

AVALIAÇÃO DE DANO EM ESTRUTURAS RETICULADAS POR MEIO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS

DAMAGE EVALUATION IN RETICULATED STRUCTURES THROUGH DYNAMIC PROPERTIES

Hennan H. Falcão^a, Maria D. D. Silva^a, Andrea Brasiliano^a e Hidelbrando J. F. Diógenes^a.

^a*Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Cidade Universitária, 58051-085, Paraíba, Brasil, hennan.falcao@gmail.com*

Palavras-chave: Estruturas, Danos, Frequências Naturais, Modos de Vibração.

Resumo. As estruturas sofrem diversos tipos de deterioração, não só devido a fenômenos naturais, mas também devido a ação de carregamentos de variadas magnitudes que quando combinados podem culminar no aparecimento de danos. Estes danos podem comprometer a capacidade de carga e conseqüentemente a segurança e a vida útil das estruturas, fazendo-se necessário o estudo de técnicas de inspeção que permitam identificá-los de maneira precoce e com menor custo possível. Os danos são caracterizados por uma perda de rigidez local que são responsáveis por causar alterações nos parâmetros dinâmicos da estrutura, como frequências naturais e modos de vibração. Neste trabalho são utilizados dois métodos para localização de dano, o Método do Erro na Equação de Movimento e as técnicas APC (*Approximate Parameter Change*) e DSM (*Damage Signature Matching*) que são baseados na comparação entre os modos de vibração de uma estrutura intacta e danificada. Através de uma análise numérica, e experimental foi possível fazer uma comparação entre os métodos. Para a análise experimental foi ensaiado um modelo físico de uma viga de aço livre-livre, a fim de validar os resultados obtidos numericamente.

Keywords: Structures, Damage, Natural Frequencies, Mode Shapes.

Abstract. The structures suffer many kinds of deterioration not only due to natural phenomena but also due to the action of loads of varied magnitude that when combined may cause the appearance of damages. These damages can affect the load capacity and therefore the security and working life of the buildings making necessary the researching of techniques which allows to identify them in an early and affordably way. The damage can be characterized by a local loss of stiffness which is responsible for causing alterations on the dynamic parameters such as natural frequencies and modes shapes. In this work two methods of damage localization were applied, the Error Residual Method and the APC (*Approximate Parameter Change*) and DSM (*Damage Signature Matching*) techniques which are based on the comparison between the modes shapes of an intact and a damaged structure. Through a numerical analysis it was possible to make a comparison between the methods. It was also made an experimental analysis of a steel free-free beam in order to validate the numerical results.

1 INTRODUÇÃO

A avaliação de falhas e danos em estruturas é necessária pois a partir do seu conhecimento pode-se intervir nas mesmas. Estas falhas e danos ocorrem devido a ações estáticas ou dinâmicas, como sobrecargas, ação dos ventos, tráfego de pessoas e veículos, etc. Desta forma, a capacidade de carga da estrutura pode ser comprometida e outros problemas como fissuras ou excesso de vibrações podem surgir, prejudicando sua vida útil.

Entre os engenheiros, uma grande questão é a garantia de que as estruturas irão operar de maneira satisfatória, promovendo segurança e conforto aos seus usuários por toda sua vida útil. Para isto, faz-se necessário o estudo precoce de danos, a fim de evitar a ocorrência de prejuízos materiais e até a perda de vidas humanas. Neste sentido, podem ser utilizadas técnicas não destrutivas e destrutivas que permitem avaliar as condições globais das estruturas.

Visto que as técnicas destrutivas inviabilizam o posterior uso das estruturas, as não destrutivas se tornam mais interessantes. Métodos que utilizam raio X, ressonância magnética, ultrassom vem sendo utilizados nesse contexto, no entanto são bastante onerosos. Com a finalidade de associar rapidez ao menor custo possível, a utilização das propriedades dinâmicas como ferramenta de avaliação de danos tem se tornado uma alternativa interessante.

Um dano presente na estrutura caracteriza-se por uma perda de rigidez e massa localizada, entretanto, a perda de massa na maioria das vezes pode ser desprezada (Hearn e Testa, 1991). Esta perda de rigidez pode ser caracterizada pela redução da seção transversal, e conseqüentemente a diminuição do momento de inércia, como no caso de uma fissura ou trinca, assim como pode ser devido a alteração de alguma propriedade do material nos casos em que o dano é de natureza química, por exemplo, reduzindo o módulo de elasticidade.

