

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL METODO DE LA DISTRIBUCIÓN LATERAL CON CORRIENTES SECUNDARIAS

Juan F. Weber^{1,2}, Ángel N. Menéndez^{3,4}

¹Laboratorio de Hidráulica, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria - CP (X5016ZAA) - Córdoba - Argentina

²Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1601, Ciudad Universitaria, CP 5016, Córdoba, Argentina.
jweber@efn.unc.edu.ar

³Laboratorio de Hidráulica, Instituto Nacional del Agua, AU Ezeiza-Cañuelas, Tramo J. Newbery Km 1,620, CP 1804, Ezeiza, Prov. Buenos Aires, Argentina

⁴Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Av. Las Heras 2214, CP 1127, Ciudad de Buenos Aires, Argentina. angel.menendez@speedy.com.ar

Palabras clave: Mecánica de Fluidos, corrientes secundarias, MDF, MEF.

Resumen. En este trabajo se presenta la solución numérica de la ecuación diferencial del método de la distribución lateral de velocidades incluyendo corrientes secundarias, y sus resultados en un caso de aplicación. La ecuación diferencial fue propuesta por primera vez por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (Ervine et al, 2000), quienes plantearon su solución analítica. Este modelo cuantifica, mediante una hipótesis simplificativa, la intensidad de las corrientes secundarias a través de un parámetro K. La solución numérica de dicha ecuación se plantea tanto por el método de las diferencias finitas (MDF) como por el de los elementos finitos (MEF). Para la implementación del código se utiliza el lenguaje GNUOctave, aprovechando la facilidad del mismo en el manejo de matrices y representación gráfica. Se aplica el modelo numérico a los resultados experimentales presentados por Bernard y Schneider (1992) de 5 secciones de un canal de laboratorio de doble curvatura (Bend Channel Facility – BCF), donde se observa un marcado efecto de las corrientes secundarias sobre el perfil lateral de velocidades. La cuantificación del parámetro K se basa en trabajos anteriores (Weber y Menéndez, 2005). Se destaca la simplicidad de la implementación de ambos esquemas numéricos frente a la relativa complejidad de la solución analítica.

1 INTRODUCCION

Uno de los problemas de mayor interés en la Mecánica de Fluidos aplicada a los flujos geofísicos es la representación adecuada del movimiento del agua en cauces naturales (ríos y arroyos). Estos cuerpos de agua se caracterizan por no tener, en general, un desarrollo rectilíneo, sino presentar curvas (también llamados meandros) en su desarrollo.

En general se puede afirmar que no es posible llegar a una adecuada descripción del flujo en las curvas a partir de modelos unidimensionales e incluso bidimensionales clásicos, como las ecuaciones de Saint-Venant o las de Aguas Poco Profundas, respectivamente, debido al carácter esencialmente tridimensional del flujo.

Sin embargo, en muchas aplicaciones de la ingeniería es suficiente conocer la distribución lateral de velocidades promediadas en la vertical. Ejemplo de ello puede ser la estimación de los procesos de erosión del lecho en una curva. Debido a esto, surge como atractiva la posibilidad de contar con un modelo unidimensional, sencillo, que permita lograr una aceptable estimación de la distribución lateral de velocidades en una curva de un canal, sin necesidad de recurrir a modelos teóricos más completos y complejos como los tridimensionales.

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Hace más de un siglo, Thomson (1876) sugirió que el flujo a superficie libre en una curva se puede pensar como la superposición de dos movimientos: un flujo principal, en la dirección dominante, y un flujo secundario, contenido en el plano de la sección, que se desarrolla debido a la acción de la fuerza centrípeta. La superposición de ambos movimientos da lugar al desarrollo de un flujo helicoidal, que en términos generales es descendente en la margen exterior de la curva y ascendente en la margen interior. Debido a este proceso, aún para una sección simétrica, el perfil lateral de velocidades no será simétrico (como sería de esperar en una canal rectilíneo) y se sesgará hacia el lado convexo de la curva. El incremento de presión sobre la margen exterior (y la consecuente disminución en la margen interior) provocará una sobre elevación de la superficie libre en el lado convexo (Figura 1).

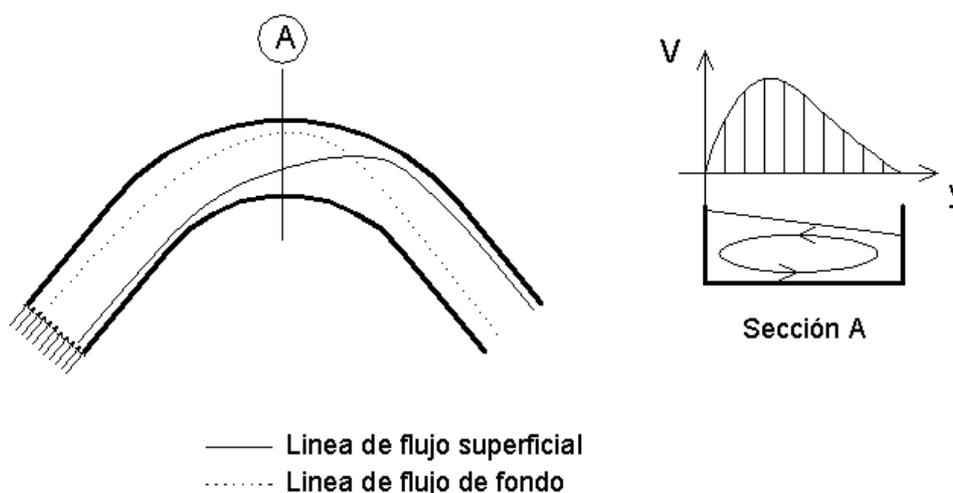


Figura 1. modelo conceptual del flujo en una curva

Si el sistema aguas abajo de la curva fuera ideal (conservativo) aún cuando el canal tome una alineación recta el movimiento vorticoso adquirido por el flujo se mantendría indefinidamente y los perfiles sesgados de velocidad serían idénticos aguas abajo. Debido a la disipación de la energía cinética, originada por la resistencia impuesta por el contorno rígido

y en menor medida por efectos viscosos, la vorticidad del flujo deberá decaer una vez iniciado el tramo recto aguas abajo de la curva, de modo que una distancia razonable el perfil vuelva a ser simétrico. Siguiendo el mismo razonamiento, es de esperar que la vorticidad del flujo no se incremente indefinidamente dentro de la curva, y por lo tanto si el desarrollo de ésta es lo suficientemente largo, se alcance un perfil lateral de velocidades de equilibrio.

