Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXVI, págs. 1109-1118 (artículo completo)
José G. Etse, Bibiana M. Luccioni, Martín A. Pucheta, Mario A. Storti (Eds.)
San Miguel de Tucumán, 6-9 Noviembre 2018

ANÁLISE DE UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS PARA O PROBLEMA DE STOKES COM ESTABILIZAÇÕES PARA VELOCIDADE E PRESSÃO

A HYBRID FINITE ELEMENT METHOD ANALYSIS FOR THE STOKES PROBLEM WITH VELOCITY AND PRESSURE STABILIZATIONS

Wesley Lourenço[1] **e Iury Igreja**[1]

[1] *Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, Juiz de Fora, 36036-900, MG, Brasil*

E-mail: wesley.r.jesus@hotmail.com; iuryigreja@ice.ufjf.br

Palavras-chave: problema de Stokes; métodos de elementos finitos; métodos mistos híbridos; método de Galerkin descontínuo; métodos estabilizados.

Resumo. Apresentamos uma análise numérica para uma formulação de elementos finitos híbrido misto com estabilizações para os campos de velocidade e pressão. Devido ao fato de que os métodos híbridos estão intimamente relacionados com os métodos de Galerkin descontínuo (DG), as demonstrações de estabilidade, continuidade e consistência utilizam o ferramental matemático já desenvolvido para os métodos DG. Assim, fazendo uma conexão do método híbrido com um método DG associado, a prova de existência e unicidade da formulação híbrida é obtida como uma consequência de resultados já conhecidos na literatura. Além disso, estimativas para o erro na norma da energia e na norma L^2 são desenvolvidas. Ao final, apresentamos testes numéricos que comprovam as taxas obtidas pela análise.

Keywords: Stokes problem; finite element methods; hybrid mixed methods; discontinuous Galerkin method; stabilized methods.

Abstract. We presente a numerical analysis for a mixed-hybrid finite element method with stabilizations for the velocity and pressure fields. Due to the fact that the hybrid methods are closely related to the Galerkin discontinuous (DG) methods, the stability, continuity and consistency demonstrations use the mathematical tools already developed for DG methods. Thus, by making a hybrid method connection with an associated DG method, proof of existence and uniqueness of the hybrid formulation is obtained as a consequence of results already known in the literature. In addition, estimates for the error in the energy and L^2 norm are developed. At the end, we presented numerical experiments that prove the rates obtained by the analysis.

1 INTRODUÇÃO

Métodos mistos de elementos finitos para o problema do escoamento incompressível governado pelas equações de Stokes têm sido amplamente abordado por diversos autores (Verfürth, 1984; Girault e Raviart, 1986; Brezzi e Fortin, 1991; Boffi et al., 2013). No entanto, o uso de aproximações simultânea dos campos de velocidade e pressão, restringem a flexibilidade na construção das aproximações por elementos finitos, devido a necessidade de compatibilidade entre estes espaços (Babuška, 1971; Brezzi, 1974). Espaços de aproximações comprovadamente bem sucedidos para tratar esta incompatibilidade foram apresentados nos trabalhos de Girault e Raviart (1986); Taylor e Hood (1973); Arnold et al. (1984). Por outro lado, métodos estabilizados, que utilizam termos de mínimos quadrados com o intuito de possibilitar o uso de espaços polinomiais lagrangianos de igual ordem para ambos os campos, podem ser vistos nos trabalhos Hughes e Franca (1987); Douglas Jr. e Wang (1989); Karam-Filho e Loula (1992).

Além das formulações clássicas de elementos finitos, nas últimas décadas métodos de Galerkin descontínuo (DG) têm sido propostos para a resolução dos problemas de Stokes (Baker et al., 1990; Toselli, 2002; Schötzau et al., 2003). Os métodos DG apresentam flexibilidade na implementação de estratégias de adaptatividade dos tipos h e p, além de possibilitar o uso de espaços de polinômios descontínuos por partes. Contudo, apesar das vantagens oferecidas pelos métodos de Galerkin descontínuo, em virtude de sua complexidade de formulação, implementação computacional e elevado número de graus de liberdade (principalmente em casos de alta ordem), hibridizações para os métodos DG foram propostas com o intuito de derivar métodos com melhores características de estabilidade e reduzido custo computacional mas preservando ainda as robustez e flexibilidade dos métodos DG (Egger e Waluga, 2013; Rhebergen e Wells, 2017; Igreja e Loula, 2017, 2018).

