

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN COJINETES HIDRODINÁMICOS STABILITY ANALYSIS IN HYDRODYNAMIC JOURNAL BEARINGS

Claudio E. Merelli^{a,b,c}, Daniel O. Barilá^b, Gustavo G. Vignolo^{a,b,c} y Lidia M. Quinzani^c

^a*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, cemerelli@plapiqui.edu.ar*

^b*Laboratorio de Mecánica de Fluidos, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia S.J.B., Ruta Prov. N°1 Km 4, Comodoro Rivadavia, Argentina, lmf@ing.unp.edu.ar, <http://www.ing.unp.edu.ar/mecanica>*

^c*Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), Dpto. de Ing. Química, Universidad Nacional del Sur - CONICET, Camino la Carrindanga Km 7, Bahía Blanca, Argentina, gvignolo@plapiqui.edu.ar, lquinzani@plapiqui.edu.ar, <http://www.plapiqui.edu.ar>*

Palabras clave: Cojinetes hidrodinámicos, Análisis de estabilidad, Ecuación de Reynolds, Coeficientes dinámicos.

Resumen. Los cojinetes hidrodinámicos (CH) son elementos extensamente utilizados como apoyos de ejes en máquinas rotativas. Ellos están compuestos por un eje cilíndrico con capacidad de rotar, un cojinete estático que lo contiene y un fluido lubricante que fluye entre ambos. En ciertas condiciones de carga-velocidad los CH sufren inestabilidades auto-excitadas que pueden conducir a fallas catastróficas. Es por ello que es importante comprender la interacción dinámica entre el rotor y sus apoyos. El estudio dinámico de CH se realiza modelando el comportamiento de la película lubricante como un conjunto de resortes no lineales y amortiguadores. Análisis que demanda la incorporación de nuevos términos en la Ecuación de Reynolds (ER). El propósito de este trabajo es estudiar la estabilidad de cojinetes de longitud finita, evaluando los coeficientes dinámicos mediante métodos numéricos y diferentes aproximaciones analíticas. La ER se resuelve para flujo reptante, isotérmico e incompresible.

Keywords: Hydrodynamic journal bearings, Stability analysis, Reynolds equation, Dynamic coefficients.

Abstract. Hydrodynamic journal bearings (CH) are elements widely used as shaft bearings in rotating machines. They are composed of a rotating cylindrical shaft, a static bearing and a lubricant fluid between them. Under certain load-speed conditions, the CH suffer from self-excited instabilities that can lead to catastrophic failures. Thus, it is important to comprehend the dynamic interaction between the rotor and its supports. The dynamic study of CH can be performed modeling the behavior of the lubricating film as a set of non-linear springs and viscous dampers. This analysis requires the incorporation of new terms in the Reynolds Equation (ER). The purpose of this work is to study the stability of finite length journal bearings, evaluating the dynamic coefficients using different analytical and numerical methods. The ER is solved for laminar, isothermal and incompressible flow.

1 INTRODUCCIÓN

El funcionamiento de la maquinaria industrial depende en gran medida del desempeño de los apoyos de sus partes móviles, siendo los cojinetes hidrodinámicos (CH) una de las tecnologías más empleadas por su fácil fabricación, gran versatilidad ante cargas elevadas e impactos, extensa vida útil y relativos bajo costo y tamaño. Son parte fundamental de un sinnúmero de equipos, de las más diversas aplicaciones y potencias.

Los elementos de máquinas conocidos como cojinetes o CH, están compuestos por un eje cilíndrico con capacidad de rotar (muñón), un cascarón estático que lo contiene (cojinete) y un fluido lubricante que se ubica entre ambos. La lubricación hidrodinámica se describe mediante la aplicación de los balances de masa, energía y momento sobre la delgada película de fluido que existe entre el muñón y el cojinete. En el caso particular de un fluido newtoniano y laminar, incompresible e isotérmico, las ecuaciones de masa y momento pueden simplificarse y luego integrarse en el espesor de la película. Esto da como resultado una ecuación diferencial en derivadas parciales de la presión conocida en el ámbito de la lubricación como ER (Pinkus, 1961; Hamrock y Schmid, 2004; Szeri, 2010).

La ER, a pesar de su aparente sencillez, aún no ha sido resuelta de manera analítica. Por ello se utilizan soluciones aproximadas que se obtienen luego de su adimensionalización, de donde surgen dos parámetros que gobiernan el comportamiento de los CH: la relación de aspecto (L/D) y la excentricidad relativa ($0 < \eta < 1$). Las soluciones aproximadas más conocidas surgen de igualar L/D a valores límites. Cuando L/D tiende a cero se obtiene la solución para cojinetes infinitamente cortos o ISJB (por sus siglas en inglés) y cuando tiene valores muy grandes se llega a la solución de cojinetes infinitamente largos o ILJB (Dubois y Ocvirk, 1953; Sommerfeld, 1904).

Asimismo, existen varios intentos en la literatura para obtener soluciones analíticas de la ER para cojinetes de longitud finita que se basan en distintos fundamentos o aproximaciones matemáticas (Vignolo et al., 2011; Sfyris y Chasalevris, 2012; Reason y Narang, 1982).

Por otro lado, las características dinámicas de un cojinete, además de las estáticas, son fundamentales para la correcta comprensión del comportamiento de las máquinas que los utilizan. De hecho, la demanda actual de alta potencia, conlleva a un aumento de la velocidad de rotación, con el consecuente aumento de problemas de inestabilidad en los rotores soportados en CH (Tieu y Qiu, 1995). Por ejemplo, la rigidez equivalente (San Andrés, 2010) de la película fluida afecta la velocidad crítica y la estabilidad del rotor, lo que resulta de gran importancia sobre todo en aplicaciones en las que su uso pretende amortiguar impactos y disipar efectos desestabilizadores. En este sentido, es importante contar con métodos eficientes para calcular las características dinámicas de un cojinete (Lund, 1965). Estas se obtienen, por ejemplo, de perturbar la ER, obteniéndose coeficientes basados en las mismas suposiciones matemáticas que la solución del caso estático equivalente (Rao et al., 2000; Chasalevris y Sfyris, 2013; Merelli et al., 2018).

