

## IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS APLICADO A LA CARACTERIZACIÓN DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

### DYNAMIC SYSTEMS IDENTIFICATION APPLIED TO THE CHARACTERIZATION OF STRUCTURAL ELEMENTS

Oscar Möller<sup>a</sup>, Juan P. Ascheri<sup>a</sup> y Guido Valentini<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura,  
Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina,  
[moller@fceia.unr.edu.ar](mailto:moller@fceia.unr.edu.ar)*

**Palabras clave:** Dinámica estructural, Identificación de sistemas, Parámetros modales.

**Resumen.** Las técnicas de identificación de sistemas dinámicos consisten en construir modelos matemáticos, o numéricos, a partir de mediciones experimentales. En general, los modelos contienen parámetros que son optimizados para minimizar las diferencias entre la predicción del modelo y las observaciones experimentales. En este trabajo la identificación se aplica a sistemas lineales invariantes en el tiempo, con formulación en espacio de estados, con dimensión finita y tiempo discreto, utilizando las técnicas de identificación por subespacios, con algoritmos N4SID y MOESP. Se identifican los parámetros modales de una viga para diferentes ubicaciones de la carga dinámica y de los puntos de medición.

**Keywords:** Structural dynamics, System identification, Modal parameters.

**Abstract.** The techniques of dynamic systems identification consist of building mathematical or numerical models, based on experimental measurements. In general, the models contain parameters that are optimized to minimize the differences between the prediction of the model and the experimental observations. In this work the identification is applied to time-invariant linear systems, with state space formulation, finite dimension and discrete time, using subspace identification techniques, with N4SID and MOESP algorithms. Modal parameters of a beam are identified for different locations of the dynamic load and the measuring points.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas de identificación de sistemas consisten en construir modelos matemáticos, o numéricos, de sistemas dinámicos a partir de mediciones experimentales. Los modelos representan aproximadamente el comportamiento de elementos o sistemas estructurales, y son utilizados para diseño, análisis, predicción y control de dichos sistemas. En general, los modelos contienen parámetros que pueden ser optimizados, o calibrados, para minimizar las diferencias entre la predicción del modelo y las observaciones experimentales.

Una aplicación que tiene gran interés en la actualidad es el seguimiento en el tiempo de un sistema, o estructura, con mediciones experimentales periódicas y aplicación de las técnicas de identificación que permiten actualizar el modelo numérico de elementos finitos y detectar daños a partir de los cambios en los parámetros modales (Cacho-Pérez et al., 2017; Schlune et al., 2009; Reynders et al., 2008, 2010; Wang et al., 2010; Sanayei et al., 2015).

En el marco de la teoría general de identificación de sistemas (Ljung, 1999) aplicado a sistemas lineales invariantes en el tiempo, con formulación en espacio de estados, con dimensión finita y tiempo discreto, son muy utilizadas las técnicas de identificación por subespacios, como por ejemplo los algoritmos N4SID (Numerical algorithm for Subspace State Space System IDentification), Van Overschee and De Moor (1994) y MOESP (Multivariable Output Error State sPace), Verhagen (1994), ver detalles en Cortés (2007), que están implementados en librerías Fortran de libre acceso como SLICOT (2018).

Se presenta en este trabajo un resumen de la metodología de identificación, con aplicaciones numéricas sobre una viga de parámetros conocidos y con solución analítica de los parámetros modales. Se estudia la sensibilidad de la identificación para diferentes ubicaciones de una carga dinámica genérica y con varias posiciones y cantidad de puntos de medición, que en este caso son resultados de análisis numérico. También se analizan los resultados que se obtienen utilizando sólo la respuesta de la viga (output), sin que intervengan los datos de carga (input), lo que se denomina “identificación a ciegas”. Se obtienen conclusiones de interés para realizar estudios de campo sobre estructuras.

## 2 ECUACIONES DEL PROBLEMA A RESOLVER

La representación de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo, en espacio de estado en tiempo continuo, se puede expresar con

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_C \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_C \mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_C \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_C \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

Discretizando en el tiempo las ecs.(1) con  $t = k T$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , siendo  $T$  el espaciado entre muestras o tiempo de muestreo, y simplificando la notación  $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{x}(k)$ , se obtiene la representación en espacio de estado en tiempo discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}\quad (2)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es el vector de entrada de dimensión  $m$ ,  $\mathbf{y}$  es el vector de salida de dimensión  $l$ ,  $\mathbf{x}$  es el vector de estado con dimensión  $n$  denominado orden del sistema,  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{v}$  representan el ruido del proceso y ruido en la medición,  $\mathbf{A}_{n \times n}$  es la matriz del sistema,  $\mathbf{B}_{n \times m}$  es la matriz de entradas,  $\mathbf{C}_{l \times n}$  es la matriz de salida y  $\mathbf{D}_{l \times m}$  es la matriz de alimentación directa. Los vectores  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{v}$  contienen las señales no observadas con matriz de covariancias

$$E \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{w}(p) \\ \mathbf{v}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T(q) & \mathbf{v}^T(q) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} u_{pq} \geq 0 \quad (3)$$

con  $u_{pq} = 0$  si  $p \neq q$ ;  $u_{pq} = 1$  si  $p = q$ . También se puede expresar:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{e}(k), \quad \mathbf{w}(k) = \mathbf{K} \mathbf{e}(k) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{K}_{n \times l}$  es la matriz de ganancia de Kalman y  $\mathbf{e}(k)$  ruido blanco estacionario. La representación esquemática se presenta en la Figura 1.