En general, se pueden plantear tres aproximaciones a la solución del problema:

a) una aproximación unidimensional, a través de la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes en la dirección vertical, conservando algún término que cuantifique la intensidad de las corrientes secundarias. La versión analítica de este modelo es el denominado método EBKS (Ervin et al., 2000; Weber y Menéndez, 2005). En este trabajo se denominará Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias.

b) una aproximación bidimensional, a través de las Ecuaciones de Aguas Poco Profundas (Chaudhry, 1993), acoplado al sistema de ecuaciones una ecuación de producción, transporte y disipación de la vorticidad, y

c) una aproximación tridimensional basada en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes junto con un modelo de turbulencia.

3 OBJETIVO

El objetivo del presente trabajo es implementar la solución numérica del modelo que permite predecir la distribución lateral de velocidades en una curva de un canal (Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias), tanto por el Método de las Diferencias Finitas como por el de los Elementos Finitos, comparar dichas estimaciones con la obtenida por la solución analítica y con datos experimentales. En lo que sigue se describirán:

- Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias
- su solución analítica (método EBKS)
- su solución por el Método de las Diferencias Finitas
- su solución por el Método de los Elementos Finitos
- el caso experimental
- los resultados por los métodos indicados y su comparación con los datos experimentales

4 MÉTODO DE LA DISTRIBUCIÓN LATERAL CON CORRIENTES SECUNDARIAS (LDM-SC)

Con el objeto de obtener una ecuación diferencial que permita determinar la distribución lateral de velocidades V promediadas en la vertical a lo largo de la coordenada lateral, se resuelve la ecuación de movimiento en la dirección dominante del flujo, junto con la ecuación de continuidad, para un flujo uniforme y estacionario, lo que permite llegar a la siguiente ecuación:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} \right] = \rho g S_0 + \frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z} \quad (1)$$

Donde:

x, y, z	Direcciones longitudinal, lateral y vertical
$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$	Medias temporales de las componentes de la velocidad según x, y, z
$\overline{\tau_{yx}}, \overline{\tau_{zx}}$	Tensiones de Reynolds en los planos perpendiculares a y y a z respectivamente
ρ	Densidad del fluido
g	Aceleración de la gravedad
S_0	Pendiente longitudinal del lecho

Shiono y Knight (1991) integraron la ecuación (1) a lo largo de la profundidad H de flujo, basándose en el modelo de Boussinesq de turbulencia de la viscosidad de torbellino y obtuvieron la ecuación (2):

$$\rho g S_0 Y - \frac{f}{8} \rho V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dy} \left[\rho \lambda \sqrt{\frac{f}{8}} Y^2 V \frac{\partial V}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [Y (\rho \bar{U} \bar{V})_d] \quad (2)$$

En esta ecuación:

Y	Profundidad de flujo (en general una función de y)
f	Factor de fricción de Darcy-Weisbach
V	Velocidad promediada en la vertical
ρ	Viscosidad adimensional de torbellino
$(\rho \bar{U} \bar{V})_d = \frac{1}{Y} \int_0^Y \rho \bar{U} \bar{V} dz$	Tensión de corte promediada en la vertical

El factor de fricción f está relacionado con el coeficiente n de Manning por

$$f = \frac{8 g n^2}{\sqrt[3]{Y}} \quad (3)$$

El parámetro adimensional λ se puede expresar como:

$$\varepsilon_{yx} = \lambda Y \sqrt{\frac{f}{8}} V \quad (4)$$

Donde ε_{yx} es la viscosidad de torbellino de Boussinesq.

El segundo miembro de la igualdad (2) representa el gradiente lateral de la fuerza aparente de corte en el plano vertical por unidad de longitud, y está relacionado a la intensidad de las corrientes secundarias.

Shiono y Knight (1988) encuentran una solución analítica a la ecuación (2) para el caso de canal rectilíneo, es decir cuando el segundo término de dicha ecuación es 0. Posteriormente, estos mismos autores (Shiono y Knight, 1991) encuentran una solución analítica a la (2), incluyendo el término de corrientes secundarias, pero cuya aplicabilidad se halla limitada al caso de canales rectilíneos de sección compuesta.

La principal limitación del modelo de Shiono y Knight está basada en suponer que el segundo miembro de (2) se mantiene constante. Eso hace que su aplicabilidad se limite a regiones restringidas, por ejemplo el pie del talud del canal principal de una sección compuesta.

Una aproximación más general fue planteada por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (2000). Estos autores asumen que las medias temporales de las componentes de la velocidad, se pueden considerar proporcionales a la velocidad promediada en la vertical V . Es decir,

$$\bar{U} = K_1 V \quad ; \quad \bar{V} = K_2 V \quad (5)$$

y por lo tanto,

$$\bar{U} \bar{V} = K V^2 \quad (6)$$

en la cual K es un coeficiente empírico que varía con la geometría de los contornos, y que cuantifica la intensidad de las corrientes secundarias. Reemplazando la ecuación (6) en la (2) y reordenando, se llega a

$$\rho g Y S_0 - \frac{1}{8} \rho f V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dy} \left(\rho \lambda Y^2 \sqrt{\frac{f}{8}} V \frac{dV}{dy} - Y \rho K V^2 \right) = 0 \quad (7)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, no lineal, no homogénea, que constituye la ecuación del método propuesto por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (método EBKS). Sin embargo, si se escribe la ecuación (7) en términos de V^2 , se obtiene

$$A_i u_i'' + B_i u_i' + C_i u_i = F_i, \quad u_i = V_i^2 \quad (8)$$

donde

$$A_i = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{f}{8}} Y_i^2, \quad B_i = Y_i \left(\lambda \sqrt{\frac{f}{8}} z - k \right), \quad C_i = - \left(\frac{f}{8} \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + kz \right), \quad F_i = -g Y_i S_0 \quad (9)$$

La ecuación (8) es una ecuación diferencial ordinaria lineal, y es la ecuación del Método de la Distribución Lateral con Corrientes Secundarias (LDM-SC).