El propósito de este trabajo es el estudio de la estabilidad de ejes rígidos apoyados en CH haciendo uso de distintos métodos de cálculo, analíticos y numéricos, para la obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento.

2 MODELO DEL SISTEMA

El sistema en estudio consiste en un eje rígido de masa $2M$ apoyado en sus extremos en CH (Figura 1). Sobre el eje actúan, en su centro de masa, una fuerza estática ($2w$) y una fuerza dinámica con componentes $2fx$ y $2fy$. Ante esta situación, las ecuaciones de movimiento para cada CH resultan:

$$\begin{aligned} \sum F_X &= M \ddot{X} = W_X + f_X - K_{XX}\Delta X - K_{XY}\Delta Y - C_{XX}\Delta \dot{X} - C_{XY}\Delta \dot{Y} \\ \sum F_Y &= M \ddot{Y} = W_Y + f_Y - K_{YX}\Delta X - K_{YY}\Delta Y - C_{YX}\Delta \dot{X} - C_{YY}\Delta \dot{Y} \end{aligned} \quad (1)$$

donde F_X y F_Y son las componentes de la fuerza F resultante del campo de presión generado en el fluido (que soporta la carga W); (X, Y) es el sistema de coordenadas cartesiano estático de referencia; \dot{X} , \dot{Y} , \ddot{X} e \ddot{Y} las velocidades y aceleraciones del rotor en las respectivas direcciones; y K_{ij} y C_{ij} los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento, respectivamente, del CH. La Figura 2 esquematiza estos coeficientes modelando el comportamiento del fluido lubricante que fluye por el huelgo mediante resortes y amortiguadores no lineales. Los valores de los coeficientes se determinan a partir de la resolución de la ER modificada, como se explica más adelante, en la Sección 3.2.

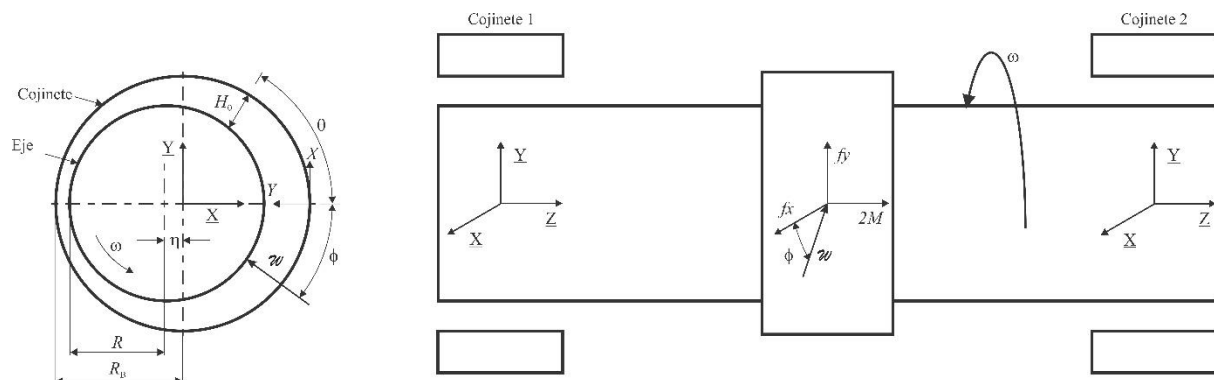


Figura 1: Sistema eje rígido cojinete.

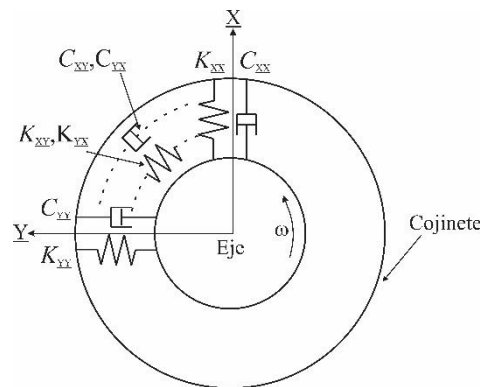


Figura 2: Representación esquemática de los coeficientes dinámicos mediante un modelo mecánico de resortes y amortiguadores.

3 CÁLCULO DE COEFICIENTES DINÁMICOS

3.1 Ecuación de Reynolds adimensional

Cada CH consiste en un eje de radio R y longitud L que gira a una velocidad angular ω dentro de un cojinete estático de radio R_B (ver Figuras 1 y 3). El fluido lubricante llena el espacio entre ellos. La acción de una carga W desplaza el rotor una distancia e (excentricidad) respecto del centro del cojinete, generando una película de altura variable, $H(\theta)$. La Figura 3 también contiene la representación del CH en coordenadas cartesianas, lo cual resulta válido

dado que los tamaños de rotor y cojinete permiten considerar que $(R_B - R)$ es mucho menor que R .