Através da perda de rigidez causada pelo dano, os principais parâmetros dinâmicos como frequências naturais e modos de vibração sofrem alteração, fato que vem sendo estudado por diversos autores como: Salawu (1997), Lam *et al.* (1998), Genovese (2000), Brasiliano (2001), Araújo (2013), Morais (2014), Safara (2016). Tendo em vista que cada modo de vibração, relacionado a uma frequência natural, será afetado de maneira distinta pelo dano, já que a distribuição de tensões em uma estrutura é diferente para cada frequência natural, torna-se possível a localização do dano (Adams *et al.*, 1978).

Com a finalidade de verificar o desempenho de alguns métodos de identificação de danos em estruturas com base na alteração dos parâmetros dinâmicos, este trabalho apresenta uma comparação entre os resultados obtidos para o Método do Erro na Equação de Movimento (Genovese, 2000) e o método que combina as técnicas APC e DSM (Lam *et al.*, 1998). Tais métodos foram aplicados a um modelo numérico de uma viga livre-livre considerando um caso de dano, e às propriedades dinâmicas obtidas experimentalmente para uma viga livre-livre, com as mesmas características do modelo numérico, visando também a comparação entre os resultados obtidos numérica e experimentalmente.

2 TÉCNICAS APPROXIMATE PARAMETER CHANGE (APC) E DAMAGE SIGNATURE MATCHING (DSM) (LAM *et al.*, 1998)

2.1 Técnica Approximate Parameter Change (APC)

Esta técnica se baseia nas alterações provocadas pelo dano nas características do sistema estrutural como a rigidez e a massa da estrutura. Tais alterações podem ser representadas pela diminuição destas propriedades. No entanto, caso o interesse seja apenas a localização do dano, não há necessidade de se conhecer a alteração exata dos parâmetros. Neste sentido, o

método designa uma relação entre os modos de vibração da estrutura e as propriedades do sistema a fim de localizar quais características sofreram alteração. Considerando a existência de q possíveis danos em uma estrutura e que os parâmetros análogos sejam p_1, p_2, \dots, p_q , o i -ésimo modo de vibração da estrutura danificada pode ser expresso como uma função dos q parâmetros do sistema e a relação entre o modo de vibração e os parâmetros pode ser escrita como uma expansão da série de Taylor conforme a Eq. 1:

$$\Phi_i(p+\Delta p) = \Phi_i(p) + \sum_{j=1}^q \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_j} \Delta p_j + \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial p_j^2} \Delta p_j^2 + \dots \quad (1)$$

Onde $p = \{p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_q\}^T$ denota o vetor dos parâmetros do sistema, equivalente a todos os danos possíveis da estrutura intacta, Δp corresponde ao vetor das alterações nos parâmetros do sistema originadas pelo dano, $\Phi_i(p)$ é o i -ésimo modo de vibração, como uma função dos parâmetros do sistema da estrutura intacta, e $\Phi_i(p + \Delta p)$ é o i -ésimo modo de vibração, como função dos parâmetros do sistema da estrutura danificada.

Após os termos Δp de ordem superiores serem desprezados, a Eq. 1 pode ser expressa em forma matricial como (Eq. 2):

$$\Delta \Phi_i \cong \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right]_{(N \times q)} \Delta p_{(q \times 1)} \quad (2)$$

Onde $\Delta \Phi_i = \Phi_i(p + \Delta p) - \Phi_i(p)$ é a alteração no modo de vibração i originada pelo dano e $\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_1} \dots \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_q} \right]$ é uma matriz que denota a taxa de alteração do modo i em relação aos parâmetros do sistema análogos a todos os q danos possíveis.