5 SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL LDM-SC: EL MÉTODO EBKS

Ervine et al. (2000) propusieron la solución analítica de la ecuación (8), dado que la misma es lineal, para el canal de sección compuesta con meandros, y Weber y Menéndez (2005) aplicaron dicha solución a los datos experimentales publicados por Bernard y Schneider (1992). Ervine et al. (2000) presentaron el método EBKS para fondo plano y fondo lineal.

Fondo plano:

$$V^2 = \frac{8}{\rho f} \left(\beta + C_1 e^{\theta_1 y} + C_2 e^{\theta_2 y} \right) \quad (10)$$

Fondo lineal:

$$V^2 = \frac{8}{\rho f} \left(\frac{\beta'}{M+N} Y + C_1 Y^{\eta_1} + C_2 Y^{\eta_2} \right) \quad (11)$$

donde

$$\theta_1 = \frac{\varepsilon - \sqrt{4\alpha + \varepsilon^2}}{2\alpha}; \quad \theta_2 = \frac{\varepsilon + \sqrt{4\alpha + \varepsilon^2}}{2\alpha} \quad (12)$$

$$\eta_1 = \frac{L+M - \sqrt{(L+M)^2 + 4LN}}{2L}; \quad \eta_2 = \frac{L+M + \sqrt{(L+M)^2 + 4LN}}{2L} \quad (13)$$

$$L = \frac{\lambda}{2s^2} \sqrt{\frac{8}{f}}; \quad M = -2L - \frac{8k}{fs}; \quad N = \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} - \frac{8k}{fs} \quad (14)$$

$$\beta' = \rho g S_0; \quad \alpha = \frac{\lambda H^2}{2} \sqrt{\frac{8}{f}}; \quad \beta = \rho g H S_0; \quad \varepsilon = \frac{8KH}{f} \quad (15)$$

$$Y = Y(y) = H_0 - \frac{y - y_0}{s} \quad \text{función profundidad} \quad (16)$$

Los coeficientes C_1 y C_2 surgen de imponer las condiciones de contorno al problema, que como en todo problema de segundo orden deben ser dos. La condición de no deslizamiento impuesta en las márgenes transforma la ecuación (7) en un problema de contorno de solución trivial (a excepción del caso en que las márgenes estén constituidas por paredes verticales). Para evitar esta singularidad, se ha propuesto (Weber, 2003; Weber y Menéndez, 2003) imponer en un punto cercano a la margen (a una distancia δy) una velocidad baja (δx). Se ha mostrado (Tarrab, 2004) que la influencia de estos parámetros arbitrarios es sólo local, en las

cercanías de los márgenes, y no afecta significativamente el grueso del perfil de velocidades.

Si la sección geométrica tuviera algún tipo de discontinuidad (como por ejemplo un cambio de dirección), deben plantarse dos ecuaciones de compatibilidad en el punto de discontinuidad: continuidad en la propia función $V(y)$ y continuidad en la fuerza de corte aparente en la interfaz vertical. Para mayores detalles ver Weber y Menéndez (2003, 2005).

6 SOLUCIÓN DEL LDM-SC POR EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Para la solución en diferencias finitas de la ecuación (8) se reemplazan las derivadas primera y segunda de la función por los esquemas centrados

$$u_i'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \quad u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \tag{17}$$

Reordenando, se obtiene

$$\left(\frac{A_i}{h^2} - \frac{B_i}{2h}\right)u_{i-1} + \left(C_i - \frac{2A_i}{h^2}\right)u_i + \left(\frac{A_i}{h^2} + \frac{B_i}{2h}\right)u_{i+1} = F_i \tag{18}$$

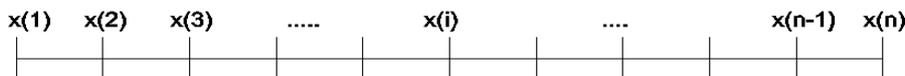


Figura 2. Discretización del dominio para el método de las diferencias finitas

que es el operador o molécula de cálculo de 3 puntos que, aplicado a los n nodos incógnita del dominio de solución (Figura 2), dan lugar al siguiente sistema lineal expresado en forma matricial:

$$M \cdot u = N \tag{19}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} C_2 - \frac{2A_2}{h^2} & \frac{A_2 + B_2}{h^2 + 2h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_3}{h^2} - \frac{B_3}{2h} & C_3 - \frac{2A_3}{h^2} & \frac{A_3 + B_3}{h^2 + 2h} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_4}{h^2} - \frac{B_4}{2h} & C_4 - \frac{2A_4}{h^2} & \frac{A_4 + B_4}{h^2 + 2h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{A_{n-2}}{h^2} - \frac{B_{n-2}}{2h} & C_{n-2} - \frac{2A_{n-2}}{h^2} & \frac{A_{n-2} + B_{n-2}}{h^2 + 2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{A_{n-1}}{h^2} - \frac{B_{n-1}}{2h} & C_{n-1} - \frac{2A_{n-1}}{h^2} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \dots \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{A_2}{h^2} - \frac{B_2}{2h}\right)u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \left(\frac{A_{n-1}}{h^2} + \frac{B_{n-1}}{2h}\right)u_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

En la expresión anterior, u_0 y u_n representan los cuadrados de las velocidades cercanas a los márgenes, que por las mismas razones indicadas en la solución analítica se deben elegir no

nulos y en forma arbitraria y razonable.