Diferentemente dos métodos DG, formulações híbridas permitem, a partir de escolhas adequadas, a eliminação dos problemas locais no nível de cada elemento da malha em favor do multiplicador de Lagrange, usando a técnica de condensação estática. Dessa forma, o sistema global envolve apenas os graus de liberdade associados com o multiplicador, reduzindo significativamente o custo computacional (Igreja e Loula, 2017, 2018). Neste contexto, este trabalho recorda o método proposto por (Igreja e Loula, 2017), que inclui termos de estabilização para a pressão na formulação introduzida e analisada por Egger e Waluga (2013), que apresenta estabilização apenas para o campo de velocidade, e desenvolve uma análise numérica para este método onde é provada consistência, estabilidade, continuidade e estimativas de erro nas normas da energia e L^2. Ao final, estudos de convergência comprovam as estimativas obtidas pela análise.

A estrutura do trabalho foi construída da seguinte maneira: Na seção 2, apresentamos notações e definições básicas, mas úteis para o desenvolvimento da análise. Além disso, é apresentado a formulação a ser analisada. Na seção 3, é feita a análise numérica, sendo definidas as normas utilizadas para demonstrações de continuidade e estabilidade. Na seção 4, serão exibidos resultados fundamentais para demonstração de estimativas de erro na norma da energia e na norma L^2. Por fim, na seção 5, são apresentadas conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção, introduzimos conceitos e definições necessárias para a introdução da metodologia híbrida, o problema modelo que será estudado e a formulação híbrida desenvolvida por Igreja e Loula (2017).

2.1 Notações e Definições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$) com contorno $\Gamma = \partial\Omega$ e considere $H^m(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev, munido das respectivas norma e semi-norma, $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ e $|\cdot|_{m,\Omega}$, com $m \geq 0$. No caso em que $m = 0$, temos $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)_{0,\Omega}$, o espaço das funções quadrado integráveis, definido por $L^2(\Omega) = \{q : \int_\Omega q \leq \infty\}$, cuja norma é dada por $\| q \|_0 = \| q \|_{L^2(\Omega)}$. O espaço $H_0^1(\Omega)$ é o espaço das funções em $H^1(\Omega)$, com traço nulo na fronteira. Semelhantemente, o subespaço $L_0^2(\Omega)$ é o espaço das funções em $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω.

Por simplicidade, restringimos ao caso bidimensional $(d = 2)$ e consideramos $\mathcal{T}_h$ uma discretização regular de um domínio Ω em elementos finitos K, descrita por $\mathcal{T}_h = \{K\} :=$ união de todos os elementos K do domínio Ω. Para cada aresta e dos elementos K, definimos os seguintes conjuntos: $\mathcal{E}_h = \{e; e$ é uma aresta de K para todo $K \in \mathcal{T}_h\}$ que denota o conjunto de todas as arestas e de todos os elementos K, $\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h; e$ é uma aresta interior$\}$ define o conjunto das arestas interiores, e $\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h; e \subset \partial\Omega\}$ o conjunto das arestas da fronteira de Ω. Consideramos que o domínio Ω é poligonal e que $\mathcal{T}_h$ é uma partição regular de Ω. Assim, existe $c > 0$, tal que $h \leq ch_e$, onde h_e é o diâmetro da aresta $e \in \partial K$ e h, o parâmetro da malha, é o diâmetro do elemento. Para cada elemento K, associamos um vetor normal unitário $\mathbf{n}_K$.