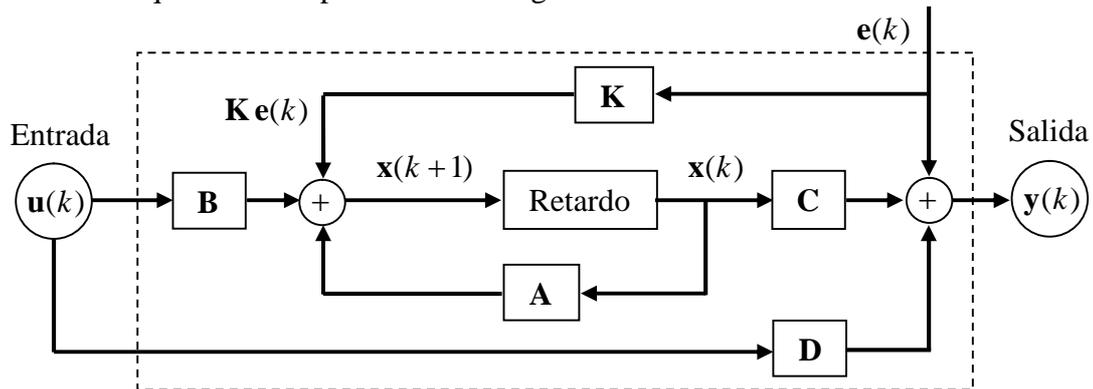


Figura 1: Sistema lineal invariante en el tiempo

Las ecs.(2) en tiempo discreto se obtienen con un “mantenedor de orden 0”, que significa que el valor al inicio del intervalo, tiempo  $k$ , se mantiene constante hasta el final del intervalo  $k+1$ , llamado también Euler forward. Entonces, la relación entre las matrices es

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_C T), \quad \mathbf{B} = \left[ \int_0^T \exp(\mathbf{A}_C \dagger) d\dagger \right] \mathbf{B}_C, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_C, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_C \quad (5)$$

En este trabajo se utiliza una mejor aproximación que es la transformación bilineal o de Tustin, resultando función de dos parámetros:  $r = 1$  y  $s = 2/e$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= r (\mathbf{s} \mathbf{I} - \mathbf{A}_C)^{-1} (\mathbf{s} \mathbf{I} + \mathbf{A}_C), & \mathbf{A}_C &= s (r \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A} - r \mathbf{I}) \\ \mathbf{B} &= \sqrt{2rs} (\mathbf{s} \mathbf{I} - \mathbf{A}_C)^{-1} \mathbf{B}_C, & \mathbf{B}_C &= \sqrt{2rs} (r \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} &= \sqrt{2rs} \mathbf{C}_C (\mathbf{s} \mathbf{I} - \mathbf{A}_C)^{-1}, & \mathbf{C}_C &= \sqrt{2rs} \mathbf{C} (r \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}_C + \mathbf{C}_C (\mathbf{s} \mathbf{I} - \mathbf{A}_C)^{-1} \mathbf{B}_C, & \mathbf{D}_C &= \mathbf{D} - \mathbf{C} (r \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (6)$$

El problema a resolver es identificar las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{K}$  que permitan vincular los datos de entrada (acciones) con los estados del sistema y con los datos de salida (respuesta).

### 3 ALGORITMOS BASADOS EN SUBESPACIOS

Se presenta un resumen de los dos algoritmos utilizados en la identificación por subespacios, que sólo requieren herramientas estadísticas y de álgebra lineal numéricamente robustas, sin transformaciones ni procesos de optimización iterativos no lineales.