La implementación de la solución anterior se efectuó en el lenguaje GNUOctave (Eaton, 1997). En la figura 3 se muestra el procedimiento principal y dos funciones auxiliares de procesamiento.

```

% INICIO DEL PROGRAMA
clear; clearplot;
disp('***** SOLUCION NUMERICA DEL LDM-SC *****');
disp("");
nombre1=input('Ingrese el nombre del archivo de datos: ','s');
nombre2=input('Ingrese el nombre del archivo de mediciones: ','s');
matriz=load(nombre1);
mediciones=load(nombre2);

% PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION DE ENTRADA
[nro nro2]=size(matriz);
S0=matriz(1,1);g=matriz(1,2);ro=matriz(1,3);
N=matriz(1,4);V0=matriz(nro,4);
[y s H f L h K]=ldmsc_procesa(matriz,N,g,nro);

% ARMADO DEL SISTEMA DE ECUACIONES
a=(L/2.*sqrt(f/8).*H.^2)/h^2;
b=(H.*(L.*sqrt(f/8)./s-K))/(2*h);
c=-(f/8.*sqrt(1+1./s.^2)+K./s);
F=-g*H*S0;
[A B]=ldmsc_sistema(a,b,c,F,N,V0);

% SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
V=A\B';
V=sqrt(V);

% CAUDAL
Q=1000*sum(h*(V'.*H));
printf("Q = %.2f l/s\n",Q);

% GRAFICACION
plot(y,V_r,"calculado;"); grid('on');
xlabel('coord y (m)'); ylabel('V (m/s)');
hold on; plot(mediciones(:,1),mediciones(:,2),'*medido;');
replot

R=[y ; V'];

function [y s H f L h K]=ldmsc_procesa(matriz,N,g,nro)
matriz(2:nro,2)=-matriz(2:nro,2)+max(matriz(2:nro,2));
y0=matriz(2,1)+matriz(nro,3);
yder=y0-100;j=1;
h=(matriz(nro,1)-matriz(2,1)-2*matriz(nro,3))/(N-1);
y=y0:h:(matriz(nro,1)-matriz(nro,3));
for j=1:N
    if (y(j)>yder)
        i++;
        yizq=matriz(i,1);Hizq=matriz(i,2);
        yder=matriz(i+1,1);Hder=matriz(i+1,2);
        a=(Hder+Hizq)*(yder-yizq)/2;
        p=sqrt((Hder-Hizq)^2+(yder-yizq)^2);
        r=a/p;
        efe=(matriz(i,3)^2)/r^(1/3)*8*g;
    endif
    if (Hizq!=Hder)
        s(j)=(yder-yizq)/(Hder-Hizq);
    else
        s(j)=Inf;
    endif
    H(j)=(y(j)-yizq)/s(j)+Hizq;
    f(j)=efe;
    L(j)=matriz(i,4);
    K(j)=matriz(i,5);
endfor
endfunction

```

Figura 3: procedimientos y funciones en GNUOctave para el método de las diferencias finitas

```

function [A*B]=luisC_sistema(a,b,c,F,N,v0)
A1=diag(c-2*a);
A2=diag(a(1:N-1)+b(1:N-1),1);
A3=diag(a(2:N)-b(2:N),-1);
A=A1+A2+A3;
B=F;
B(1)=B(1)-(a(1)-b(1))*v0^2;
B(N)=B(N)-(a(N)+b(N))*v0^2;
endfunction

```

Figura 3: procedimientos y funciones en GNUOctave para el método de las diferencias finitas (continuación)

7 SOLUCIÓN DEL LDM-SC POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Para la solución por el método de los elementos finitos de la ecuación (8) se subdividió el dominio de integración según indica la figura 4 en elementos unidimensionales. Como método de aproximación se utilizó el de Galerkin, con funciones de forma lineales (Figura 4) de la forma (22).

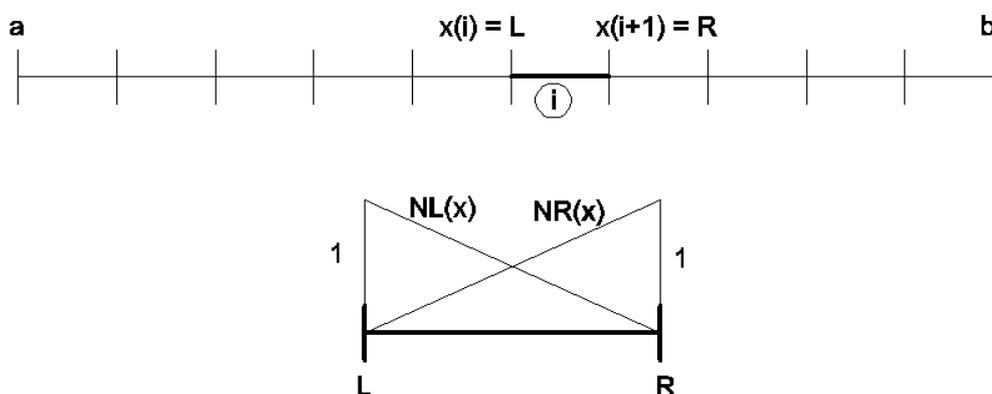


Figura 4: Malla y funciones de forma para el MEF

$$\hat{u}_i = N_L(x)u_L + N_R(x)u_R = u_L \frac{x-R}{L-R} + u_R \frac{x-L}{R-L} \quad (22)$$

Desarrollando la formulación débil de (8), integrando por partes y aplicando el método de Galerkin al elemento i -ésimo con la función de aproximación lineal (22), se llega a las ecuaciones de elemento (23):

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{h_i} - \frac{\alpha_i}{2} + \beta_i \frac{h_i}{3} & \frac{1}{h_i} + \frac{\alpha_i}{2} + \beta_i \frac{h_i}{6} \\ \frac{1}{h_i} - \frac{\alpha_i}{2} + \beta_i \frac{h_i}{6} & \frac{-1}{h_i} + \frac{\alpha_i}{2} + \beta_i \frac{h_i}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \frac{h_i}{2} + \hat{u}'_{(L)} \\ f_i \frac{h_i}{2} - \hat{u}'_{(R)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

o más sintéticamente,

$$\begin{pmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^i + \hat{u}'_{(L)} \\ F_2^i - \hat{u}'_{(R)} \end{pmatrix} \quad (24)$$

donde, según (9):

$$\alpha_i = \frac{B_i}{A_i}, \quad \beta_i = \frac{C_i}{A_i}, \quad f_i = \frac{F_i}{A_i} \quad (25)$$

Ensamblando el sistema, e imponiendo las condiciones esenciales descritas en el punto 5, se llega al sistema de ecuaciones lineales:

$$M \cdot u = N - Q \quad (26)$$

con

$$M = \begin{pmatrix} K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & K_{12}^4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21}^{n-2} & K_{22}^{n-2} + K_{11}^{n-1} & K_{12}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{21}^{n-1} & K_{22}^{n-1} + K_{11}^n \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} F_1 + F_2 \\ F_2 + F_3 \\ F_3 + F_4 \\ \dots \\ F_{n-2} + F_{n-1} \\ F_{n-1} + F_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} K_{21}^1 u_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ K_{12}^n u_{n+1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