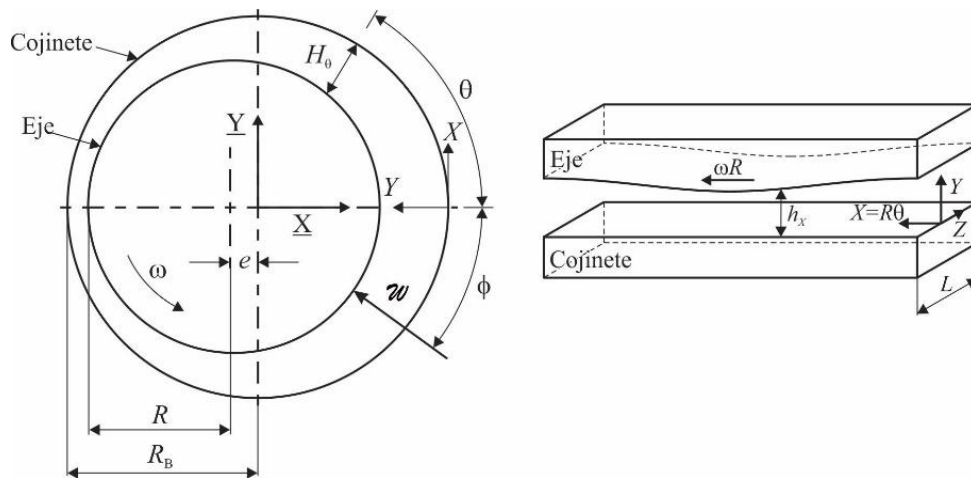


Figura 3: Geometría y sistema de coordenadas.

Considerando, además, que el flujo es laminar, isotérmico e incompresible, la ER adimensional resulta:

$$Ocv \left(\frac{dh}{dt} + \frac{1}{2\pi} \frac{dh}{d\Theta} \right) = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{12} h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2)$$

donde se utilizan las siguientes variables adimensionales:

$$\Theta = \frac{X}{\pi R} ; y = \frac{Y}{c_R} ; z = \frac{Z}{L} ; u = \frac{V_\Theta}{U} ; v = \frac{V_y}{V} ; w = \frac{V_z}{W} ; \quad (3)$$

$$p = \frac{P - P_{EXT}}{P_p} ; h = \frac{H}{c_R} = 1 + \frac{e}{c_R} \cos(\theta) = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$$

Tradicionalmente el comportamiento de los CH se relaciona con el número de Sommerfeld S , o su equivalente, el número de Ocvirk, Ocv . En este trabajo se emplea:

$$Ocv = S \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{\mu U}{R P_p} \left(\frac{R}{c_R} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \quad (4)$$

donde P_p es la presión media, correspondiente a la magnitud de la fuerza actuante en el rotor dividida por su área proyectada, es decir,

$$P_p = \frac{F}{2RL} \quad (5)$$

3.2 Modificación e integración de la Ecuación de Reynolds

Una vibración o un pequeño cambio en la magnitud de la fuerza producirá un pequeño desplazamiento del rotor con el consecuente cambio en el campo de presión, el cual se puede calcular como una presión dinámica que se adiciona a la presión estática. La Figura 4 presenta el sistema de coordenadas y la notación asociada al desplazamiento del centro del eje en forma adimensional. Este centro vibra con amplitudes $\Delta\eta(t) = \Delta e(t)/c_R$ y $\eta_e \Delta\psi(t) = e_c \Delta\phi(t)/2\pi c_R$

alrededor de la posición de equilibrio $\{\eta_e, \psi_e\}$. En consecuencia, el espesor de la película lubricante cambia en el tiempo, $h(\Theta, t)$, oscilando alrededor de la posición estática (de ahora en adelante identificada como $h_e(\Theta)$). El espesor de la película lubricante se puede expresar como la suma del término estático y uno dinámico variable en el tiempo, que corrige la posición estática, $h_d(\Theta, t)$. Es decir:

$$h(\Theta, t) = h_e(\Theta) + h_d(\Theta, t)$$

$$\text{con } \begin{cases} h_e(\Theta) = 1 + \eta_e \cos(\pi\Theta) \\ h_d(\Theta, t) = \Delta\eta(t) \cos(\pi\Theta) + \eta_e \Delta\psi(t) \sin(\pi\Theta) \end{cases} \quad (6)$$

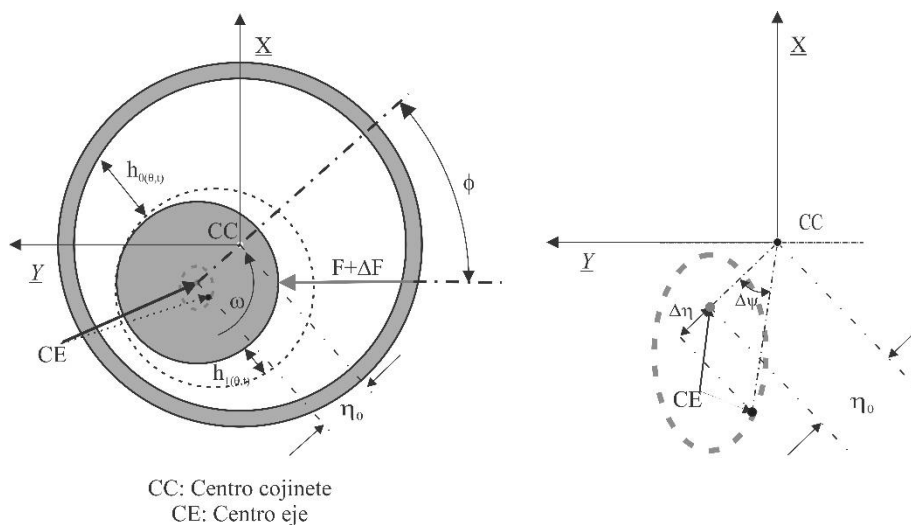


Figura 4: Posiciones que asume el eje al ser desplazado de su posición estática.