A Eq. 2 indica uma relação entre as alterações nos vetores modais e as alterações nos parâmetros. Os valores APC podem ser estimados através da utilização do estimador de mínimos quadrados das seguintes formas (Eq. 3, 4 e 5):

Quando o número de graus de liberdade for igual ao número de possíveis danos ($N=q$):

$$APC_i = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right]^{-1} \Delta \Phi_i \quad (3)$$

Quando o número de graus de liberdade for maior que o número de possíveis danos ($N > q$):

$$APC_i = \left(\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right]^T \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right] \right)^{-1} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right]^T \Delta \Phi_i \quad (4)$$

Quando o número de graus de liberdade for menor que o número de possíveis danos ($N < q$):

$$APC_i = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right]^T \left(\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right] \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial p} \right]^T \right)^{-1} \Delta \Phi_i \quad (5)$$

É sabido que o dano é responsável por reduzir o valor dos parâmetros do sistema, tais como a rigidez de um elemento da estrutura, logo o maior valor absoluto APC, pode ser utilizado como indicador do local do dano. Se o dano indicado for o mesmo em todos os modos correlacionados, conclui-se que o local está, de fato, correto.

É possível que em alguns casos a indicação do dano pelo índice APC não seja suficientemente clara, isso pode ocorrer devido a erros de medição, modos de vibração

incompletos ou então pela perda de graus de liberdade sensíveis ao dano. Sendo assim a técnica APC seria responsável por indicar todos os possíveis casos de dano, e a técnica DSM confirmaria os locais de dano corretamente.

2.2 Técnica Damage Signature Matching (DSM)

A magnitude das alterações que ocorrem nas propriedades dinâmicas das estruturas, devido a ocorrência de dano, é dependente do local e da gravidade do mesmo. Deve-se levar em consideração o fato de que os modos de vibração e as frequências naturais serão afetados de maneira diferente frente a variação do local do dano para uma determinada severidade, ou seja, alguns modos serão mais afetados que outros. As alterações nas características dinâmicas, para todos os possíveis casos de dano, são previstas a partir de um modelo analítico, logo, as alterações medidas podem ser comparadas com as alterações previstas para todos os casos de dano possíveis. Feito isto, o conjunto de alterações previstas que mais se aproximar dos valores medidos pode ser identificado e o caso de dano correspondente pode ser caracterizado como correto. A localização do dano pode ser avaliada confrontando o MDS (*Measured Damage Signatures*) com o PDS (*Predicted Damage Signatures*) para os variados casos de dano. O MDS é definido como a alteração medida no modo i , $\Delta\phi_i$, dividida pela alteração da frequência de vibração de um determinado modo de referência, neste caso, o modo 1, $\Delta\omega_1^2$ (Eq. 6):

$$\text{MDS} = \frac{\Delta\phi_i}{\Delta\omega_1^2} \quad (6)$$

É importante comentar que o modo de referência é escolhido de acordo com a precisão com que é medido e da sua sensibilidade ao dano. Neste trabalho, o modo de referência escolhido foi o primeiro, entretanto, se a variação da frequência do primeiro modo for muito pequena, é preciso escolher outra como referência. Isso se deve ao fato de que com um denominador muito pequeno na Eq. 6, existiriam complicações numéricas na determinação do vetor MDS. Devem-se normalizar os dois conjuntos de modos antes do cálculo do $\Delta\phi_i$. Já o PDS é calculado pela Eq. 7:

$$\text{PDS}_{ik} = \frac{\frac{\partial\phi_i}{\partial p_k} \Delta p_k}{\frac{\partial\omega_1^2}{\partial p_k} \Delta p_k} = \frac{\frac{\partial\phi_i}{\partial p_k}}{\frac{\partial\omega_1^2}{\partial p_k}} \quad (7)$$

Onde $\frac{\partial\phi_i}{\partial p_k}$ é a taxa de variação do modo i com relação ao parâmetro correspondente ao k -ésimo dano e $\frac{\partial\omega_1^2}{\partial p_k}$ é a taxa de variação da frequência de referência com relação ao parâmetro correspondente ao k -ésimo dano. Para cada possível local de dano já identificado pela técnica APC, os correspondentes sinais de danos previstos (PDS) serão comparados com os sinais de danos medidos (MDS). O MDS corresponde à diferença entre os modos de vibração da estrutura sem dano e da estrutura com dano real. Já o PDS, corresponde à diferença entre os modos de vibração da estrutura sem dano e com dano nos elementos identificados pelo APC. Consequentemente, o dano será aquele para o qual o PDS e o MDS mais se aproximarem em todos os modos considerados. Isto pode ser verificado através de um gráfico que relacione os