Para todo escalar $q_h \in \mathcal{E}_h$, introduzimos a semi-norma dependente da malha

$$|q_h|^2_{\pm 1/2,\mathcal{T}_h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |q_h|^2_{\pm 1/2,\partial K}, \qquad \text{onde} \qquad |q_h|_{\pm 1/2,\partial K} := h^{\pm 1/2}|q_h|_{0,\partial K}. \tag{1}$$

Para funções escalares $q_h \in H^m(\mathcal{T}_h)$, também definimos a norma e a semi-norma, respectivamente, como

$$\|q_h\|^2_{m,h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|q_h\|^2_{m,K} \qquad \text{e} \qquad |q_h|^2_{m,h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |q_h|^2_{m,K}. \tag{2}$$

Neste contexto, podemos definir as seguintes desigualdades (Arnold, 1982),

$$|\nabla \mathbf{u}_h\, \mathbf{n}_K|_{+1/2,\mathcal{T}_h} \leq C\|\nabla \mathbf{u}_h\|_{0,h} \quad \text{e} \quad |q_h|_{+1/2,\mathcal{T}_h} \leq C\|q_h\|_{0,h}. \tag{3}$$

2.2 Problema Modelo

Suponha o escoamento incompressível de um fluido viscoso e newtoniano em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Este pode ser modelado pelas equações de Stokes, definidas por meio do seguinte problema:

Dada a força $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$*, encontre o campo de velocidade* $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *e a pressão* $p : \Omega \to \mathbb{R}$*, tais que*

$$-\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \ \text{ em } \ \Omega, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \ \text{ em } \ \Omega, \tag{5}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \ \text{ sobre } \ \Gamma, \tag{6}$$

onde os operadores Δ, ∇ e div denotam o laplaciano, o gradiente e o divergente, respectivamente.

2.3 Método de Elementos Finitos Hibridos

Nesta seção, recordamos a formulação de elementos finitos híbrida para o problema de Stokes com estabilizações para a velocidade e a pressão, proposta por Igreja e Loula (2017). Para tanto, definimos o problema (4)-(6) em cada elemento K de uma partição $\mathcal{T}_h$, o que resulta em

$$-\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{em } K, \tag{7}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \text{em } K, \tag{8}$$

sujeita as seguintes condições de interface e contorno:

$$[\![\mathbf{u}]\!] = \mathbf{0}, \qquad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \tag{9}$$
$$[\![p\mathbf{I} - \nabla\mathbf{u}]\!] = \mathbf{0}, \qquad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \tag{10}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial, \tag{11}$$

onde $\mathbf{I}$ denota o tensor identidade e os operadores salto $[\![\cdot]\!]$ e $[\![\cdot]\!]$ são definidos nas arestas $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$ como

$$[\![\mathbf{A}]\!] = \mathbf{A}^+\mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{A}^-\mathbf{n}_{K^-} \quad \text{e} \quad [\![\mathbf{v}]\!] = \mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}_{K^-},$$

em que $\mathbf{A}$ é um tensor, $\mathbf{v}$ um vetor e $\otimes$ denota o produto tensorial.

Para introduzir a formulação híbrida, definimos os espaços de funções quebradas

$$\mathbf{V}_h^k = \{\mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h \in [\mathbb{S}_k(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{12}$$
$$Q_h^m = \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h \in \mathbb{S}_m(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{13}$$

onde $\mathbb{S}_k(K) = \mathbb{P}_k(K)$ é o espaço das funções polinomiais com grau até k, associadas com elementos triangulares ou, $\mathbb{S}_k(K) = \mathbb{Q}_k(K)$, o espaço das funções polinomiais com grau até k, associadas com elementos quadrilaterais.

Com o intuito de impor fracamente as condições (9) e (10), incluímos um multiplicador de Lagrange definido como $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}|_e$ nas arestas e dos elementos K pertencente ao espaço

$$\hat{\mathbf{V}}_h^k = \{\hat{\mathbf{v}}_h \in [L^2(\mathcal{E}_h)]^2 : \hat{\mathbf{v}}_h \in [p_k(e)]^2, \forall\, e \in \mathcal{E}_h,\ \hat{\mathbf{v}}_h|_e = \mathbf{0}, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \tag{14}$$

sendo $p_k(e)$ o espaço das funções polinomiais de grau menor do que ou igual a k sobre cada aresta e. Isso nos conduz ao método híbrido estabilizado desenvolvido e analisado por Egger e Waluga (2013), como segue.