Debido a que la magnitud de las fluctuaciones alrededor de las distintas posiciones de equilibrio que asume el eje en el cojinete son pequeñas, la aproximación por series de Taylor a primer orden de la fuerza es aceptable:

$$F_i = F_{ie} + \left. \frac{dF_i}{dX} \right|_e \Delta X + \left. \frac{dF_i}{dY} \right|_e \Delta Y + \left. \frac{dF_i}{d\dot{X}} \right|_e \Delta \dot{X} + \left. \frac{dF_i}{d\dot{Y}} \right|_e \Delta \dot{Y} + \left. \frac{dF_i}{d\ddot{X}} \right|_e \Delta \ddot{X} + \left. \frac{dF_i}{d\ddot{Y}} \right|_e \Delta \ddot{Y} \quad \text{con } i = X, Y \quad (7)$$

A partir de estas ecuaciones, los coeficientes de rigidez, amortiguación e inercia lineales se definen (Lund, 1965; Merelli et al., 2018; Qiu, 1995), respectivamente, como:

$$K_{ij} = - \left. \frac{dF_i}{dj} \right|_e \quad C_{ij} = - \left. \frac{dF_i}{d\left(\frac{dj}{dt}\right)} \right|_e \quad M_{ij} = - \left. \frac{dF_i}{d\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dj}{dt}\right)\right)} \right|_e \quad \text{con } \begin{cases} i = X, Y \\ j = X, Y \end{cases} \quad (8)$$

Asimismo, las contribuciones dinámicas de la presión se pueden expresar como:

$$p = p_e + \Delta p = p_e + p_\Theta + p_y + p_\Theta + p_{\dot{y}} \quad (9)$$

por lo que, al reemplazar la Ec. (9) y (6) en la ecuación (2), operando arduamente para retener únicamente los términos de orden uno, se obtienen cinco ecuaciones diferenciales para poder determinar cada una de las presiones de la ecuación (9) que al resolverlas e integrarlas en la superficie del eje permiten calcular los 8 coeficientes dinámicos (Lund, 1965) (por no

considerarse los coeficientes de inercia M_{ij} ya que solo afectan a casos de excitaciones de alta frecuencia, las que no se contemplan en este trabajo).

$$\frac{1}{6} \pi h_e^3 \frac{\partial^2 p_e}{\partial z^2} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(h_e^3 \frac{\partial p_e}{\partial \Theta} \right) = O h_e^3 \frac{dh_e}{d\Theta} \quad (10)$$

$$\frac{1}{6} \pi h_e^3 \frac{\partial^2 p_y}{\partial z^2} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(h_e^3 \frac{\partial p_y}{\partial \Theta} \right) = (\alpha_1 \sin(\pi\Theta) - \alpha_2 \cos(\pi\Theta)) \Delta \eta \quad (11)$$

$$\frac{1}{6} \pi h_e^3 \frac{\partial^2 p_\Theta}{\partial z^2} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(h_e^3 \frac{\partial p_\Theta}{\partial \Theta} \right) = (\alpha_1 \cos(\pi\Theta) - \alpha_2 \sin(\pi\Theta)) \eta_e \Delta \psi \quad (12)$$

$$\frac{1}{6} \pi h_e^3 \frac{\partial^2 p_y}{\partial z^2} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(h_e^3 \frac{\partial p_y}{\partial \Theta} \right) = 2O\pi \cos(\pi\Theta) \Delta \dot{\eta} \quad (13)$$

$$\frac{1}{6} \pi h_e^3 \frac{\partial^2 p_\Theta}{\partial z^2} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(h_e^3 \frac{\partial p_\Theta}{\partial \Theta} \right) = 2O\pi \sin(\pi\Theta) \eta_e \Delta \dot{\psi} \quad (14)$$

donde

$$\alpha_1 = O\pi + 2h_e^2 \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial p_e}{\partial \Theta} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = -\frac{3O}{h_e} \frac{dh_e}{d\Theta} + \frac{2}{\pi} h_e \left(\frac{L}{D} \right)^2 \frac{\partial p_e}{\partial \Theta} \frac{dh_e}{d\Theta} \quad (15)$$

Las Ecs. (10-15) se pueden resolver usando métodos numéricos o analíticos (aproximados). En este trabajo, se utiliza el método de la perturbación regular, de ahora en más *P&O-pert*, y el de *ISJB* para la obtención de soluciones analíticas de los coeficientes dinámicos, y el método de diferencias finitas, de ahora en más *Númérica*, para contar con una solución próxima a la exacta que sirva como base de comparación. El *P&O-pert* fue implementado por este grupo en el pasado mejorando notablemente el alcance de la solución de *ISJB* para cojinetes estáticos de longitud finita (Vignolo et al., 2011).

La metodología empleada permite obtener coeficientes dinámicos adimensionales referidos a un sistema de ejes móvil ($\Theta; y$), el cual facilita el trabajo matemático previo. Una vez obtenidos los coeficientes es factible referirlos al sistema fijo ($\underline{X}; \underline{Y}$) mediante la siguiente matriz de transformación.

$$\begin{pmatrix} L_{XX} & L_{XY} \\ L_{YX} & L_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{\Theta\Theta} & L_{\Theta y} \\ L_{y\Theta} & L_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (16)$$

dónde L , representa los coeficientes adimensionales k o c . Asimismo, recuperar los coeficientes con dimensiones mediante:

$$K_{ij} = \frac{\pi F}{2c_R} k_{ij} \quad C_{ij} = \frac{\pi R F}{2U c_R} c_{ij} \quad (17)$$