valores de PDS e MDS em função dos graus de liberdade. Outra forma existente para comparação dos sinais de dano é calculando a norma da diferença entre o PDS e o MDS para cada modo considerado. A soma das normas calculadas para todos os modos é determinada através da discrepância total para aquele possível dano. O possível dano com a menor discrepância será o dano real da estrutura, D_k (Eq. 8):

$$D_k = \sum_{i=1}^m \|PDS_{ik} - MDS_i\| \quad (8)$$

3 MÉTODO DO ERRO NA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO (GENOVESE, 2000)

O método do erro na equação de movimento possibilita identificar o dano em duas etapas, a localização e a quantificação. Este trabalho contempla apenas a localização do dano que é feita através da observação do erro residual existente na equação de movimento, Eq. 9, quando são utilizados os parâmetros da estrutura sem dano, ou seja, a matriz de rigidez e de massa, e os modos de vibração e frequências naturais da estrutura com dano:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}' - \boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}' \quad (9)$$

Onde \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes de rigidez e massa global da estrutura sem dano, respectivamente, $\boldsymbol{\phi}'$ representa a matriz cujas colunas representam os modos de vibração da estrutura com dano, $\boldsymbol{\Lambda}'$ representa uma matriz diagonal cujos valores são as frequências naturais da estrutura danificada e \mathbf{E} representa uma matriz cujas colunas são o vetor erro relacionado a um modo de vibração em específico. O valor correspondente a cada linha deste vetor representa a localização do dano, em função dos graus de liberdade da estrutura.

4 ANÁLISE NUMÉRICA

Uma viga com condições de apoio livre-livre, mostrada na [Figura 1](#), foi considerada. Suas características são as seguintes: comprimento de 1,48m (L), seção transversal em U com área de $2,330 \times 10^{-4} \text{m}^2$ (A), momento de inércia (I) igual a $1,382 \times 10^{-8} \text{m}^4$, módulo de elasticidade (E) igual a $2,05 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, massa específica (ρ) igual a $7124,46 \text{ kg/m}^3$ e coeficiente de Poisson (ν) 0,29. A viga foi discretizada em 30 elementos finitos de barra com dois graus de liberdade por nó, conforme [Figura 2](#), com dimensão de 0,0493m. A matriz de rigidez dos elementos utilizada está definida pela Eq. 10. Foi analisado um caso em que o dano foi introduzido no elemento 17, delimitado pelos nós 17 e 18, conforme [Figura 1](#). Este dano foi representado por uma redução de inércia e área de 49,11% e 10,38%, respectivamente. Não foi considerada a deformação por corte ([Przemieniecki, 1968](#)) nas matrizes de rigidez da estrutura. Para simplificação da análise e viabilização da comparação entre os valores numéricos e experimentais, foi utilizada a condensação estática ([Cobb e Liebst, 1997](#)). Logo, a matriz de massa utilizada é a apresentada na Eq. 11.

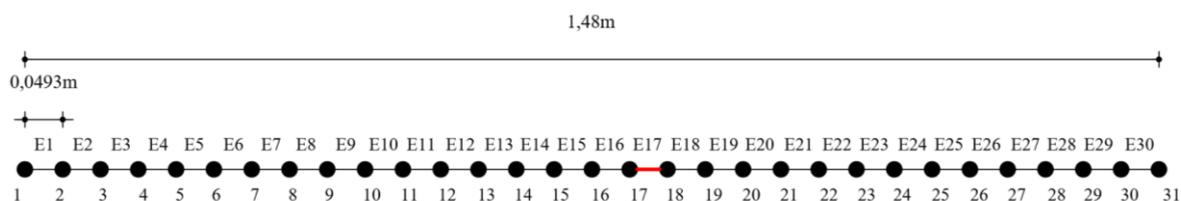


Figura 1 - Viga livre-livre com elemento 17 danificado

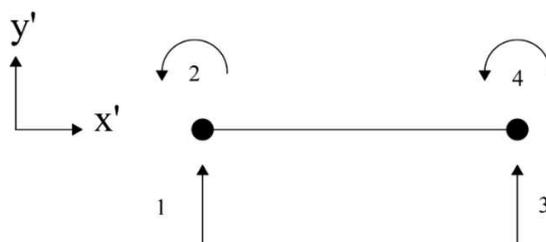


Figura 2 - Elemento de barra com dois graus de liberdade por nó

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$m = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Os valores das frequências naturais obtidas para a viga livre-livre intacta e com dano de 49,11% no elemento 17 estão apresentadas na [Tabela 1](#). Os cinco primeiros modos de vibração estão mostrados na [Figura 3](#).