Las ecs.(2) se reescriben de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_f &= \mathbf{A}^i \mathbf{X}_p + \mathbf{H}_{i(\det)} \mathbf{U}_p + \mathbf{H}_{i(sto)} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{Y}_p &= \mathbf{H}_i \mathbf{X}_p + \mathbf{H}_{i(\det)} \mathbf{U}_p + \mathbf{H}_{i(sto)} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{Y}_f &= \mathbf{H}_h \mathbf{X}_f + \mathbf{H}_{h(\det)} \mathbf{U}_f + \mathbf{H}_{h(sto)} \mathbf{E}_f \end{aligned} \quad (7)$$

Donde  $\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_f$  son las secuencias de estados para tiempo pasado  $p$  y tiempo futuro  $f$ ;  $\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_f, \mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_f$  son las matrices Hankel de entrada-salida,  $\mathbf{U}_{i(det)}, \mathbf{U}_{i(sto)}$  son las matrices de controlabilidad extendida en reversa determinística ( $det$ ) y estocástica ( $sto$ );  $\mathbf{X}_S$  es la matriz de observabilidad extendida, donde  $S$  es genérico, con  $S = n$ , siendo  $n$  el orden del sistema;  $\mathbf{H}_{S(det)}, \mathbf{H}_{S(sto)}$  son las matrices Toepliz determinística y estocástica; y  $\mathbf{E}_p, \mathbf{E}_f$  son las matrices Hankel con los datos de error. Un resumen de dichas matrices es:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p &= [\mathbf{x}(0) \ \mathbf{x}(1) \ \cdots \ \mathbf{x}(j-2) \ \mathbf{x}(j-1)]_{n \times j} \\ \mathbf{X}_f &= [\mathbf{x}(i) \ \mathbf{x}(i+1) \ \cdots \ \mathbf{x}(i+j-2) \ \mathbf{x}(i+j-1)]_{n \times j} \end{aligned} \tag{8}$$

donde  $i$  es el número de bloques fila y  $j$  el número de bloques columna.

Con los datos de las acciones  $\mathbf{u}(k)$  y respuestas  $\mathbf{y}(k)$  se construyen las matrices de Hankel de entrada-salida, y de error, donde en forma genérica cada componente es  $a_{ij} = a_{i-1,j+1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_p &= \mathbf{U}_t(1:i, : )_{mi \times xj}, \quad \mathbf{U}_f = \mathbf{U}_t(i+1:i+h, : )_{mh \times xj} \\ \mathbf{Y}_p &= \mathbf{Y}_t(1:i, : )_{li \times xj}, \quad \mathbf{Y}_f = \mathbf{Y}_t(i+1:i+h, : )_{lh \times xj} \\ \mathbf{E}_p &= \mathbf{e}(1:i, : )_{li \times xj}, \quad \mathbf{E}_f = \mathbf{e}(i+1:i+h, : )_{lh \times xj} \end{aligned} \tag{9}$$

Las matrices de controlabilidad, observabilidad y Toepliz se definen como

$$\begin{aligned} i(det) &= [\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{B}]_{n \times mi} \\ i(sto) &= [\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{K} \ \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{K} \ \cdots \ \mathbf{A}\mathbf{K} \ \mathbf{K}]_{n \times li} \end{aligned} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{S-1} \end{bmatrix}_{lS \times xn} \tag{10}$$

$$\mathbf{H}_{S(det)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{S-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{S-3}\mathbf{B} & & \mathbf{D} \end{bmatrix}_{lS \times ms} \quad \mathbf{H}_{S(sto)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CK} & \mathbf{I} & & 0 \\ \mathbf{CAK} & \mathbf{CK} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{S-2}\mathbf{K} & \mathbf{CA}^{S-3}\mathbf{K} & & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{lS \times ls}$$

Se introducen matrices de ponderación, o de peso, cuadradas  $\mathbf{W}_a$  ( $lh \times lh$ ) y  $\mathbf{W}_b$  ( $j \times j$ ), de acuerdo con el algoritmo utilizado.

Se calcula la proyección ponderada  $\tilde{h}$ , definiendo previamente en forma genérica la proyección ortogonal del espacio fila de una matriz  $\mathbf{A}$  dentro del espacio fila de una matriz  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{\Pi}_B = \mathbf{A}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{B}$ , donde el símbolo  $\dagger$  indica la seudo inversa de Moore-Penrose para matrices rectangulares, entonces

$$h = \mathbf{W}_a (\mathbf{Y}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f^\perp}) \mathbf{W}_b = \mathbf{W}_a ( \tilde{h} \mathbf{X}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f^\perp} ) \mathbf{W}_b \tag{11}$$

Se define

$$\tilde{h} = \mathbf{W}_a^{-1} h, \quad \tilde{\mathbf{X}}_f = \mathbf{X}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f^\perp} \mathbf{W}_b \rightarrow h = \tilde{h} \tilde{\mathbf{X}}_f \tag{12}$$

Se realiza la descomposición en valores singulares (SDV) de  $\hat{h}$

$$SDV(\hat{h}) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad \text{con } \mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2], \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

Donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son matrices ortonormales unitarias y  $\mathbf{S}$  es una matriz diagonal conteniendo los valores singulares no nulos en  $\mathbf{S}_1$  y aproximadamente nulos en  $\mathbf{S}_2$ . Luego

$$\hat{h} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{U}_2 \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^T \cong \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (14)$$

Se determina el orden del modelo  $n$ , que es la cantidad de valores singulares no nulos de la descomposición (14), es decir el rango de  $\hat{h}$ . Esta descomposición en valores singulares (14) da la opción de elegir los valores en ec.(12) de tal manera que  $\hat{h} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}$ , luego

$$\hat{\mathbf{X}}_f = \hat{h}^\dagger \quad (15)$$

que contiene los estados estimados  $\hat{\mathbf{X}}_f$  y las matrices del sistema  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$ , es decir es la ecuación a resolver. El algoritmo N4SID utiliza la secuencia de estados, mientras que el algoritmo MOESP utiliza la matriz de observabilidad extendida. Combinando ambos algoritmos se identifican las matrices del sistema en tiempo discreto.

