón y el chavetero, solo el planteo de una distancia mínima.

Para estudiar el modo como se integran estos efectos se planteó parametrizar las distancias entre entallas, las dimensiones de los radios de acuerdo del anillo de sujeción normalizado en 0,2 mm y los radios de acuerdo en el fondo del chavetero en 0,5 mm. Las dimensiones del árbol son las del diseño del árbol de mando de salida de un proyecto de un reductor de velocidad de 20 CV de ejes paralelos y engranajes helicoidales.

El cálculo por el método clásico de la sección más solicitada, la cual corresponde al acuerdo contiguo a la ranura de anillo de sujeción, da un valor de tensión nominal de Von Mises de 47,32 MPa. Con éste valor se calculan los factores de concentración de tensiones al final.

## 3. MODELADO NUMÉRICO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Los métodos numéricos son técnicas que permiten solucionar problemas de campo descriptos por sistemas de ecuaciones diferenciales. Esos tipos de problemas se encuentran comúnmente en muchas disciplinas de la ingeniería.

El MEF (Método de Elementos Finitos) es una de las herramientas muy utilizada de estos métodos y tiene una aplicación de gran alcance para el análisis de ingeniería, permite encontrar soluciones a problemas complejos, donde aparece la imposibilidad práctica de encontrar una solución analítica a estos problemas. Frecuentemente los métodos numéricos en la práctica ingenieril se convierten en la única alternativa de cálculo.

Al momento de trabajar con MEF la metodología de trabajo incluye la construcción del modelo matemático, la construcción del modelo de elementos finitos, la solución del modelo de elementos finitos y el análisis de los resultados obtenidos.

Para crear el modelo matemático es necesario tener en cuenta que la geometría a utilizar se pueda discretizar en una malla correcta y con una cantidad abundante y suficiente de elementos. Esto debe asegurar que la geometría y su mallado proporcionen la solución correcta según las variables de interés. El CAD no siempre se simplifica por la necesidad de poder realizar el mallado, sino que se hace para que el análisis no utilice demasiados recursos y se obtengan resultados en menos tiempo.

El modelo del árbol estudiado (véase la Fig. 2) representa la combinación real de las discontinuidades que se planteó estudiar. Pero hace difícil discretizar la interacción por separado entre las mismas. Por esta razón se decidió simplificar este modelo para la interacción de los tres casos, chavetero, ranura de anillo de sujeción y cambio de sección.

La discretización se generó partiendo del modelo geométrico mediante elementos más pequeños en zonas donde se prevé una gran variación de las tensiones (guiado por los criterios

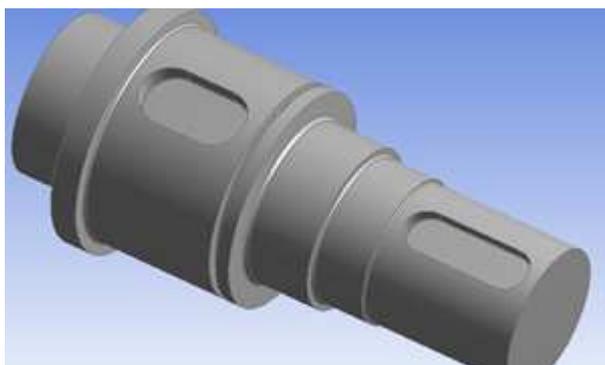


Figura 2: Vista lateral del árbol estudiado, donde se presentan las dimensiones.

del modelado clásico) a través del proceso de control de mallado. Las cargas y sujeciones se colocan después de este proceso. Su aplicación se realiza en los nodos de los elementos de la malla. El mallado obtenido se encuentra detallado a continuación (véase la Fig. 3).