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^m$ e o multiplicador de Lagrange $\hat{\mathbf{u}}_h \in \hat{\mathbf{V}}_h^k$, tais que, para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^m$ e $\hat{\mathbf{v}}_h \in \hat{\mathbf{V}}_h^k$,

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg[\int_K \nabla\mathbf{u}_h : \nabla\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} - \int_{\partial K}\nabla\mathbf{u}_h\,\mathbf{n}_K\cdot(\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h)ds - \int_{\partial K}\nabla\mathbf{v}_h\,\mathbf{n}_K\cdot(\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h)ds \\ + \beta_u\int_{\partial K}(\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h)\cdot(\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h)ds - \int_K p_h\,\operatorname{div}\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p_h\,(\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h)\cdot\mathbf{n}_K\,ds \\ + \int_{\partial K} q_h\,(\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h)\cdot\mathbf{n}_K\,ds - \int_K \operatorname{div}\mathbf{u}_h\,q_h\,d\mathbf{x}\Bigg] = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_h\,ds.\end{aligned} \tag{15}$$

Como pode ser visto em Igreja e Loula (2017), a formulação (15) não apresenta estabilidade dos problemas locais, o que impede, utilizando a metodologia de condensação estática, a eliminação dos graus de liberdade da velocidade e da pressão em cada elemento. Nessa direção, Igreja e Loula (2017) propuseram uma formulação incluindo um multiplicador de Lagrange relacionado a pressão nas arestas dos elementos, definido como $\hat{p} = p|_e$, pertencente ao espaço

$$\hat{Q}_h^k = \{\hat{q}_h \in L^2(\mathcal{E}_h) : \hat{q}_h \in p_k(e), \forall\, e \in \mathcal{E}_h\}, \tag{16}$$

que, além de permitir a solução dos problemas locais, ainda inclui uma estabilidade adicional a aproximação da pressão através da adição do seguinte termo de estabilização ao sistema (15):

$$\beta_p \int_{\partial K} (p_h - \hat{p}_h)(q_h - \hat{q}_h)\, ds. \tag{17}$$

Os parâmetros de estabilização β_u e β_p são definidos como

$$\beta_u = \frac{\beta_0}{h} \quad \text{e} \quad \beta_p = h\beta_1, \quad \text{com} \quad \beta_0 > 0. \tag{18}$$

3 ANÁLISE NUMÉRICA

A seguir, são apresentados resultados relativos às coercividade, continuidade, consistência e estimativas de erro para o método híbrido (15) em adição do termo de estabilização para a pressão (17). O método é definido como segue.

Encontrar o par $[\mathbf{u}_h, p_h] \in \mathbf{V}_h^k \times Q_h^m$ *e os multiplicadores de Lagrange* $[\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h] \in \hat{\mathbf{V}}_h^k \times \hat{Q}_h^k$, *tais que*

$$A(\mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h) = F(\mathbf{Y}_h), \ \ \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{W}_h, \tag{19}$$

onde $\mathbf{X}_h = [\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h]$, $\mathbf{Y}_h = [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]$ e $\mathbf{W}_h = \mathbf{V}_h^k \times \hat{\mathbf{V}}_h^k \times Q_h^m \times \hat{Q}_h^k$.

Para a análise do método híbrido estabilizado (19), adotamos as seguintes normas:

$$\|\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h\|^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h|_{-1/2,\partial K}^2, \tag{20}$$

$$\|q_h, \hat{q}_h\|^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|q_h\|_{0,K}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |q_h - \hat{q}_h|_{+1/2,\partial K}^2 \tag{21}$$

ou ainda,

$$\|\mathbf{Y}_h\|^2 = \|\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h\|^2 + \|q_h, \hat{q}_h\|^2. \tag{22}$$

Lema 3.1. ***Coercividade:*** *Existe* $\alpha > 0$, *independente de* h, *tal que*

$$\sup_{\mathbf{Y}_h\in\mathbf{W}_h} \frac{A(\mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h)}{\|\mathbf{Y}_h\|} \geq \alpha\|\mathbf{X}_h\|, \quad \forall \mathbf{X}_h \in \mathbf{W}_h. \tag{23}$$