Con las expresiones (6) se convierten a las matrices del sistema en tiempo continuo, donde interviene el tiempo de muestreo  $T$ . Se evalúan los valores propios  $\lambda_i$  y los vectores propios  $\mathbf{W}$  de la matriz  $\mathbf{A}_C$ , de donde se obtienen las frecuencias naturales  $\tilde{\omega}_i$ , las relaciones de amortiguamiento  $\zeta_i$  y los modos naturales de vibración  $\mathbf{E}_i$  del sistema dinámico con

$$\tilde{\omega}_i = \text{Im}(\lambda_i), \quad \zeta_i = \frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}, \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{C}_C \quad (16)$$

#### 4 APLICACIÓN NUMÉRICA

El “sistema” es una viga de hormigón pretensado típica para puentes de 30 m, ver Figura 2. Está solicitada por una carga dinámica, que es un miembro del proceso aleatorio con función de densidad espectral de potencia también mostrada en la Figura 2. La carga (entrada) se ubicó en diferentes posiciones, y con análisis numérico por elementos finitos se obtuvieron respuestas de desplazamientos y aceleraciones en diferentes puntos de la viga (salida). En un experimento físico, la acción se mide con celda de carga y las respuestas se registran con sensores LVDT y/o acelerómetros.

La ubicación tanto de la acción como de los puntos de medición es de gran importancia porque si se encuentran sobre un nodo de algún modo de vibración de interés, dicho modo no será excitado y por lo tanto no podrá ser identificado. Tampoco será identificado si la acción no tiene componentes de frecuencias en dicha banda. Es por eso que la acción dinámica tiene que aproximarse a un ruido blanco en toda la banda de frecuencias de interés.

Una forma tradicional de obtener las frecuencias propias de vibración es a partir de los picos del módulo de la transformada de Fourier de la respuesta. La Figura 3 muestra el resultado para la carga ubicada en  $x = 8$  m y la respuesta obtenida en ese mismo punto. Las primero 4 frecuencias naturales en rad/seg, obtenidas con el modelo numérico, que son muy cercanas a las analíticas, resultan  $\tilde{\omega}_1 = 28.3$ ;  $\tilde{\omega}_2 = 112.0$ ;  $\tilde{\omega}_3 = 248.2$ ;  $\tilde{\omega}_4 = 432.1$ ; y  $\tilde{\omega}_5 = 658.1$ . Cuando se utiliza la respuesta en desplazamientos se identifican aproximadamente las dos

primeras frecuencias, ver Figura 3. Si se utilizan resultados en aceleraciones se observan 4 frecuencias, con buena aproximación hasta la 3, mientras que la 4 es más difusa con valores más próximos a la 5ta frecuencia.