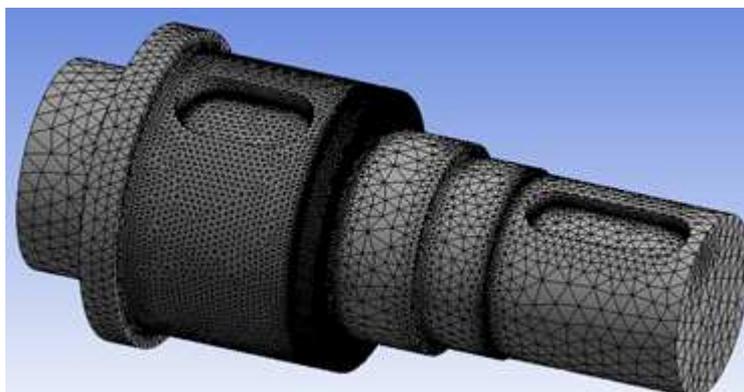


Figura 3: Solución de mallado con control y refinamiento en entallas.

Las cargas y sujeciones se presentan a continuación (véase la Fig. 4).

Una vez obtenido el modelo de elementos finitos, se procede a la solución del mismo mediante el solver que se encuentra programado dentro del software utilizado para el estudio.

Para este caso (véase la Fig. 5) mediante colores de variación continua, la distribución de tensiones en el componente. Al ser muy grande el sólido con discontinuidades que no son de interés en el estudio, no se puede observar con claridad la interacción de un escalón, una ranura para anillo de sujeción y un chavetero.

Para poder conocer estos resultados con más detalle y precisión, se hizo necesario aplicar un mallado más fino en las zonas de interés y simplificar el modelo en las zonas donde no se plantea el estudio, esto se hizo eliminando partes de la geometría que no son importantes o afectan a la concentración de tensiones. Se retiró el chavetero del tramo de menor diámetro y se retiró el escalón intermedio donde se monta un rodamiento.

Los resultados obtenidos del modelo geométrico completo no permiten observar con claridad la distribución de tensiones en las áreas de interés. Además, al aplicar controles de mallados en las discontinuidades, el modelo queda con una cantidad de elementos muy elevada, lo que realentiza el procesamiento del equipo. Por estas razones se decide realizar la simplificación geométrica.

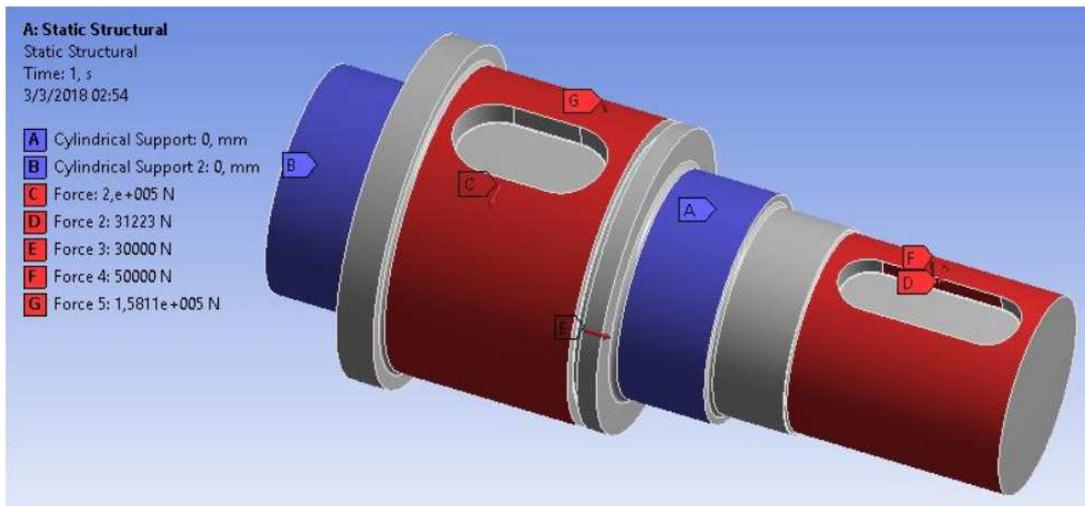


Figura 4: Cargas y sujeciones aplicadas al modelo matemático.