Frequências Naturais	Sem dano (Hz)	Dano de 49,11% no elemento 17 (Hz)
1 ^a	67,0207	64,7276
2 ^a	184,3088	183,5412
3 ^a	360,4865	354,0655
4 ^a	594,5264	588,5033
5 ^a	886,0636	876,9283

Tabela 1: Frequências naturais da viga intacta e com dano no elemento 17

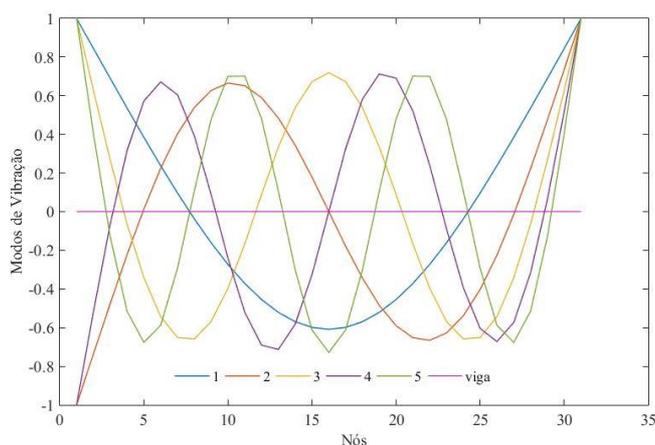


Figura 3: Modos de vibração da viga livre-livre sem dano

4.1 Método do erro na equação de movimento – Localização

Para o método do erro, os resultados obtidos estão apresentados na Figura 4, e representam os valores de \mathbf{E} (Eq. 9) para o grau de liberdade vertical, no eixo y, e o número dos nós da discretização da viga no eixo x. Somaram-se os valores dos vetores erro para todos os modos de vibração com a finalidade de ressaltar os picos. Os valores também foram multiplicados com a mesma finalidade e posteriormente divididos pelo máximo valor absoluto, ajustando a escala. Percebe-se que o método foi capaz de identificar a localização do dano de 49,11% no elemento 17, delimitado pelos nós 17 e 18, no entanto é possível observar um espalhamento dos picos para os dois elementos vizinhos (16 e 18). Tal espalhamento pode ocorrer devido a utilização da condensação estática (Koh *et al.*, 1995), que diminui a precisão do método apesar de simplificar a análise.