4 ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE UN EJE RÍGIDO

Al considerar el sistema de eje rígido, perfectamente balanceado, presente en la Figura 1, en el cual la fuerza externa es igual a cero, el sistema de ecuaciones escrito de forma matricial toma la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{X} \\ \Delta \ddot{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{X} \\ \Delta \dot{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

que, usando la Ec. (17), y multiplicando y dividiendo por c_R , se puede expresar como:

$$p^2 \begin{pmatrix} \Delta \ddot{X} / c_R \\ \Delta \ddot{Y} / c_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{XX} & c_{XY} \\ c_{YX} & c_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \dot{X} / c_R \\ \Delta \dot{Y} / c_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{XX} & k_{XY} \\ k_{YX} & k_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X / c_R \\ \Delta Y / c_R \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

donde la variable tiempo ha sido adimensionalizada con $1/\omega$ y se ha definido la masa adimensional:

$$p^2 = \frac{c_R M \omega^2}{F} \quad (20)$$

Si el sistema compuesto por el rotor y los cojinetes se vuelve inestable, esto ocurrirá a una velocidad de rotación específica denominada ω_s y tendrá una frecuencia de precesión (a la que le corresponde una masa adimensional p_s^2). El movimiento resulta entonces puramente armónico (Lund, 1965), con una órbita que tendrá una frecuencia Ω_s . Los movimientos que satisfacen la Ec. (19) son de la forma:

$$X = A e^{j\bar{\omega}t}; \quad Y = B e^{j\bar{\omega}t}; \quad j = \sqrt{-1} \quad (21)$$

donde

$$\bar{\omega}_s = \frac{\Omega_s}{\omega_s} \quad (22)$$

es la relación que existe entre la velocidad de precesión y la velocidad de giro del eje.

Al reemplazar la Ec. (21) en la Ec. (19), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -p_s^2 \bar{\omega}_s^2 + k_{XX} + j\bar{\omega}_s c_{XX} & k_{XY} + j\bar{\omega}_s c_{XY} \\ k_{YX} + j\bar{\omega}_s c_{YX} & -p_s^2 \bar{\omega}_s^2 + k_{YY} + j\bar{\omega}_s c_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (23)$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución no trivial, el determinante de la Ec. (23) tiene que ser igual a cero. Así se obtienen dos ecuaciones, una correspondiente a la parte real y otra a la parte imaginaria del determinante,

$$p_s^4 \bar{\omega}_s^4 - p_s^2 \bar{\omega}_s^2 k_{YY} + k_{YX} k_{XX} - k_{XX} p_s^2 \bar{\omega}_s^2 - k_{YX} k_{XY} + c_{XY} \bar{\omega}_s^2 c_{YX} - c_{XX} \bar{\omega}_s^2 c_{YY} = 0 \quad (24)$$

$$-p_s^2 \bar{\omega}_s^3 c_{YY} - c_{XX} p_s^2 \bar{\omega}_s^3 + k_{YX} \bar{\omega}_s c_{XX} + k_{XX} c_{YY} \bar{\omega}_s + k_{XY} \bar{\omega}_s c_{YX} - k_{YX} \bar{\omega}_s c_{XY} = 0 \quad (25)$$

Una manera más simple de resolver estas ecuaciones es realizar una transformación de variables adicional, partiendo de la idea que la película lubricante puede ser considerada como un resorte con una rigidez equivalente, K_{eq} (o $k_{eq} = K_{eq} c_R/F$, en forma adimensional), (Qiu, 1995).

$$k_{eq} = p_s^2 \bar{\omega}_s^2 \quad (26)$$

que lleva a:

$$k_{eq} = \frac{c_{XX}k_{YY} + c_{YY}k_{XX} - c_{YX}k_{XY} - c_{XY}k_{YX}}{c_{XX} + c_{YY}} \quad (27)$$

$$\bar{\omega}_s^2 = \frac{(k_{eq} - k_{XX})(k_{eq} - k_{YY}) - k_{YX}k_{XY}}{c_{YY}c_{XX} - c_{XY}c_{YX}} \quad (28)$$

El procedimiento de solución consiste, entonces, en obtener primero los valores de los coeficientes dinámicos para un dado valor de excentricidad (η). Luego, éstos se ingresan en las Ecs. (27) y (28) para calcular el coeficiente de rigidez equivalente adimensional y la relación de frecuencia crítica ($\bar{\omega}_s$). Finalmente, se calcula p_s^2 con la Ec. (26), y por ende ω_s mediante la Ec. (20):

$$\omega_s \sqrt{\frac{c_R M}{F}} = \frac{\sqrt{k_{eq}}}{\bar{\omega}_s} \quad (29)$$

Es interesante observar que la velocidad crítica en los CH solo depende de la excentricidad relativa η , ya la que frecuencia crítica es solo función de los coeficientes dinámicos y éstos solo dependen de η .

La velocidad de la órbita del eje se obtiene combinando la velocidad crítica $\bar{\omega}_s$ con ω_s mediante la Ec. (22), es decir:

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M}} \quad (30)$$

5 RESULTADOS

La Figura 5 muestra los valores de la relación velocidad de precesión del eje y la velocidad de giro, $\bar{\omega}_s$, calculados según el procedimiento antes descripto, en función de la excentricidad, η , para distintos valores de L/D. El valor de esta variable permite determinar las condiciones de posible inestabilidad en rotores que operan apoyados en CH. La Figura 5 presenta la solución numérica y los resultados de las aproximaciones analíticas *ISJB* y *P&O-pert*. Para el análisis se ha seleccionado L/D = 0,25, 0,5, 0,75 y 1.

Como es de esperar, los valores de $\bar{\omega}_s$ calculados por los distintos métodos coinciden para L/D pequeños (para toda excentricidad) y para η chicos (a todo L/D). A medida que L/D aumenta, la solución ideal para cojinetes infinitamente cortos se distancia cada vez más de la real calculada numéricamente, sobre todo cuanto mayor es η . Por otro lado, la solución *P&O-pert* mejora sustancialmente la predicción de *ISJB*, resultando prácticamente indistinguible de la *Númerica* hasta L/D=0,5 y muy similar a relaciones de aspecto superiores. Así, por ejemplo, para L/D=0,75 y $\eta=0,7$, la aproximación *ISJB* subestima $\bar{\omega}_s$ en ~50% mientras que la solución *P&O-pert* sólo lo hace en ~3%.