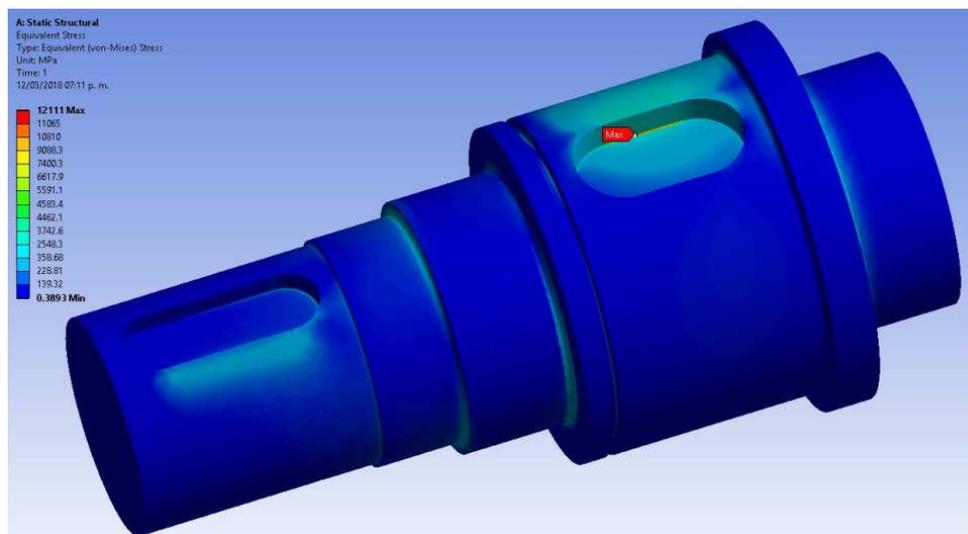


Figura 5: Distribución de las tensiones globales en el árbol de transmisión. Resultado de la simulación de MEF.

### 3.1. Modelo geométrico simplificado para el estudio de interacción de entallas chavetero, ranura para anillo de sujeción y cambio de sección.

El modelo matemático para este análisis se realizó de manera tal que se cumplieran las especificaciones geométricas requeridas y se limitara el número de elementos a un valor suficientemente elevado para obtener la precisión adecuada en los resultados y no sobre-utilizar los recursos informáticos que prolonga los tiempos de procesamiento.

La sujeción y las cargas se encuentran alejadas de la zona de estudio, esta es una estrategia que permite alejar la influencia de la introducción de errores producidos por las condiciones de contorno.

La geometría utilizada posee una relación de diámetros  $D/d$  de 1,33 (véase la Fig. 6). Para el estudio se tuvo en cuenta, por un lado, la incidencia del radio de acuerdo en el cambio de sección, por otro lado, la distancia de la ranura al escalón, la distancia del chavetero a la ranura, el radio de acuerdo del chavetero y, por último, el radio de acuerdo de la ranura. El modelo generado con las cargas y sujeciones aplicadas (véase la Fig. 7).

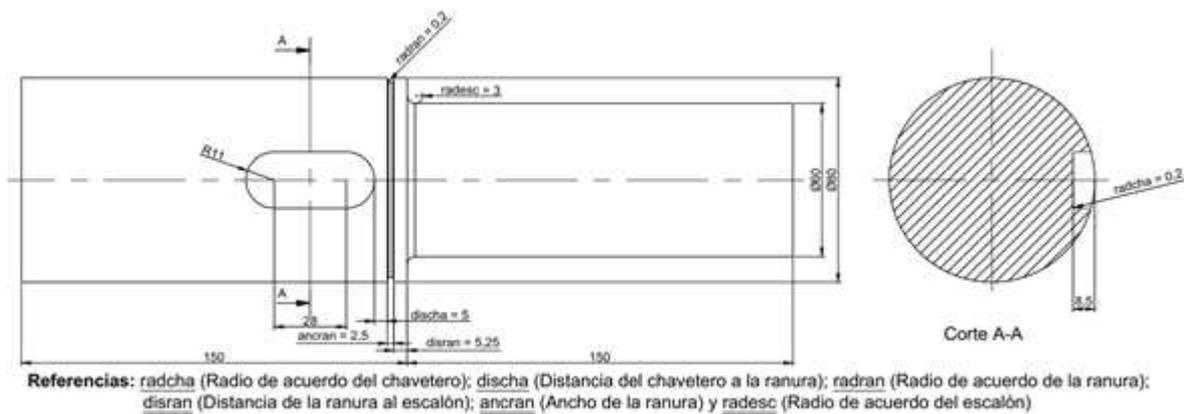


Figura 6: Dimensiones y variables del modelo simplificado.