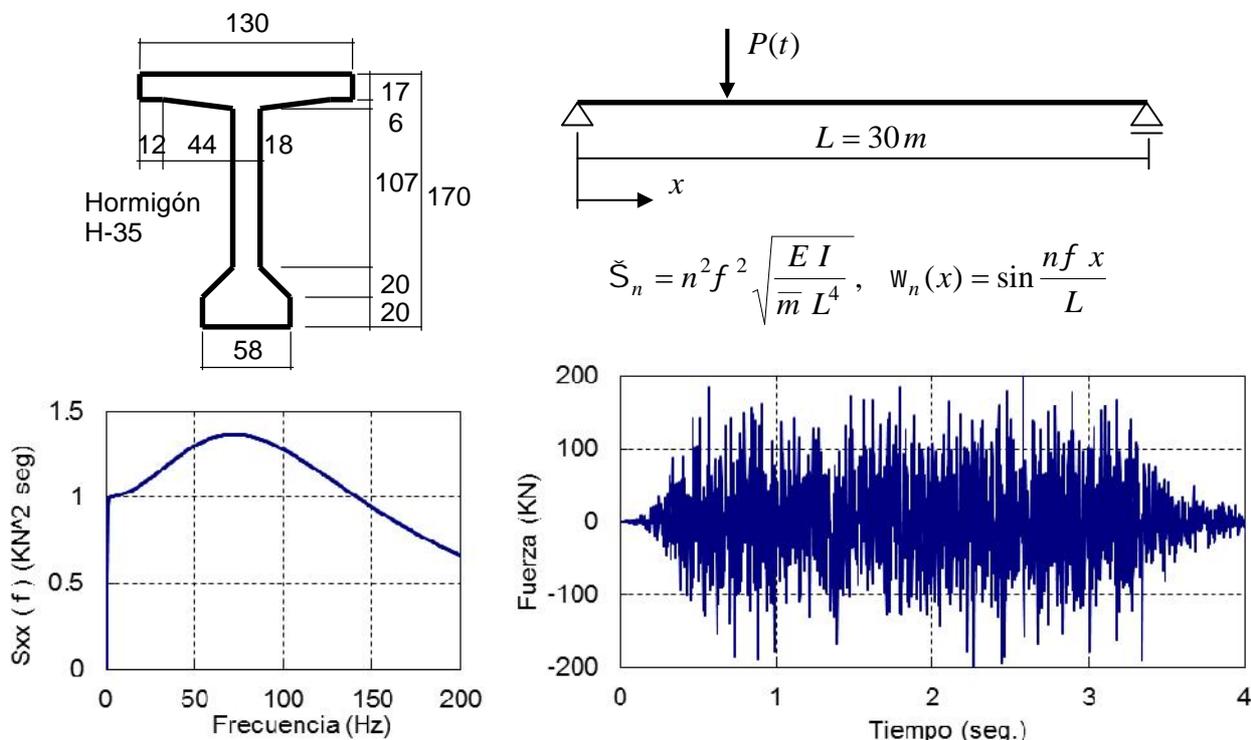


Figura 2: Geometría de la viga para puente y carga dinámica aleatoria

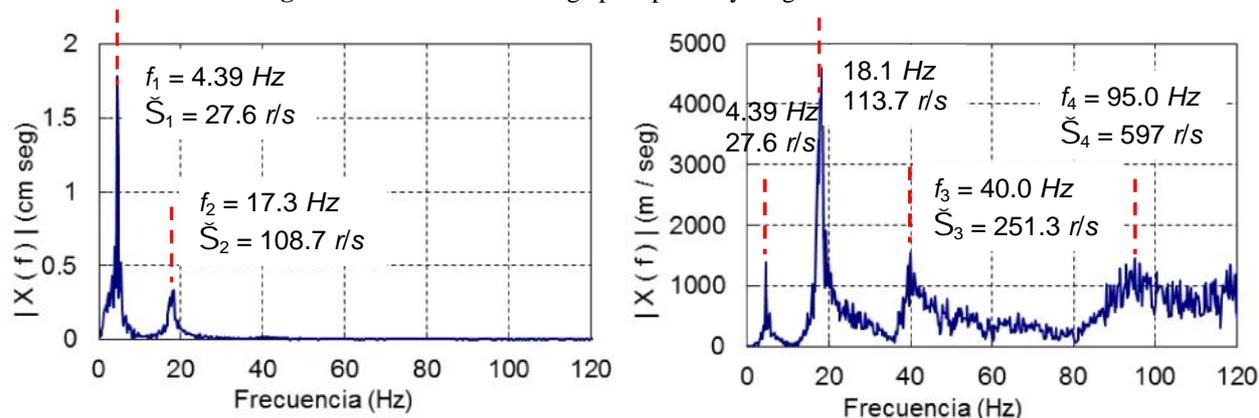


Figura 3: Módulo de la transformada de Fourier en desplazamientos y aceleraciones, y frecuencias propias

En las tablas 1 a 4 se presentan las diferencias porcentuales entre las frecuencias obtenidas en el modelo numérico y las identificadas con los algoritmos N4SID y MOESP. En las tablas 1 y 2, la identificación se realiza con un desplazamiento obtenido para diferentes posiciones, distancia D-x (m) del primer apoyo, mientras que en las tablas 3 y 4 se utilizan aceleraciones. Por otro lado en las tablas 1 y 3 se dio como dato la acción sobre la estructura que fue aplicada a una distancia P-x (m), mientras que en las tablas 2 y 4 los resultados se obtuvieron ignorando dicha entrada.

Para facilitar la interpretación, se dejó sin pintar los casos con errores por debajo del 1%, con un tono claro aquellos casos hasta un 5%, con un tono más oscuro hasta un 20% y se anularon aquellos por encima del 20% donde ya no es posible identificar el modo.

Se observa los excelentes resultados obtenidos con desplazamientos, estando en gris los casos en que la ubicación de la acción o de la respuesta impide excitar o medir el modo.