Un eje apoyado en cojinetes hidrodinámicos es estable para elevados valores de excentricidad, o su equivalente, bajo número de Sommerfeld. Esto se debe a los cambios de

signo que experimentan los coeficientes de rigidez cruzados que pueden provocar órbitas auto energizadas, imposibles de que se disipen por sus propios coeficientes de amortiguación (Wilkes y Childs, 2012). Es por ello que en la Figura 5 (al igual que se hace luego en la Figura 6) se señalan las zonas de posible inestabilidad y estabilidad. El valor de $\bar{\omega}_s = 0,5$ para $\eta \rightarrow 0$ es una característica de los CH para toda relación de aspecto. Indica que al inicio de la inestabilidad el rotor precesiona a su frecuencia natural, la cual equivale al 50% de la velocidad de giro del rotor. En esa condición, los coeficientes de amortiguación cruzada del cojinete, al igual que los de rigidez directa, son nulos ($k_{XX}=k_{YY}=c_{YX}=c_{XY}=0$), los de rigidez cruzada son iguales y opuestos ($k_{YX}=-k_{XY}$), y los de amortiguación directa son iguales ($c_{XX}=c_{YY}$). Por ende, cualquier perturbación que exista en el sistema puede generar órbitas auto provocadas de amplitud creciente. Para esta condición resulta:

$$k_{eq} = \frac{c_{XX}k_{YY} + c_{YY}k_{XX} - c_{YX}k_{XY} - c_{XY}k_{YX}}{c_{XX} + c_{YY}} = 0 \quad (31)$$

y

$$\bar{\omega}_s = \frac{k_{YX}}{c_{XX}} = 0,5, \quad (32)$$

demostrando que la inestabilidad de los CH depende exclusivamente de los efectos cruzados de su rigidez. La condición comentada es común en turbo-maquinaria de gran velocidad, donde la constante de rigidez equivalente (k_{eq}) y la velocidad natural del sistema (ω_n) tienden a cero y el sistema eje-fluido-cojinete resulta inestable a cualquier velocidad de giro.

Los datos de la Figura 5 también permiten observar que la relación que existe entre la velocidad de giro y la velocidad de precesión al inicio de la inestabilidad es prácticamente constante hasta excentricidades de aproximadamente 0,5 para todos los L/D de cojinetes cortos.

Por otro lado, si el coeficiente de rigidez cruzado k_{YX} fuese nulos, es decir si $\bar{\omega}_s = 0$, el sistema sería siempre estable. Los ejes apoyados en CH infinitamente cortos son estables para excentricidades mayores a 0,75, como se puede observar también en la Figura 5. Por otro lado, a medida que L/D aumenta se necesita una mayor excentricidad para lograr estabilidad en el funcionamiento del sistema.

La Figura 6 exhibe los valores de la velocidad crítica adimensional, $\omega_s \sqrt{\frac{c_R M}{F}}$, calculada como se expresa en la Ec. (29), para los cuatro valores de L/D en todo el rango de excentricidades. Se deduce de aquí que si la velocidad de giro del rotor es menor que su velocidad crítica, entonces el funcionamiento comienza a ser estable. Esto se debe a que un incremento de la velocidad está asociado a un mayor número de Sommerfeld o una menor excentricidad. Similarmente a lo observado con la relación de velocidad crítica presentada en la Figura 5, los valores de *Numérica* y los calculados resultan prácticamente indistinguibles para L/D pequeños (en este caso hasta L/D de aproximadamente 0,25) en todo el rango de excentricidades, y para para todo η en todo el rango de L/D analizado. Además, a medida que la relación de aspecto aumenta, empieza a producirse un alejamiento importante de la solución de Ocvirk respecto de la *Numérica* a valores crecientes de excentricidad. Al igual que para la relación de velocidad crítica, la solución de *P&O-pert* mejora notablemente la predicción de *ISJB* y predice correctamente el comportamiento del cojinete para un rango amplio de relaciones de aspecto y excentricidades.

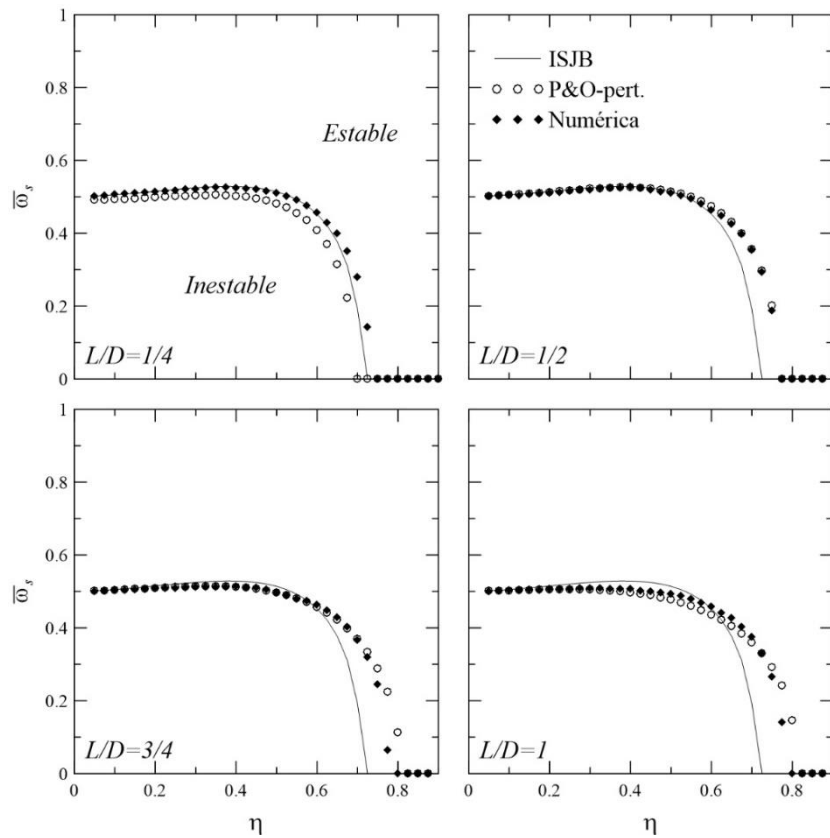


Figura 5: Relación de velocidad crítica en función de la excentricidad para los diferentes L/D.