La asignación del material del cual está hecho el sólido estaba determinada en el estudio original del diseño del componente y se seleccionó de la base de datos del software, un acero AISI 4340 laminado en caliente ( $E = 2,100,000 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\mu = 0,3$ ). Realizada la elección de las propiedades del material, se colocaron las cargas y la sujeción de la geometría.

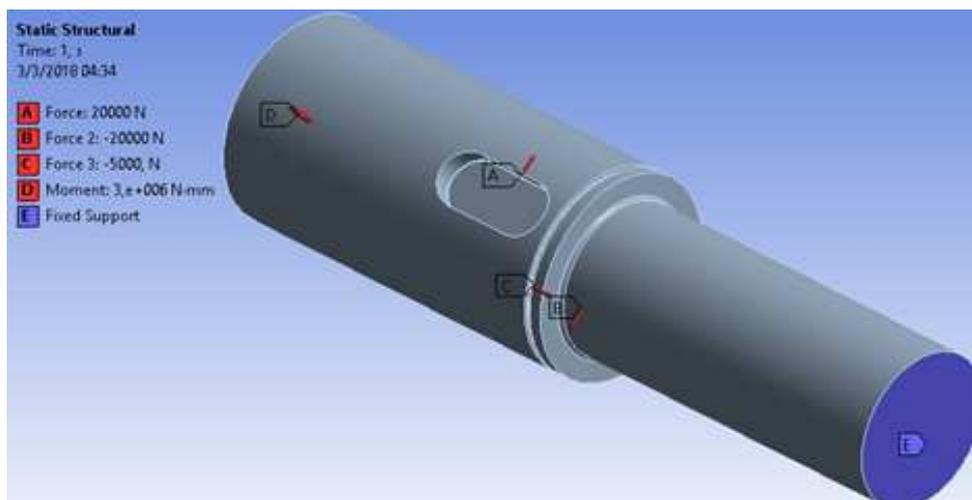


Figura 7: Cargas y sujeción aplicadas al sólido de ensayo, modelización en ANSYS 17.

### 3.2. Mallado

El mallado del modelo se inició aplicando una configuración general a todo el sólido, con elementos no muy pequeños. Luego, en las zonas de interés se realizó lo que se conoce como control de mallado. De este modo se reducen significativamente los errores producidos por la discretización.

Los elementos aplicados al mallado son tetraédricos sólidos de segundo orden. Esto se seleccionó debido a que la pieza tiene forma curva y este tipo de elemento se ajusta mejor a la geometría de la pieza en estudio. El mallado final contó con 5.620.737 nodos y 4.041.200 elementos.

Se aplicaron controles de mallado en las zonas del radio de acuerdo del escalón, del chavetero y en la zona intermedia de estas dos discontinuidades.(véase la Fig. 8).