P/D	D-x(m)		4	8	12	15	18	22	26
P-x(m)	modo	$\omega$	e (%)						
8	1	28.27	0.3%	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%
	2	112.03	0.1%	0.3%	0.0%		0.0%	0.0%	0.1%
	3	248.19	0.2%	0.9%	0.1%	0.1%	0.0%	0.4%	0.0%
	4	432.10	0.4%	6.2%	0.2%		0.3%	1.4%	0.0%
	5	658.07	0.8%	1.5%		0.5%		0.7%	0.6%
	6	919.96	1.3%	0.4%	1.6%		0.2%	0.9%	0.7%
12	1	28.27	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.1%
	2	112.03	0.0%	0.0%	0.0%		0.1%	0.0%	0.0%
	3	248.19	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%
	4	432.10	0.2%	0.2%	0.2%		0.2%	0.3%	0.2%
	5	658.07							
	6	919.96	2.0%	1.6%	1.8%		1.1%	0.2%	0.0%
15	1	28.27	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
	2	112.03							
	3	248.19	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%
	4	432.10							
	5	658.07	0.5%	0.5%		0.5%		0.5%	0.5%
	6	919.96							

**Tabla 1:** Diferencia relativa entre la frecuencia propias del modelo y las obtenidas por la técnica de identificación de sistemas utilizando como datos la carga ubicada a una distancia de 8, 12 y 15 m (P-x(m)) y un desplazamiento a una distancia 4, 8, 12, 15, 18, 22 y 26 m (D-x(m)) del apoyo en cada caso.

P/D	D-x(m)		4	8	12	15	18	22	26
P-x(m)	modo	$\omega$	e (%)						
8	1	28.27	2.9%	1.3%	0.4%	1.3%	0.8%	1.2%	1.9%
	2	112.03	0.5%	0.6%	1.6%		0.3%	0.1%	0.3%
	3	248.19	0.5%	3.5%	1.2%	1.4%	0.8%	1.3%	1.6%
	4	432.10	3.8%	1.9%	9.2%		1.8%	12.6%	2.7%
	5	658.07	2.0%	1.4%		1.8%	3.0%	1.7%	2.1%
	6	919.96	3.5%	3.4%	1.5%	7.2%	2.2%	3.4%	4.2%
12	1	28.27	0.1%	0.4%	1.3%	0.0%	0.7%	0.8%	0.8%
	2	112.03	0.8%	1.6%	3.1%		4.3%	0.3%	0.4%
	3	248.19	0.5%	1.2%	4.2%	1.8%	1.0%	0.8%	1.1%
	4	432.10	0.5%	9.2%	0.0%	16.7%	0.1%	1.8%	0.0%
	5	658.07	8.2%		0.9%				2.0%
	6	919.96	0.5%	1.5%	0.4%	7.9%	7.5%	2.2%	3.1%
15	1	28.27	1.3%	1.3%	0.0%	0.8%	0.0%	1.3%	1.3%
	2	112.03							
	3	248.19	1.4%	1.4%	1.8%	1.7%	1.8%	1.4%	1.4%
	4	432.10	15.9%		16.7%		16.7%		15.9%
	5	658.07	1.0%	1.8%	10.6%	2.7%	10.6%	1.8%	1.0%
	6	919.96	4.9%	7.2%	7.9%	19.1%	7.9%	7.2%	4.9%

**Tabla 2:** Diferencia relativa entre la frecuencia propias del modelo y las obtenidas por la técnica de identificación de sistemas utilizando como datos solo un desplazamiento a una distancia 4, 8, 12, 15, 18, 22 y 26 m (D-x(m)) del apoyo en cada caso.

En el caso de las aceleraciones como salida, se observa una excelente identificación a excepción del primer modo, donde solo pudo ser identificado con precisión cuando la carga o

P/Acc	Acc-x(m)		4	8	12	15	18	22	26
P-x(m)	modo	$\omega$	e (%)						
8	1	28.27				0.1%			
	2	112.03	0.5%	0.3%	2.3%		2.5%	2.6%	1.6%
	3	248.19	0.7%	0.2%	0.9%	0.1%	1.3%	1.9%	0.8%
	4	432.10	4.3%		2.2%		1.8%		1.9%
	5	658.07	1.3%	0.3%		0.5%		0.4%	1.4%
	6	919.96	0.5%	0.2%	2.2%		1.1%	0.9%	1.4%
12	1	28.27				0.0%			
	2	112.03	0.3%	2.3%	4.0%		3.6%	2.5%	0.1%
	3	248.19	0.5%	0.9%	0.2%	0.1%	2.0%	1.3%	0.2%
	4	432.10	0.4%	2.2%	0.0%		0.4%	1.8%	0.4%
	5	658.07							
	6	919.96	2.2%	2.2%	2.6%		2.6%	1.1%	0.9%
15	1	28.27	0.3%	0.1%	0.0%	0.4%	0.0%	0.1%	0.3%
	2	112.03							
	3	248.19	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%
	4	432.10							
	5	658.07	0.5%	0.5%		0.6%		0.5%	0.5%
	6	919.96							

**Tabla 3:** Diferencia relativa entre la frecuencia propias del modelo y las obtenidas por la técnica de identificación de sistemas utilizando como datos la carga ubicada a una distancia de 8, 12 y 15 m (P-x(m)) y una aceleración a una distancia 4, 8, 12, 15, 18, 22 y 26 m (Acc-x(m)) del apoyo en cada caso.