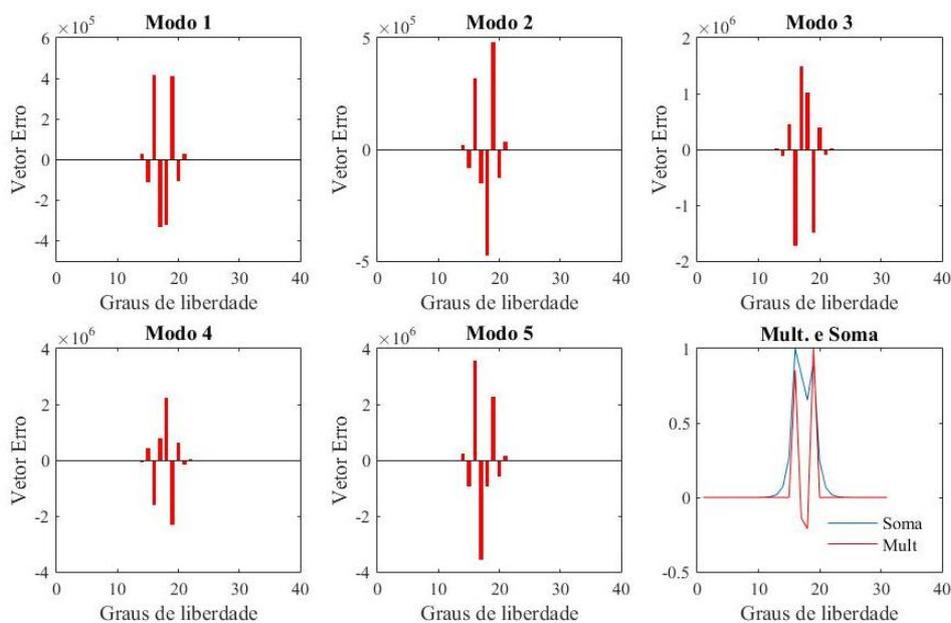


Figura 4: Método do erro para os cinco primeiros modos de vibração

4.2 Técnicas APC e DSM

Foram tomados os três primeiros modos de vibração para análise das técnicas APC e DSM. Para o cálculo do índice, foi utilizada a Eq. 4, visto que o número de graus de liberdade (31) é

maior que o número de ‘q’ danos possíveis (30). A [Figura 5](#) apresenta os resultados da técnica APC para o caso de dano de 49,11% de redução de inércia. Percebe-se que para os três modos de vibração a técnica apresentou resultados bastante satisfatórios, localizando com precisão o dano no elemento 17. Visto que a técnica APC localizou o dano com eficiência, não seria necessária a aplicação da técnica DSM para confirmação da localização do dano, ainda assim, esta foi utilizada e os valores referentes aos índices PDS e MDS estão indicados na [Figura 6](#). Para todos os modos de vibração, os índices PDS e MDS praticamente coincidiram, confirmando então o local do dano como sendo no elemento 17.

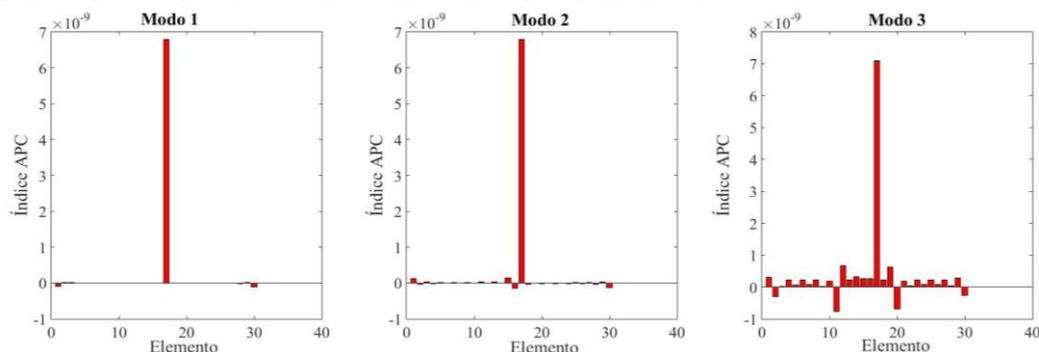


Figura 5: Índice APC para os três primeiros modos de vibração

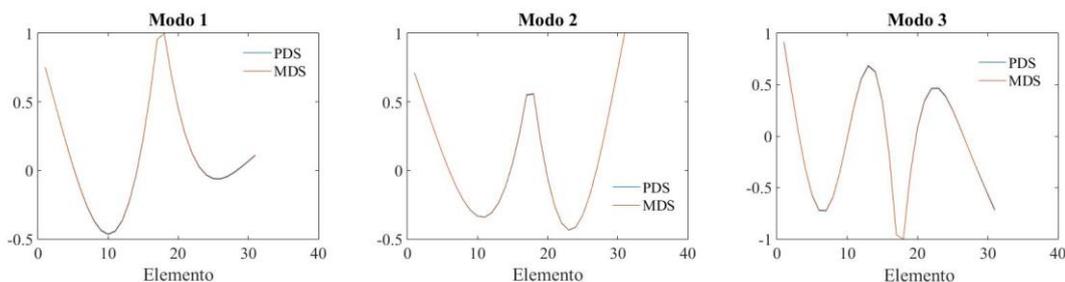


Figura 6: Índices PDS e MDS para os três primeiros modos de vibração

5 ANÁLISE EXPERIMENTAL

Com o objetivo de avaliar a eficiência dos métodos quando aplicados a dados obtidos experimentalmente, foi realizado um ensaio de vibração livre em um modelo físico da viga com as mesmas características do modelo numérico, a partir do qual foram identificadas suas frequências naturais e correspondentes modos de vibração. A forma de obtenção dessas propriedades a partir do ensaio não é escopo deste trabalho. Para a análise experimental, foram utilizados apenas os três primeiros modos de vibração identificados experimentalmente, visto que para determinar os modos de vibração referentes a frequências naturais mais altas com mais fidelidade, seriam necessários um maior número de acelerômetros fixos ao longo da estrutura ([Morais, 2014](#)), o que não foi possível na realização dos ensaios.