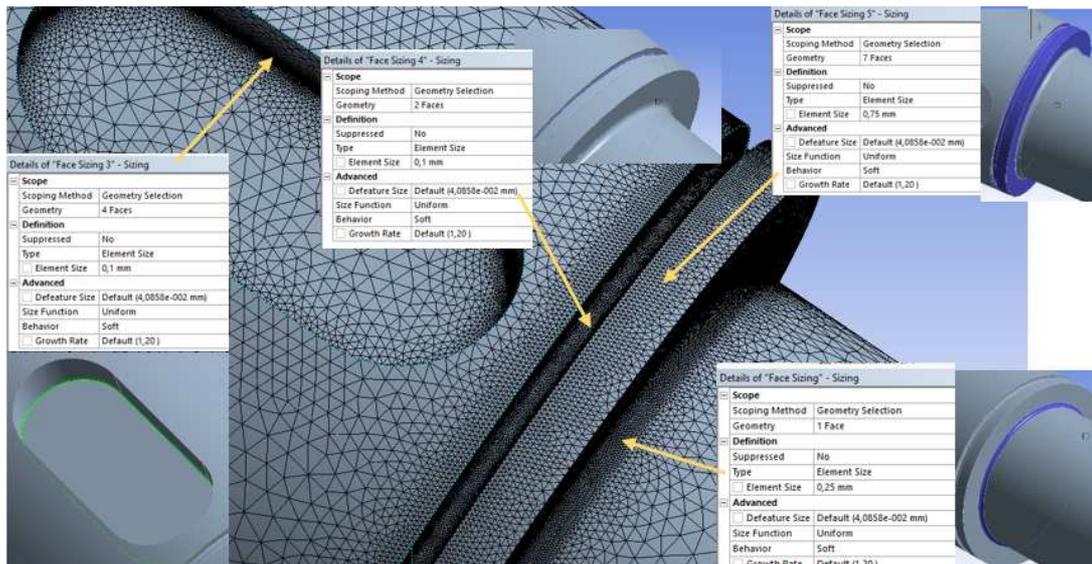


Figura 8: Detalle del mallado del sólido de ensayo, modelización en ANSYS 17.

### 3.3. Resultados

Los resultados del estudio se grafican mediante la estrategia de superficies y líneas de isotensión que permiten observar la distribución de las tensiones en el sólido y la ubicación de las tensiones máximas en las zonas de interés.

Se observa que el lugar de máxima sollicitación es el radio de acuerdo del chavetero. El momento torsor es transferido al árbol a través de la chaveta a la superficie del chavetero en cuyo borde se encuentran grandes tensiones de corte.

A continuación se observan las líneas y superficies de isotensión donde puede identificarse la zona de mayor sollicitación sobre el acuerdo del chavetero (véase Fig. 9 y Fig. 10).

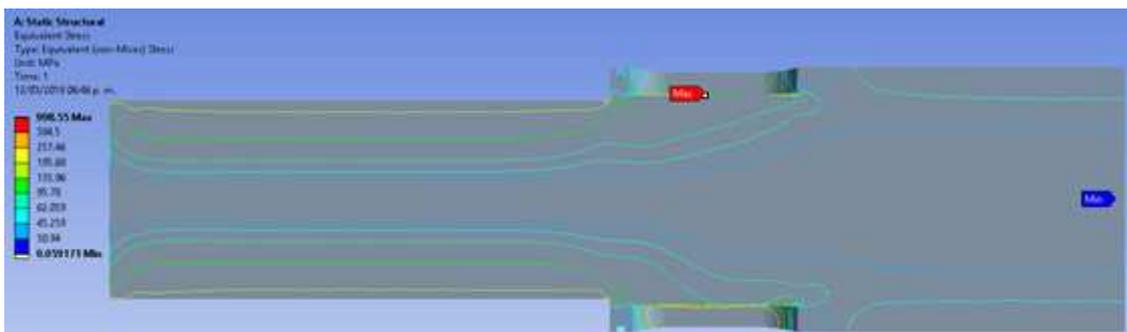


Figura 9: Distribución de tensiones, utilizando cortes y líneas de isotensión.

## 4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el diseño de árboles de transmisión mediante el modelado clásico se utilizan coeficientes de concentración obtenidos mediante métodos experimentales, fotoelasticidad principalmente. Estos coeficientes se encuentran en distintas bibliografías. Estos factores han sido obtenidos en ensayos de flexión y torsión por separado, y no para sollicitaciones de flexo-torsión.