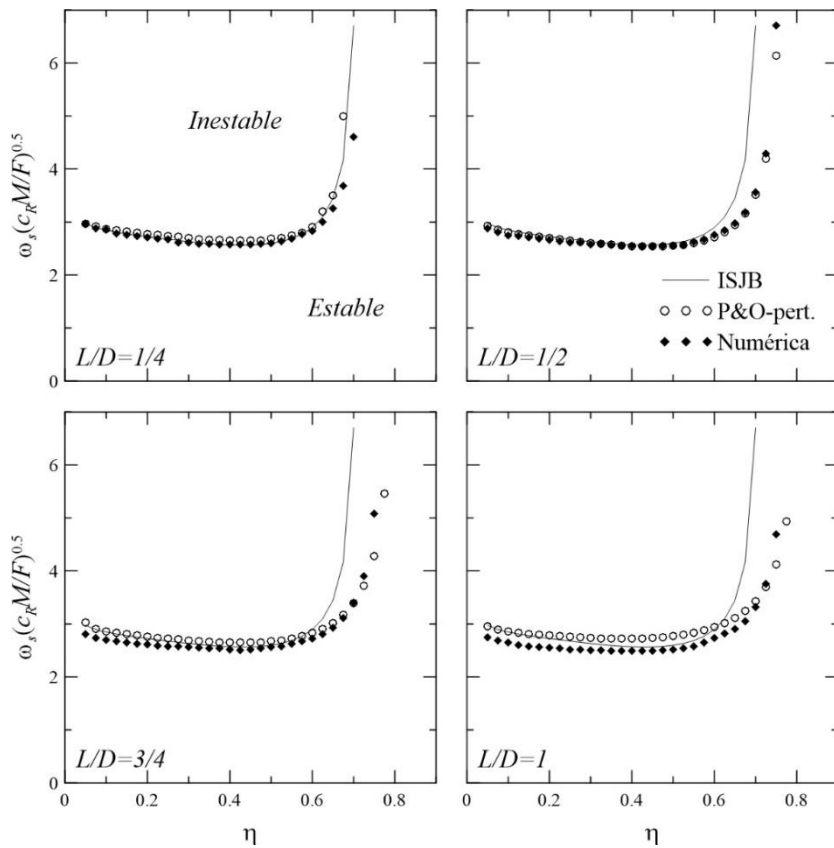


Figura 6: Velocidad crítica adimensional en función de la excentricidad.

Nuevamente, la condición de inestabilidad ocurre en las menores excentricidades. Las variables de velocidad son las más representativas debido a que generalmente son las únicas que se pueden controlar en la operación. Las fuerzas, la viscosidad y los parámetros geométricos suelen ser condiciones de diseño y no de operación.

La Figura 7 muestra una simulación de la órbita del rotor cuando se le aplica una carga súbita para dos condiciones de excentricidad inicial: una con el eje centrado ($\eta=0$) y otra con una excentricidad inicial elevada ($\eta=0.3$). El cambio de excentricidad se logra considerando dos cargas estáticas diferentes, de 100 y 1500 N, sin variar las demás condiciones de operación del sistema. Las condiciones geométricas y de operación utilizadas en la simulación son las que se listan en la Tabla 1. Ellas determinan $L/D = 0,67$, y $P_p = 26,7$ kPa y $O = 35,5$ para $F = 100$ N y $P_p = 400$ kPa y $O = 2,37$ para $F = 1500$ N.

ω (RPM)	1000
c_R (m)	6×10^{-5}
M (kg)	100
R (m)	0,0375
L (m)	0,05
μ (Pa.s)	0,013

Tabla 1: Datos de operación del cojinete utilizados para la simulación de la órbita del rotor que se muestra en la Figura 7.

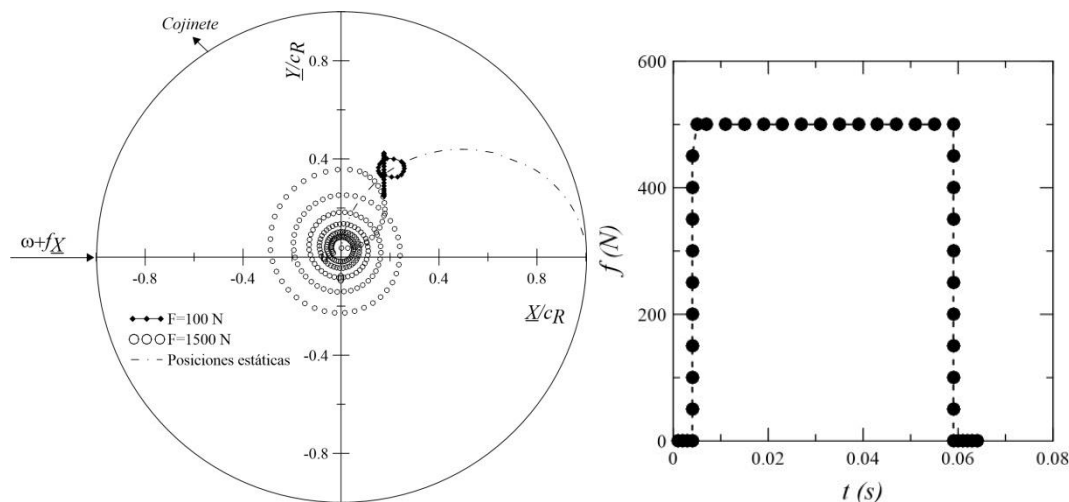


Figura 7: Órbita del eje ante carga impacto para dos excentricidades iniciales (izquierda), y función de carga empleada en la simulación con máximo de 500 N (derecha).