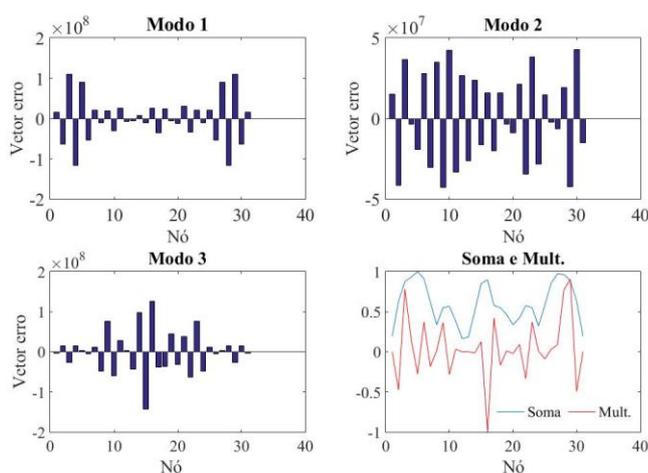


Figura 7: Método do erro para os três primeiros modos de vibração determinados experimentalmente

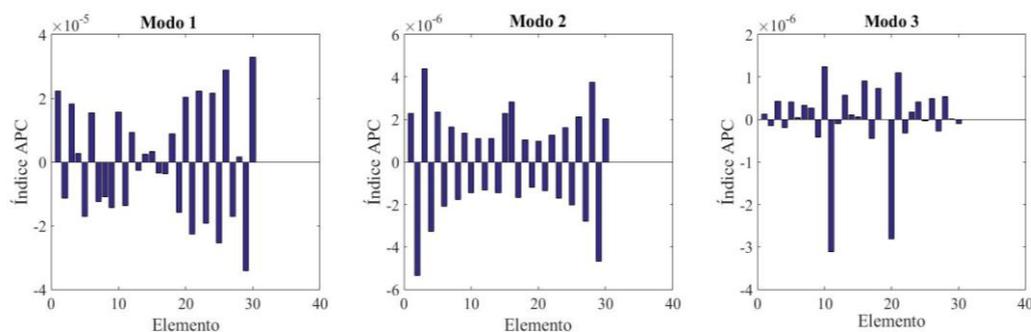


Figura 8: Índice APC para os três primeiros modos de vibração determinados experimentalmente

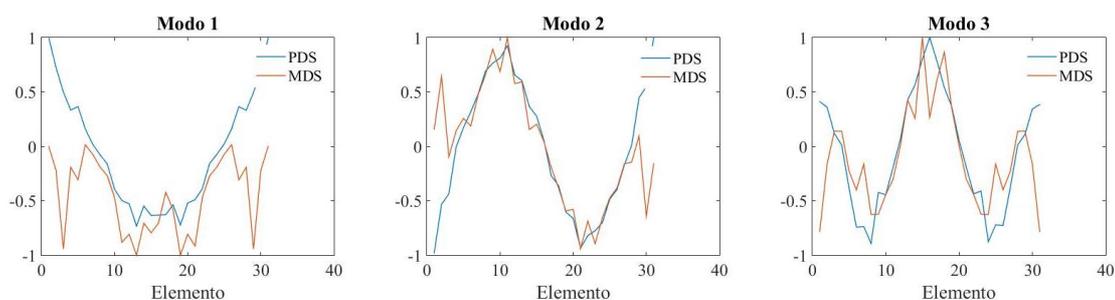


Figura 9: Índices PDS e MDS para os três primeiros modos de vibração determinados experimentalmente