Los valores de coeficientes expuestos en la bibliografía existente están determinados para discontinuidades específicas. Por su proceso de determinación, no contemplan la combinación

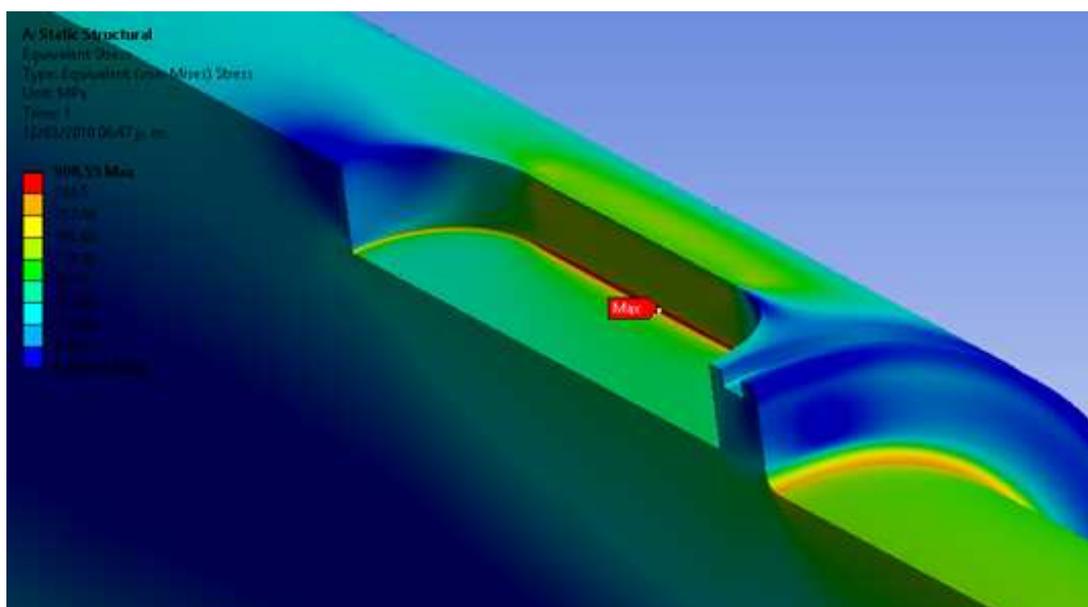


Figura 10: Distribución de tensiones, utilizando cortes y líneas de isotensión.

de dos o más discontinuidades cercanas, no existiendo la evaluación de efectos combinados.

#### 4.1. Resultados obtenidos por el método numérico

Los resultados arrojados por éste método muestran que:

Al variar la distancia de la ranura al escalón, el coeficiente de concentración de tensiones en el escalón presenta una leve pendiente negativa, o sea disminuye cuando la ranura se aleja del escalón, (varía desde 2,5 a 2,25). En la ranura, el coeficiente aumenta acorde aumenta la distancia (varía desde 1,9 a 2,8). En el chavetero, el coeficiente se mantiene constante en todos sus radios de acuerdo. Presenta una diferencia en cuanto a la concentración de tensiones con el acuerdo correspondiente a la cara de transmisión del esfuerzo (para esta cara vale 7,6 aproximadamente y para el resto 4).

Si se varía el acuerdo del escalón, el coeficiente en el escalón disminuye a medida que su radio de acuerdo aumenta, (varía desde 3,8 para un radesc (radio de acuerdo del escalón) de 0,5 mm a 2,5 para un radesc de 1,4 mm). En la ranura, su valor se mantiene casi constante, manteniéndose en 2,2 aproximadamente. En el chavetero, ocurre lo mismo, vale 7,4 para el acuerdo correspondiente a la cara de transmisión del esfuerzo y 4 para el resto de los acuerdos.

#### 4.2. Comparación de resultados con el método clásico

Variación de la distancia entre la ranura y el escalón (véase Fig. 11). En el escalón, los valores del coeficiente de concentración de tensiones no son elevados y se mantienen constantes al variar esta distancia. La curva correspondiente con flexión pura está más arriba que la perteneciente a la flexo-torsión. Mientras que la de torsión pura está aún más debajo de la última.

En la ranura, la curva que corresponde con la flexo-torsión presenta una pendiente positiva y se encuentra por debajo de la curva correspondiente a la torsión pura. Además, por encima de estas dos curvas se encuentra la de flexión pura.