La estabilidad del sistema se prueba generalmente mediante un pulso que consiste en señales con un amplio rango de frecuencias. Si se golpea el rotor con un martillo, se ejerce una fuerza de impulso sobre el rotor. La trayectoria del movimiento del eje que responde a la fuerza puede reflejar la estabilidad del sistema (Tieu y Qiu, 1995). Cuando es estable, el eje puede regresar a su posición de equilibrio original después del impacto. En cambio, si gira alrededor de su punto de equilibrio con un radio creciente, significa que opera en una condición inestable.

Las simulaciones que se muestran en la Figura 7, sirven para demostrar la inestabilidad que se calculó analítica y numéricamente con anterioridad. Ante una misma carga dinámica

aplicada, se observa un sensible aumento de los movimientos que sufre el eje al variar únicamente la posición inicial del eje. Los círculos pequeños negros describen la trayectoria seguida por el centro del rotor al aplicarle la función de carga de la Figura 7, cuando inicialmente se encuentra con una excentricidad de $\eta=0.3$ provocada con una carga estática de 1500 N. Asimismo, la trayectoria del eje centrado con una carga estática de 100 N, está marcada por los círculos blancos de la misma figura. En el primero de los casos, al recibir una carga escalón de 500 N, se puede observar que la trayectoria que sigue el eje es muy corta en comparación con la que recorre en el caso del eje centrado. Los resultados permiten ver que el eje es más inestable para posiciones de bajas excentricidades, debido a una gran disminución de los coeficientes dinámicos de amortiguación y al cambio de signo de los coeficientes de rigidez cruzada, mencionados anteriormente.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizan las condiciones de operación que llevan a la posible inestabilidad de CH de longitud finita bajo flujo isotérmico, incompresible y laminar. Para ello se comparan los resultados numéricos y analíticos del cociente entre velocidad de precesión y velocidad de giro del eje ($\bar{\omega}_s$) y de la velocidad crítica adimensional ($\omega_s \sqrt{c_R M / F} = \sqrt{k_{eq}} / \bar{\omega}_s$), obtenidos en función de la excentricidad y la relación de aspecto L/D a partir de la resolución de la Ecuación de Reynolds. Los resultados analíticos fueron obtenidos usando el método propuesto por Vignolo y colaboradores basado en la teoría de perturbación regular (Vignolo et al., 2011; Merelli et al., 2018). Este método extiende la solución de Ocvirk para CH infinitamente cortos y permite contar con expresiones simples de los parámetros estáticos y dinámicos que resultan exitosamente descriptos para relaciones de aspecto y excentricidades de hasta 3/4 (o combinaciones de excentricidades más grandes con L/D más pequeños o viceversa). Los resultados obtenidos, presentados en este trabajo, demuestran que el método propuesto también constituye una herramienta atractiva tanto para predecir las órbitas del rotor de cojinetes cortos así como para determinar su estabilidad.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Consejo Nacional de Investigación de Argentina (CONICET), la Universidad Nacional del Sur (UNS) y la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB) por el apoyo financiero.

REFERENCIAS

- Pinkus, O. Theory of hydrodynamic lubrication. *New York*: McGraw Hill; 1961.
- Hamrock, B.J. and Schmid, S.R., Jacobson BO. Fundamentals of fluid film lubrication. *2nd ed. New York*: Marcel Dekker, Inc.; 2004.
- Szeri, A.Z., Fluid film lubrication, 2nd ed., *Cambridge Univ. Press*: New York; 2010.
- Dubois, G.B. and Ocvirk, F.W., Analytical derivation of short bearing approximation for full journal bearings. *NACA Report*, 1953;1157.
- Sommerfeld, A., The hydrodynamic theory of lubrication friction. *Zs Math Phys* 1904;50(1,2):97–155.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O. and Quinzani, L.M., Approximate analytical solution to Reynolds equation for finite length journal bearings. *Tribol Int* 2011;44:1089–99.
- Sfyris, D., Chasalevris, A., An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication. *Tribol Int* 2012;55:46–58.
- Reason, B.R. and Narang, I.P., Rapid design and performance evaluation of steady-state journal

- bearings - A technique amenable to rapid design and performance evaluation of steady-state journal bearings- A technique amenable to programmable hand calculators. *A S L E Trans* 2008;25(4):429–44.
- Tieu, A.K. and Qiu, Z.L., Stability of finite journal bearing—from linear and nonlinear bearing forces, *Tribology Transaction*, 38:3, 627-635, 1995.
- San Andrés, L., 2010, "Notes 5. Dynamics of a rigid rotor-fluid film bearing system," *Texas A&M University Digital Libraries*, <https://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93197>
- Lund, J.W., The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible, damped supports. *J Appl Mech* 1965;32(4):911-920.
- Rao, T., Biswas S., Hirani H. and Athre K.. An analytical approach to evaluate dynamic coefficients and nonlinear transient analysis of a hydrodynamic journal bearing. *Tribol Trans* 2000;43:109–15.
- Chasalevris, A., Sfyris, D., Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation. *Tribol Int* 2013;57:216–34.
- Merelli, C., Barilá, D.O., Vignolo, G.G. and Quinzani, L.M., Dynamic coefficients of finite length journal bearing. Evaluation using a regular perturbation method. *Int J Mech Sci* 2018 (en revision).
- Childs, D., Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling, and analysis, *Wiley-Interscience*; 1993.
- Qiu, Z.L. "A Theoretical and experimental research on the static and dynamic characteristics of hydrodynamic journal bearings," *PhD Dissertation, University of Wollongong, Wollongong, Australia*, 1995.
- Wilkes, J.C. and Childs, D.W., Tilting pad journal bearings—A discussion on stability calculation, frequency dependence, and pad and pivot. *J Eng Gas Turbines Power* 2012;134:122508.