Identificadas as propriedades dinâmicas, foram aplicados os métodos de localização de dano. Na [Figura 7](#) são expostos os resultados obtidos para o método do erro na equação de movimento, cujos resultados não foram satisfatórios se comparados aos resultados numéricos. Pode-se perceber que no modo 3 e no gráfico referente a soma e multiplicação, aparecem picos expressivos nos nós 16, 17 e 18, sendo os dois últimos os nós que delimitam o elemento danificado. Apesar disto, aparecem picos de magnitude razoável em todos os nós, divergindo bastante dos resultados obtidos no exemplo numérico. A técnica APC não apresentou resultados satisfatórios também, como pode ser visto na [Figura 8](#). O dano não foi localizado corretamente em nenhum dos modos analisados. Fez-se então necessário confirmar o local do dano utilizando a técnica DSM cujos índices PDS e MDS estão apresentados na [Figura 9](#). É perceptível que os índices PDS e MDS se aproximam relativamente bem no segundo e

terceiro modo de vibração, logo, o fato do índice APC não ter entregue resultados satisfatórios não inviabiliza o uso da combinação das técnicas, visto que o DSM foi capaz de melhorar os resultados obtidos para a análise experimental.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu em detectar danos em estruturas reticuladas por meio de dois métodos que utilizam os modos de vibração das estruturas para localização do dano. O primeiro, Método do erro, mostrou-se eficiente numericamente falando, restringindo o dano a uma região de aproximadamente 10cm. Já na análise experimental, o método não se demonstrou eficiente, divergindo bastante dos resultados obtidos numericamente.

Foi utilizado também o método que consiste em combinar as técnicas APC e DSM. Tanto para a análise numérica quanto para a análise experimental, o método forneceu melhores resultados. Numericamente, já a partir do índice APC, o local do dano já estava claro, não sendo necessária a utilização da técnica DSM, que também confirmou o local do dano com bastante precisão. Na análise experimental, a técnica APC não entregou bons resultados, sendo necessária a utilização da técnica DSM para avaliar a eficiência do método. Nesta, por sua vez, os índices PDS e MDS se aproximaram relativamente bem para o segundo e terceiro modo de vibração, melhorando então os resultados obtidos pelo método.

Os dados experimentais podem não ter sido tão precisos devido a fatores inerentes ao ensaio. Na realização do mesmo, pode ter ocorrido ruído devido a falhas na precisão dos equipamentos de aquisição dos dados de aceleração, bem como a ação de forças eletromagnéticas, ocasionando erro nos resultados obtidos, ver [Safara \(2016\)](#).

REFERÊNCIAS

- Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J., and Stone, B. J. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(2):93-100, 1978.
- Araújo, M. M. C. D. *Identificação de danos em pórticos espaciais via Método do Erro Residual e Redes Neurais Artificiais*, volume I. Universidade de Brasília, 2013
- Brasiliano, A. *Caracterização de Danos em Estruturas Aporticadas*, volume I. Faculdade de Tecnologia - Universidade de Brasília, 2001.
- Cobb, R. G., and Liebst, B. S. Structural Damage Identification Using Assigned Partial Eigenstructure. *AAIA Journal*, 35:152-158, 1997.
- Genovese, M. *Localização e quantificação de danos em estruturas por meio de suas características dinâmicas*, volume I, Universidade de Brasília, 2000.
- Hearn, G., and Testa, R. B. Modal analysis for damage detection in structures. *Journal of structural engineering*, 117:3042-3063, 1991.
- Koh, C. G., See, L. M. and Balendra, T. Damage detection of buildings: numerical and experimental studies. *Journal of Structural Engineering*, 121(8):1155-1160, 1995.
- Lam, H. F., J. M. Ko, and C. W. Wong. Localization of damaged structural connections based on experimental modal and sensitivity analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 210(1):91-115, 1998.
- Morais, J. D. P. *Deteção e localização de dano em estruturas*, volume I. FCT-UNL, 2014.
- Przemieniecki, J. S. *Theory of matrix structural analysis*, volume I. McGraw Hill, 1968.
- Safara, M. J. C. *Deteção de Dano em Estruturas Reticuladas Utilizando Análise de Vibrações*, volume I. Universidade Nova de Lisboa, 2016.
- Salawu, O. S. Detection of structural damage through changes in frequency: a review. *Engineering Structures*, 19:718-723, 1997.