En el chavetero, la curva correspondiente a la flexo-torsión, en los acuerdos de las puntas del mismo, coincide con la curva de flexión pura. Para la sollicitación de torsión pura, la curva, se encuentra apenas por encima de éstas dos. Por encima de todas las curvas anteriores está la

curva de flexo-torsión para el acuerdo correspondiente con la cara en la que se transmiten los esfuerzos al árbol.

Al juntar todas las curvas en un único gráfico se puede observar que la curva perteneciente a la flexo-torsión, en la cara lateral del chavetero, es la que provee valores del coeficiente de concentración de tensiones mayores. Se deduce de aquí que cuando un árbol, en su diseño presente estas tres entallas juntas, se vuelve necesario utilizar los valores dados por ésta curva.

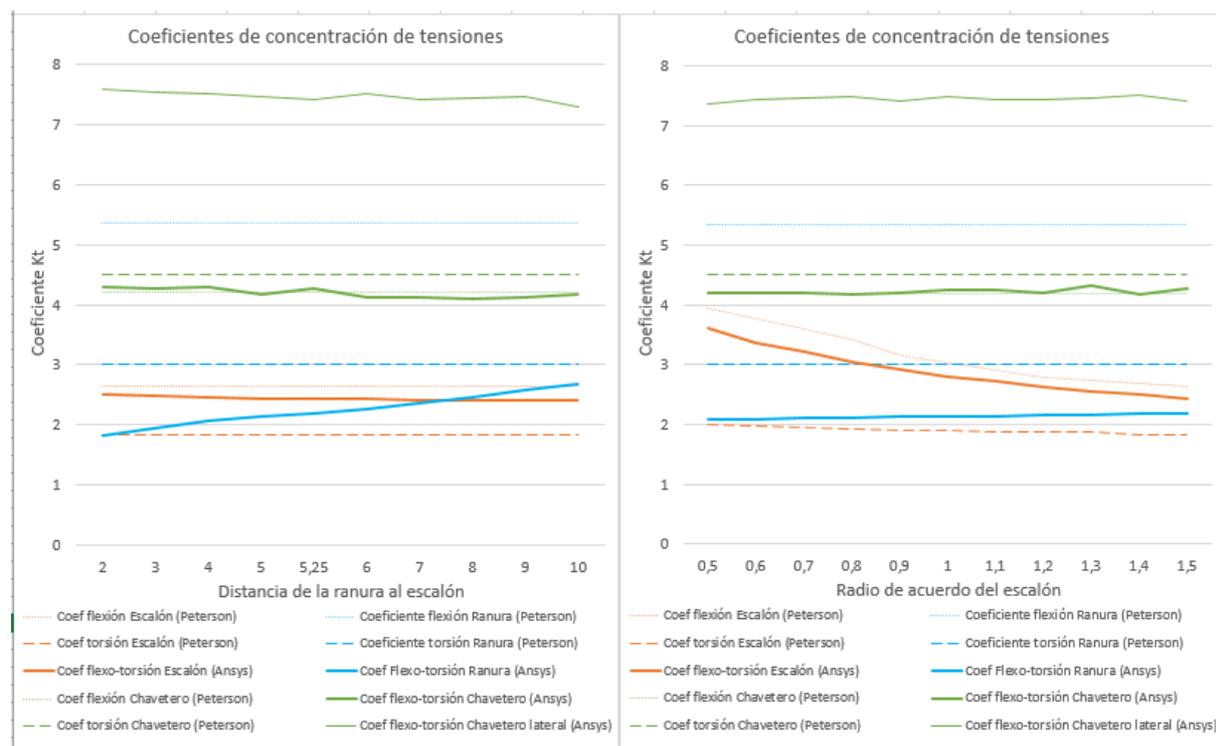


Figura 11: Variación del coeficiente de concentración de tensiones para ranura y escalón sometidos a flexión y torsión pura y flexo-torsión. (Comparación).

Variación del radio de acuerdo del escalón (véase Fig. 11). En el escalón, la curva correspondiente a la sollicitación de flexión pura da valores mayores que la correspondiente a la flexo-torsión. Ambas presentan una pendiente negativa a medida que el radio de acuerdo del escalón aumenta. Mientras que la de torsión pura está por debajo de las dos con una pendiente negativa mucho menor.