La implementación de la solución anterior se efectuó en el lenguaje GNUOctave (Eaton, 1997). En la figura 5 se muestra el procedimiento principal y dos funciones auxiliares de procesamiento.

```
function [y s H f L h K]=procesa_mef(matriz,g,nro,N)
matriz(2:nro,2)=-matriz(2:nro,2)+max(matriz(2:nro,2));
y0=matriz(2,1)+matriz(nro,3);
yder=y0-100; i=1;
h=(matriz(nro,1)-matriz(2,1)-2*matriz(nro,3))/(N-1);
y=[y0:h:(matriz(nro,1)-matriz(nro,3))];
N=length(y); h=y(2:N)-y(1:N-1);
for j=1:N
    if (y(j)>yder)
        i++;
        yizq=matriz(i,1); Hizq=matriz(i,2);
        yder=matriz(i+1,1); Hder=matriz(i+1,2);
        a=(Hder+Hizq)*(yder-yizq)/2;
        p=sqrt((Hder-Hizq)^2+(yder-yizq)^2);
        r=a/p;
        efe=(matriz(i,3)^2)/r^(1/3)*8*g;
    endif
    if (Hizq!=Hder)
        s(j)=(yder-yizq)/(Hder-Hizq);
    else
        s(j)=Inf;
    endif
    H(j)=(y(j)-yizq)/s(j)+Hizq;
    f(j)=efe;
    L(j)=matriz(i,4);
    K(j)=matriz(i,5);
endfor
endfunction
```

Figura 5: procedimientos y funciones en GNUOctave para el método de los elementos finitos

```

% metodo de los elementos finitos
% condiciones de Dirichlet
function [A B] = mef_f(a,b,f,n,v0,x)
L=x(1:n-1); R=x(2:n); h=R-L;
k11=-1./h-a/2+b.*h/3;k12=1./h+a/2+b.*h/6;
k21=1./h-a/2+b.*h/6;k22=-1./h+a/2+b.*h/3;
F=f.*h/2;
A=diag(k22(1:n-2))+diag(k11(2:n-1))+...
diag(k21(2:n-2),-1)+diag(k12(2:n-2),1);
B=F(1:n-2)+F(2:n-1);
B(1)=B(1)-k21(1)*v0^2;B(n-2)=B(n-2)-k12(n-1)*v0^2;
endfunction

% INICIO DEL PROGRAMA
clear; clearplot;
disp('***** SOLUCION NUMERICA DEL LDM-SC *****');
disp('***** por el método de los elementos finitos *****');
disp("");
nombre1=input('Ingrese el nombre del archivo de datos: ','s');
nombre2=input('Ingrese el nombre del archivo de mediciones: ','s');
matriz=load(nombre1);
mediciones=load(nombre2);
% PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION DE ENTRADA
[nro nro2]=size(matriz);
S0=matriz(1,1);g=matriz(1,2);ro=matriz(1,3);
N=matriz(1,4);V0=matriz(nro,4);
[y s H f L h K]=procesa_mef(matriz,g,nro,N);
% ARMADO DEL SISTEMA DE ECUACIONES
a=(L/2.*sqrt(f/8).*(H.^2));
b=(H.*(L.*sqrt(f/8)./s-K));
c=-(f/8.*sqrt(1+1./s.^2))+K./s);
F=-g*H*S0;
alfa= (b(1:N-1)+b(2:N))./(a(1:N-1)+a(2:N));
beta= (c(1:N-1)+c(2:N))./(a(1:N-1)+a(2:N));
efe = (F(1:N-1)+F(2:N))./(a(1:N-1)+a(2:N));
% ENSAMBLADO DEL SISTEMA
[A B]=mef_f(alfa,beta,efe,N,V0,y);
% SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
V=A\B';
V=[V0 (sqrt(V))' V0];
% CAUDAL
Q=1000*sum(h.*(((V(1:N-1)+V(2:N))/2).*(H(1:N-1)+H(2:N))/2));
printf("Q = %.1f l/s\n",Q);
% GRAFICACION
plot(y,V,'w;calculado;'); grid('on');
xlabel('coord y (m)'); ylabel('V (m/s)');
hold on; plot(mediciones(:,1),mediciones(:,2),'w*;medido;');
replot

```

Figura 5: procedimientos y funciones en GNUOctave para el método de los elementos finitos (continuación)

8 CASO EXPERIMENTAL

La información experimental utilizada en el presente trabajo se obtuvo de la publicación de Bernard y Schneider (1992). Los trabajos experimentales fueron llevados a cabo por Maynard en un canal experimental denominado Channel Bend Facility (CBF en adelante), ubicado en la US Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS. La CBF tiene dos curvas inversas en forma de S y sección trapezoidal (Figuras 6 y 7).

Para el experimento a considerar, el caudal erogado es de 191 l/s, la pendiente longitudinal es de 2 ‰ y el coeficiente n de Manning de 0,019. La velocidad media del flujo de 0,58 m/s.

Las mediciones se efectuaron en las estaciones 1 a 5 indicadas en la Figura 6, y consistieron en 8 puntos en la dirección lateral en cada una de ellas.

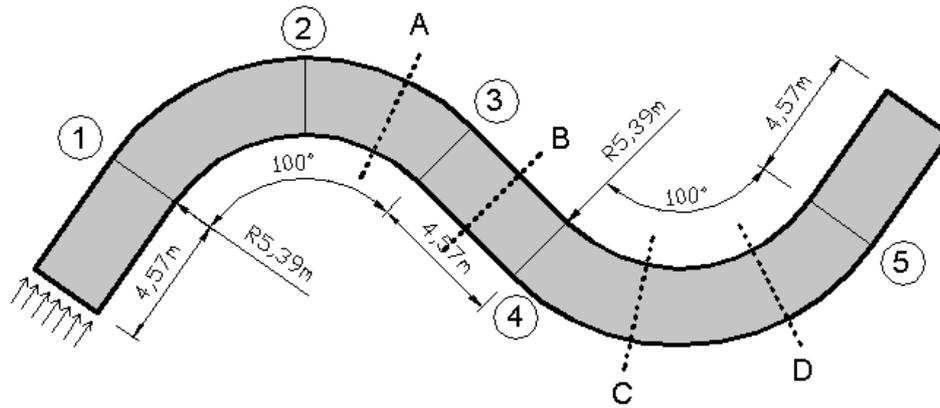


Figura 6: Planimetría de la Channel Bend Facility (CBF)