P/Acc	Acc-x(m)		4	8	12	15	18	22	26
P-x(m)	modo	$\omega$	e (%)						
8	1	28.27							
	2	112.03	0.5%	1.6%	3.2%		3.6%	1.0%	0.7%
	3	248.19	1.5%	4.8%	7.5%	1.2%	2.9%	3.7%	1.9%
	4	432.10	4.0%		1.5%		2.4%		2.1%
	5	658.07	2.0%	2.0%	11.0%	1.4%		0.9%	1.5%
	6	919.96	1.0%	4.6%	1.3%	1.9%	2.8%	0.6%	2.3%
12	1	28.27				0.1%			
	2	112.03	1.6%	3.2%	6.0%		3.2%	3.2%	2.2%
	3	248.19	1.4%	7.5%	1.6%	1.6%	1.6%	1.6%	1.8%
	4	432.10	0.2%	1.5%	0.2%		0.3%	0.3%	0.5%
	5	658.07	6.8%	11.0%		17.0%			16.8%
	6	919.96	1.6%	1.3%	3.4%	0.0%	3.3%	3.3%	1.3%
15	1	28.27			0.1%		0.1%		
	2	112.03							
	3	248.19	1.4%	1.2%	1.6%	1.4%	1.6%	1.2%	1.4%
	4	432.10							
	5	658.07	0.6%	1.4%		0.0%		1.4%	0.6%
	6	919.96	10.0%	1.9%	8.5%		8.5%	1.9%	10.0%

**Tabla 4:** Diferencia relativa entre la frecuencia propias del modelo y las obtenidas por la técnica de identificación de sistemas utilizando como datos solo una aceleración a una distancia 4, 8, 12, 15, 18, 22 y 26 m (Acc-x(m)) del apoyo en cada caso.

el registro se ubica en el punto de máxima amplificación de la forma modal.

El mismo procedimiento se realiza ingresando como respuesta a 5 desplazamientos ubicados a distancias de 4, 12, 15, 18 y 26 m, y con la acción a 8 m del apoyo. La identificación se procesa considerando la carga (entrada) y sin tenerla en cuenta. Los resultados obtenidos de las formas modales de los puntos donde se obtuvieron los desplazamientos se muestran en los gráficos de la Figura 4 comparándolos con las formas teóricas de los modos de vibración. En la Figura 5 se observan los mismos resultados para los 5 respuestas de aceleración donde no se graficó el primer modo que no fue detectado.

En la tabla 6 se muestran las frecuencias y coeficientes de amortiguamiento obtenidos en estos casos.

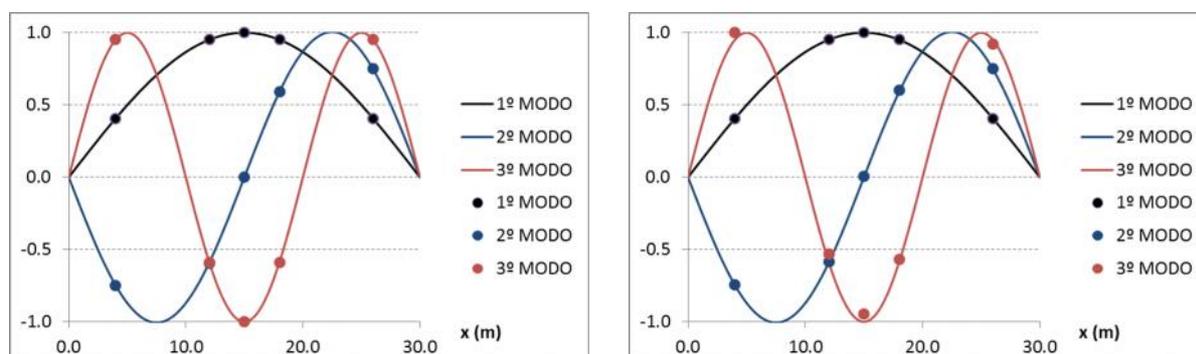


Figura 4: Forma modales con datos de 5 registros de desplazamientos con y sin datos del registro de la acción.

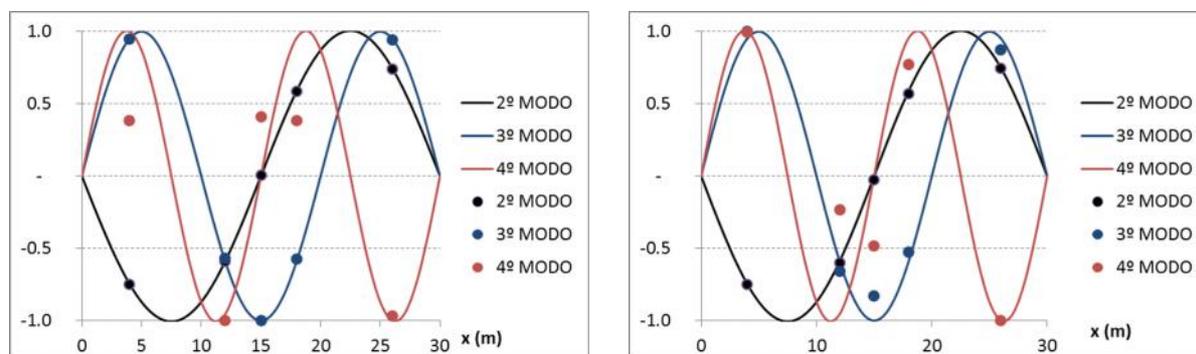


Figura 5: Forma modales con datos de 5 registros de aceleraciones con y sin datos del registro de la acción.