En la ranura, la curva que corresponde con la flexo-torsión presenta una leve pendiente positiva y se encuentra por debajo de la curva correspondiente a la torsión pura. Por encima de estas dos curvas se encuentra la de flexión pura.

En el chavetero, la curva correspondiente a la flexo-torsión, en los acuerdos de las puntas del chavetero, coincide con la curva de flexión pura. La curva de torsión pura se encuentra apenas por encima de éstas dos. Por encima de todas las anteriores, está la perteneciente a flexo-torsión para el acuerdo lateral del chavetero.

El criterio emergente aquí plantea utilizar el valor dado por la curva de flexo-torsión del acuerdo lateral del chavetero.

Los coeficientes presentados en la (Fig. 11) se definen como  $K_t = \sigma_M / \sigma_n$ , en donde  $\sigma_M$  es la tensión máxima de Von Mises (valor obtenido mediante el software de simulación) y  $\sigma_n$  es la tensión nominal de Von Mises (valor obtenido mediante el cálculo clásico). (Gere, 2009;

Pilkey, 2008)

## 5. CONCLUSIONES

El modelado clásico permite evaluar los efectos de las entallas en forma separada y con solicitaciones de flexión y torsión pura, pero no tiene en cuenta la combinación de éstas bajo la combinación de flexo-torsión.

La norma de los anillos de sujeción para ejes (DIN 471), define distancias mínimas hasta el escalón para el tallado de las ranuras correspondientes, estos valores garantizan la resistencia del borde frente a la resistencia del anillo. Lo que no se muestra es la distancia máxima que se pueda dejar. La simulación mostró que, si se mantiene el valor aconsejado de distancia, ésta no entra en la zona de concentración de tensiones que introduce el escalón. Lo que valoriza el criterio dado por los fabricantes de los anillos de sujeción, donde sugieren que se coloque en la zona cercana al escalón.

En la combinación de las entallas consideradas, cada caso presenta un área diferente en donde se produce la mayor concentración de tensiones. Para el caso del escalón, ranura y chavetero, se encuentra en el acuerdo del chavetero. Esto hace determinante evaluar con cuidado la resolución de los acuerdos cuando se diseñan componentes como el del caso estudiado.

El diseño estudiado aparece todos los años en los proyectos de reductor de velocidades que se desarrolla como trabajo práctico integrador de la asignatura Elementos de Máquinas, por lo que el resultado de este estudio permite identificar criterios válidos para el diseño y su utilización en la asignatura.

Este caso sencillo demostró ser un caso muy completo como ejemplo de aplicación para trabajar los criterios de modelación clásica y modelado numérico. También es un caso de aplicación para la capacitación de becarios y transferencia a las cátedras del área de la mecánica del sólido de la carrera de Ingeniería Electromecánica.

La utilización de MEF permite desarrollar modelos que describen en forma eficiente las solicitaciones producidas por entallas y dan resultados comparables a los obtenidos por métodos clásicos en las entallas simples, además permiten evaluar casos de combinación de entallas y cuando aparecen geometrías complejas en los componentes. (Herrerias, 2013; Bello, 2013)

## REFERENCIAS

- Bello C. y Cuadrado G. Estrategias a la introducción a la construcción de modelos matemáticos. *Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería*, 2013.
- Gere J. y Goodno B. *Mecánica de materiales*, volumen VII. Cengage Learning Editores, S.A., 2009.
- Herrerias A. y Cuadrado G. Validación de un modelo matemático para los factores de concentración de esfuerzo en árboles escalonados sometidos a torsión. *Enseñanza de ciencia empírica en carreras de ingeniería (UTN - Facultad Regional Mendoza)*, 2013.
- Pilkey W. y Pilkey D. *Peterson's Stress Concentration Factors*, volumen III. John Wiley AND Sons, Inc., 2008.
- Timoshenko S. y Goodier J.N. *Teoría de la elasticidad*, volumen II. Grijelmo S.A., 1968.