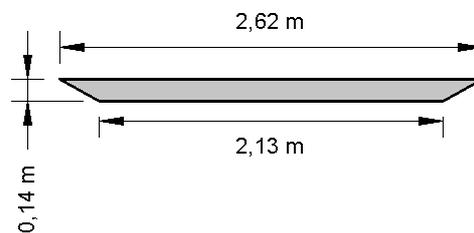


Figura 7: Sección transversal de la Channel Bend Facility (CBF)

9 RESULTADOS

En las figuras 8 a 12 se pueden observar los resultados de la aplicación tanto del MEF como el MDF a las cinco estaciones de medición de la *Channel Bend Facility*. En el caso del MDF, se trabajó con un paso $h = 3,29$ cm aproximadamente (80 nodos), mientras que en el MEF se trabajó con 80 elementos.

Como control rápido de la calidad de ajuste, se consideró el caudal obtenido por integración numérica del perfil lateral de velocidades, arrojando los resultados indicados en la Tabla 1. Las diferencias porcentuales se indican respecto al caudal publicado por Bernard y Schneider (1992), de 191 l/s.

Estación	MDF		MEF	
	Q (l/s)	Error (%)	Q (l/s)	Error (%)
1	199.4	+4.4	199.1	+4.2
2	197.0	+3.1	196.4	+2.8
3	194.5	+1.8	194.1	+1.6
4	190.3	-0.4	189.3	-0.9
5	192.0	+0.5	191.6	+0.3

Tabla 1: Caudales obtenidos por el MDF y el MEF.

Si bien en la Tabla 1 se inferiría una leve ventaja del MEF sobre el MDF, en las figuras 10 a 12 puede observarse que el perfil lateral de velocidades del MEF presenta cierta oscilación sobre la margen exterior de las curvas, más acentuada que la del MDF, y que ya ha sido observada en la propia solución analítica (Weber y Menéndez, 2005). En el resto del dominio de solución, prácticamente no se advierten diferencias entre el MDF y el MEF.