MODELO NUMÉRICO		5 RESP. DE DESPLAZAMIENTOS				5 RESP. DE ACELERACIONES			
		CON ACCIÓN		SIN ACCIÓN		CON ACCIÓN		SIN ACCIÓN	
$\omega$	$\xi$	$\omega$	$\xi$	$\omega$	$\xi$	$\omega$	$\xi$	$\omega$	$\xi$
28.27	3.00%	28.26	3.00%	28.00	3.77%				
112.03	3.00%	112.00	2.29%	111.57	2.23%	111.86	2.34%	112.79	2.33%
248.19		248.01	3.92%	250.72	4.26%	248.06	4.05%	251.73	4.47%
432.10		431.15	6.53%	425.46	5.43%	428.71	7.81%	453.79	10.51%
658.07		655.16	9.65%	633.42	11.41%	657.27	9.30%	656.91	7.14%
919.96		907.57	14.68%			905.78	17.18%	899.62	18.55%

Tabla 5: Frecuencias modales y coeficientes de amortiguamientos detectados usando como datos 5 respuestas con y sin utilización de la acción como dato de entrada.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un breve resumen de la metodología de identificación de sistemas por subespacios con la utilización de los algoritmos N4SID y MOESP. Se realiza una aplicación a una viga de hormigón de 30m típica para puentes. De los resultados de este primer trabajo se pueden señalar las siguientes conclusiones:

- Esta metodología es superadora de la visualización de frecuencias en los picos de la transformada de Fourier, tanto en la precisión de los valores numéricos como en la cantidad de modos a identificar. Además, se obtienen las formas de los modos de vibración.
- Utilizando datos de cargas (entrada) y desplazamientos (salida), se encuentran los resultados más precisos. Cuando sólo se emplean desplazamientos (salida), sin información de la carga, los resultados son igualmente aceptables.
- Si se trabaja con resultados de aceleraciones, los errores en general son ligeramente superiores a cuando se trabaja con desplazamientos, para ambos casos de considerar o no la información de la carga.
- La principal dificultad encontrada, cuando se trabaja con aceleraciones como respuesta, es la identificación del primer modo, con excepción cuando la carga está ubicada en el centro de la viga y se consideran estos datos de entrada en la identificación.
- Es muy importante la ubicación de la excitación, la banda de frecuencias excitadas y la ubicación de los registros de salidas, para la correcta identificación de los modos de vibración.

## REFERENCIAS

- Cacho-Pérez, M., Frechilla, N., Lorenzana, A. Estimación de parámetros modales de estructuras civiles a partir de la función de respuesta en frecuencia. *Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing.*, 33(3-4):197–203, 2017.
- Cortés, J.H.R. Identificación de sistemas en representación de espacio de estados. *Tesis de maestría en Ciencias de la Ingeniería, Cenidet, Dto. Ing. Electrónica*, Mexico, 2007.
- Ljung, L., *System identification Theory for the user*, second edition, Prentice Hall, 1999.
- Reynders, E., Guido De Roeck, G. Reference-based combined deterministic–stochastic subspace identification for experimental and operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22: 617–637, 2008.
- Reynders, E., Teughels, A., DeRoeck, G. Finite element model updating and structural damage identification using OMAX data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24: 1306–1323, 2010.
- Sanayei, M., Khaloo, A., Gul, M., Necati Catbas, F. Automated finite element model updating of a scale bridge model using measured static and modal test data. *Engineering Structures* 102: 66–79, 2015.
- Schlune, H., Plos, M., Gylltoft, K. Improved bridge evaluation through finite element model updating using static and dynamic measurements. *Engineering Structures*, 31: 1477-1485, 2009.
- SLICOT Subroutine Library in Systems and Control Theory, <http://slicot.org>, 2018.
- Van Overschee, P., De Moor, B. N4sid: subspace algorithms for the identification of combined deterministic stochastic systems. *Automatica* 30(1): 75-93, 1994.
- Verhagen, M. Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data, *Automatica* 30(1): 61-74, 1994.
- Wang, H., Li, A., Li, J. Progressive finite element model calibration of a long-span suspension bridge based on ambient vibration and static measurements. *Engineering Structures*, 32: 2546-2556, 2010.