Estacion 1

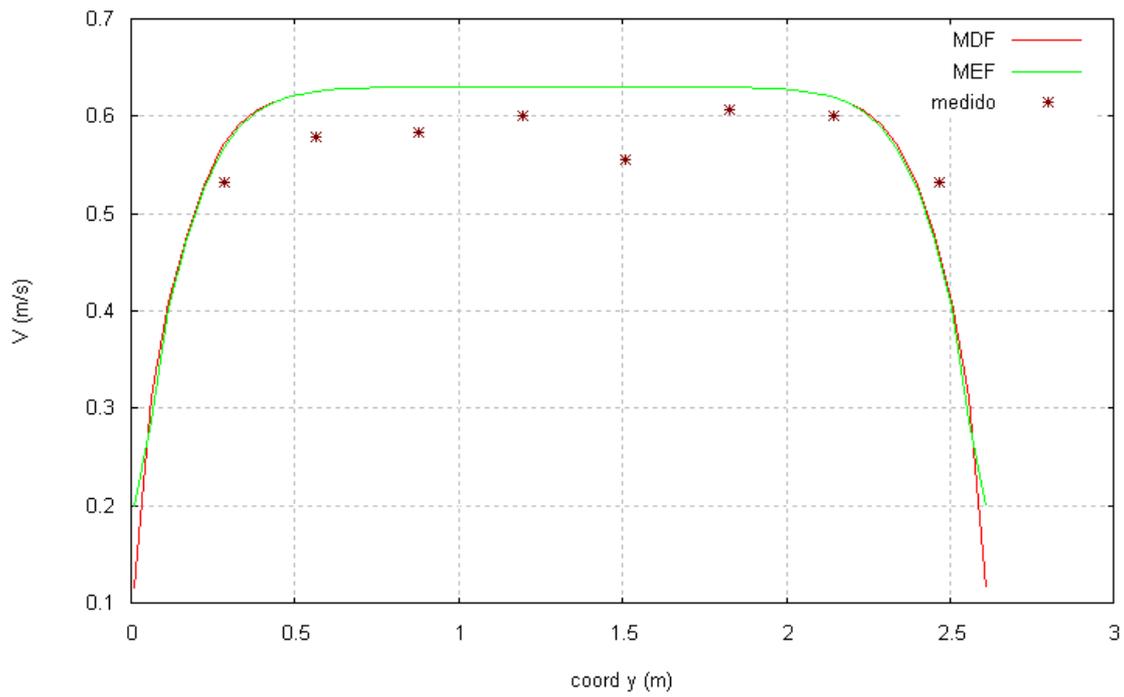


Figura 8: Perfil lateral de velocidades calculados y medido en Estación 1

Estacion 2

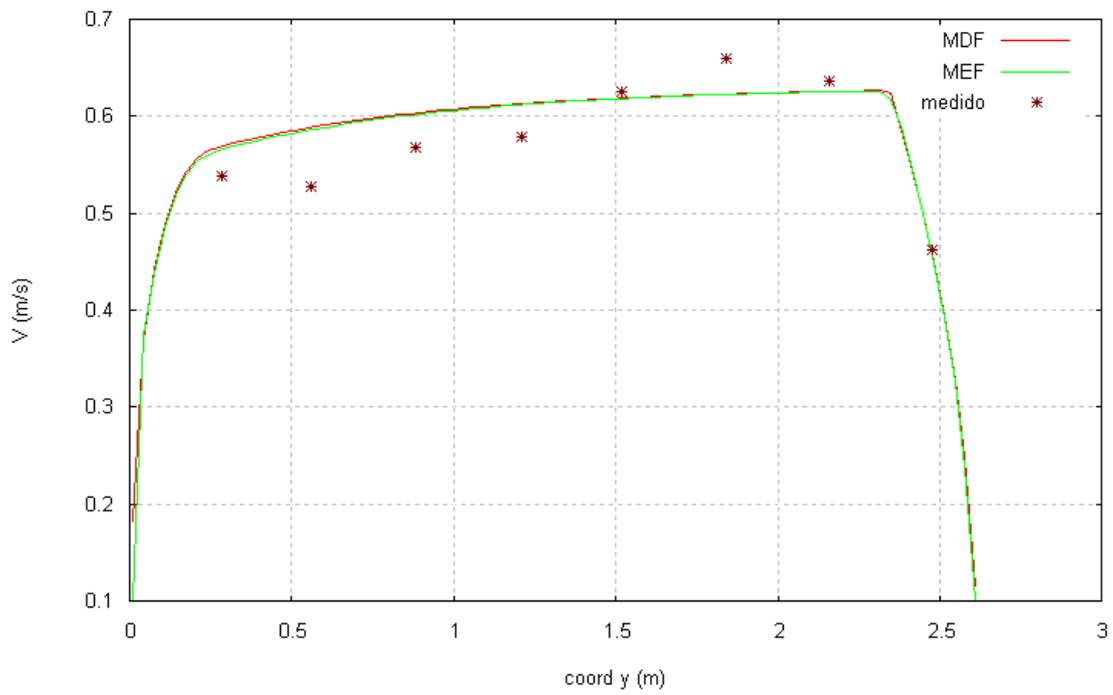


Figura 9: Perfil lateral de velocidades calculados y medido en Estación 2

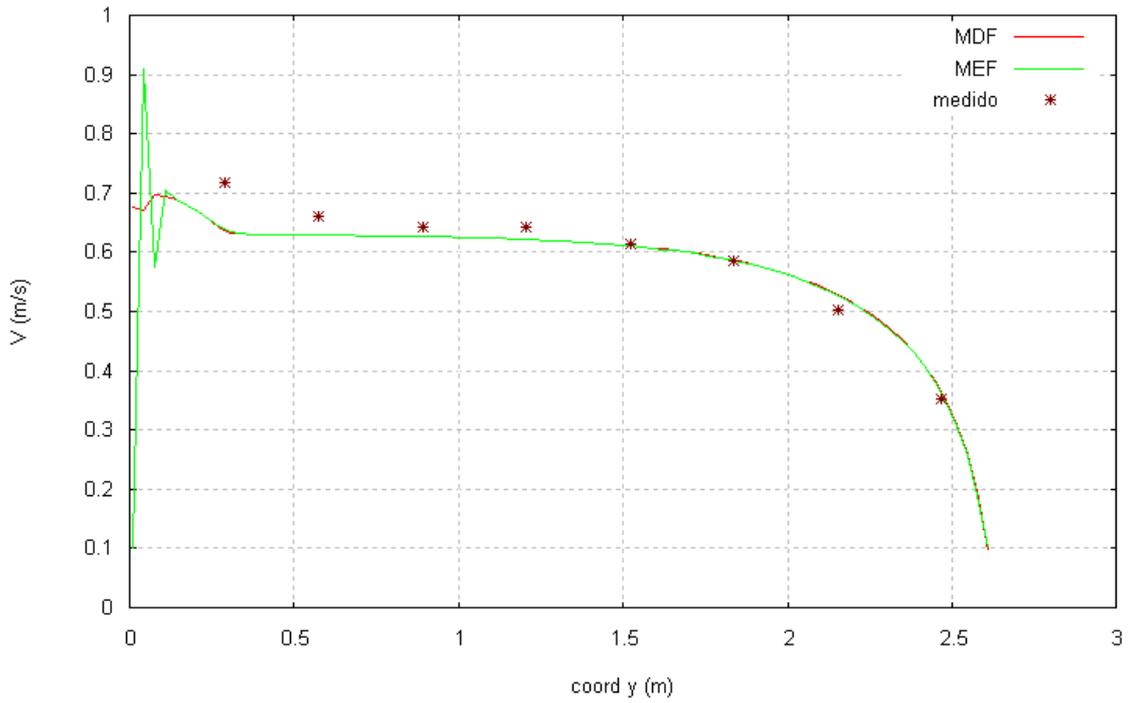


Figura 10: Perfil lateral de velocidades calculados y medido en Estación 3

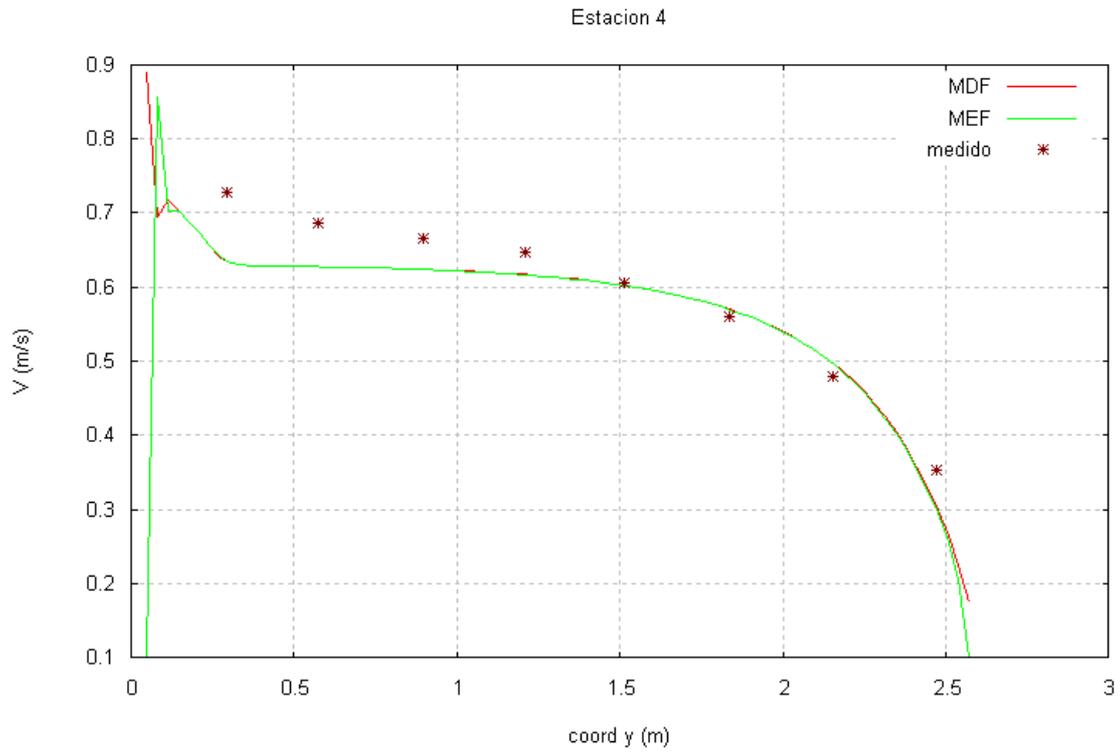


Figura 11: Perfil lateral de velocidades calculados y medido en Estación 4

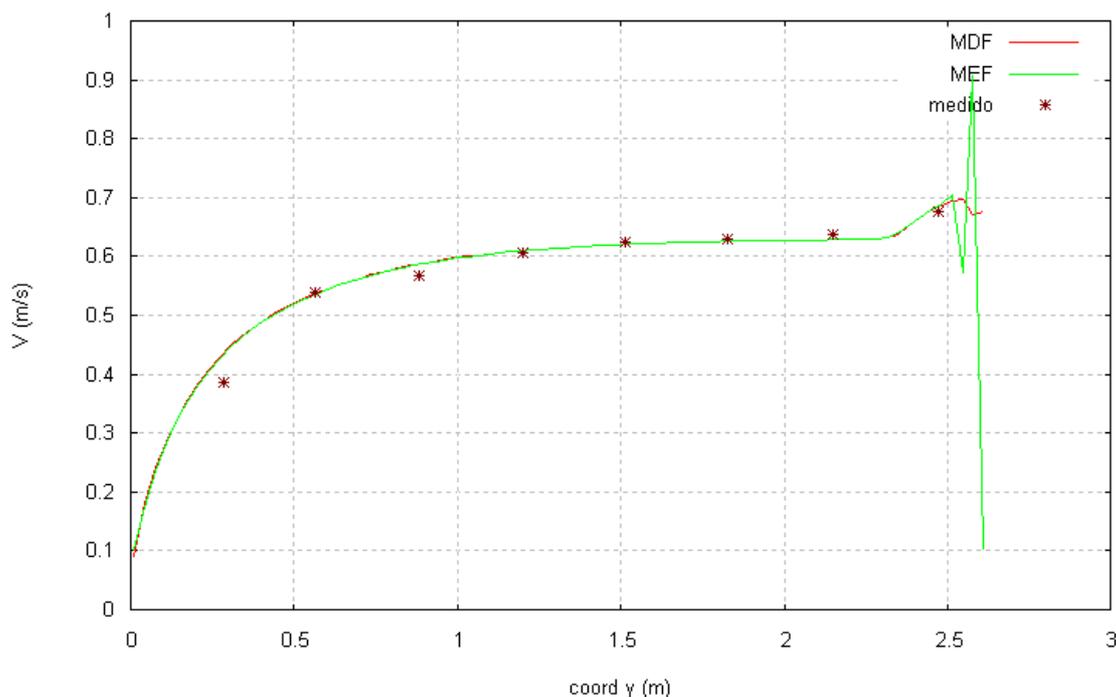


Figura 12: Perfil lateral de velocidades calculados y medido en Estación 5

10 CONCLUSIONES

Ha sido posible implementar la solución numérica de la ecuación diferencial que rige la distribución lateral de velocidades promediadas en la vertical tanto por el Método de las Diferencias Finitas como por el de los Elementos Finitos, en una forma relativamente simple y general, de sencilla aplicación respecto de la solución analítica.

Al igual que esta solución, se presenta cierta inestabilidad de la solución en la margen exterior de la curva. Esto podría estar asociado al hecho de mantener constante tanto el coeficiente K como el nivel de la superficie libre. Posteriores trabajos deberían corregir este último punto.

La implementación en el lenguaje GNUOctave ha permitido simplificar considerablemente la especificación del algoritmo, en base a las funciones de librería disponibles y a las herramientas de manejo matricial propias de este lenguaje.

11 AGRADECIMIENTOS

El primer autor desea agradecer a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Fac. Reg. Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional y a la Regional 1 del Colegio de Ingenieros Civiles de la provincia de Córdoba por el apoyo recibido.

REFERENCIAS

- R. S. Bernard, M. L. Schneider. *Depth-averaged Numerical Modeling for Curved Channels*. Technical Report HL 92-9, U.S. Army Corps of Engineers, Hydraulics Laboratory, Vicksburg, Mississippi. 1992.
- M. H. Chaudhry. *Open-Channel Flow*. Prentice Hall, New Jersey. 1993.
- A. Ervine, K. Babaeyan-Koopaei, R. Sellin. Two-dimensional solution for straight and meandering overbank flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vo. 126, No. 9: 653-669. 2000.

- Eaton, J. W. *GNU Octave: a high-level interactive language for numerical computations.* 1393
Mecánica Computacional, Vol XXV, pp. 1379-1393 (2006)
<ftp://ftp.che.wisc.edu/pub/octave>. 1997.
- K. Shiono, D. W. Knight. Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 222: 617-646, Great Britain. 1991.
- K. Shiono, D. W. Knight. Two-dimensional analytical solution for a compound channel. *Proceedings of 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, Japan, July (Ed. Y. Iwasa, N. Tamai y A. Wada): 503-510. 1988.
- L. Tarrab. *Estimación de la distribución lateral de velocidades: ríos argentinos*. Trabajo Final de Ingeniería Civil. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba. 2004.
- J. J. Thomson. On the windings of rivers in alluvial plains. *Proc. Roy. Soc. London*. 25: 5-8. 1876.
- J. F. Weber. *Modelación integrada uni y bidimensional de flujo en planicies de inundación*. Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería – mención en Recursos Hídricos. Universidad Nacional de Córdoba. 2003.
- J. F. Weber, A. N. Menéndez. Modelo LATERAL para simular la distribución lateral de velocidades en cauces naturales. *Mecánica Computacional*, XXII: 399-409. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Bahía Blanca. 2003.
- J. F. Weber, A. N. Menéndez. Modelación de la Distribución Lateral de Velocidades en Canales con Curvas. *Mecánica Computacional*, XXIV: 245-264. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Buenos Aires. 2005.