Demonstração: escolhendo $\overline{\mathbf{Y}}_h = [\overline{\mathbf{v}}_h, \overline{\hat{\mathbf{v}}}_h, \overline{q}_h, \overline{\hat{q}}_h]$, com

$$[\overline{\mathbf{v}}_h, \overline{\hat{\mathbf{v}}}_h] := [\mathbf{u}_h + \xi\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_h + \xi\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}] \qquad \text{e} \qquad [\overline{q}_h, \overline{\hat{q}}_h] := [-p_h, -\hat{p}_h], \tag{24}$$

onde $\xi > 0$ e Π_h o operador projeção denominado operador Fortin, introduzido em Fortin (1977) (mais detalhes ver Egger e Waluga (2013)). Além disso, $\tilde{\mathbf{u}}$ pertence a $[H_0^1(\Omega)]^2$, satisfazendo (Di Pietro e Ern (2011), Teorema 6.5)

$$\text{div}\tilde{\mathbf{u}} = -p_h \qquad \text{e} \qquad \beta\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}\| \leq \|p_h\|. \tag{25}$$

Desse modo, utilizando as definições (24) e (25), obtemos

$$
\begin{aligned}
A(\mathbf{X}_h,\overline{\mathbf{Y}}_h) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Bigg[&\|\nabla\mathbf{u}_h\|_{0,K}^2 + \xi\int_K \nabla\mathbf{u}_h : \nabla\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}\,d\mathbf{x} - 2\int_{\partial K}\nabla\mathbf{u}_h\,\mathbf{n}_K\cdot(\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h)ds \\
&- \xi\int_{\partial K}\nabla\mathbf{u}_h\,\mathbf{n}_K\cdot(\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}})\,ds - \xi\int_{\partial K}(\nabla\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}\,\mathbf{n}_K)\cdot(\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h)\,ds \\
&+ \beta_0|\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h|_{-1/2,\partial K}^2 + \xi\frac{\beta_0}{h}\int_{\partial K}(\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h)\cdot(\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}})\,ds \\
&- \int_K p_h\,\mathrm{div}\,\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}\,d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p_h\,(\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{n}_K ds + \beta_1|q_h-\hat{q}_h|_{+1/2,\partial K}^2\Bigg]. \quad (26)
\end{aligned}
$$

Para limitar os termos acima à norma (22), definimos as formas $a([\mathbf{u}_h,\hat{\mathbf{u}}_h],\xi[\Pi_h\tilde{\mathbf{u}},\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}])$ e $b(p_h,\xi[\Pi_h\tilde{\mathbf{u}},\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}])$, que contemplam todos os termos não limitados de (26), exceto o termo abaixo, que pode ser limitado aplicando Cauchy-Schwarz, desigualdade de Young e a desigualdade (3), como segue.

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K}(\nabla\mathbf{u}_h\,\mathbf{n}_K)\cdot(\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h)\,ds &\le |\nabla\mathbf{u}_h\,\mathbf{n}_K|_{+1/2,\mathcal{T}_h}|\mathbf{v}_h-\hat{\mathbf{v}}_h|_{-1/2,\mathcal{T}_h}, \\
&\le C\|\nabla\mathbf{u}_h\|_{0,h}|\mathbf{v}_h-\hat{\mathbf{v}}_h|_{-1/2,\mathcal{T}_h}, \\
&\le C\Big(\frac{1}{2\delta}\|\nabla\mathbf{u}_h\|_{0,h}^2 + \frac{\delta}{2}|\mathbf{v}_h-\hat{\mathbf{v}}_h|_{-1/2,\mathcal{T}_h}^2\Big). \quad (27)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, seguindo Egger e Waluga (2013) para a forma $b(p_h,\xi[\Pi_h\tilde{\mathbf{u}},\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}])$, utilizando as propriedades do operador Fortin, integração por partes e a identidade (25), obtemos

$$
\begin{aligned}
b(p_h,\xi[\Pi_h\tilde{\mathbf{u}},\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}]) &= \xi\int_K\nabla p_h\cdot\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}\,d\mathbf{x} - \xi\int_{\partial K}p_h\,\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}_k\,ds, \\
&= \xi\int_K\nabla p_h\cdot\tilde{\mathbf{u}}\,d\mathbf{x} - \xi\int_{\partial K}p_h\,\tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}_K\,ds, \\
&= -\xi\int_K p_h\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}}\,d\mathbf{x} = \xi\|p_h\|_{0,h}^2. \quad (28)
\end{aligned}
$$

Finalmente, para a forma $a([\mathbf{u}_h,\hat{\mathbf{u}}_h],\xi[\Pi_h\tilde{\mathbf{u}},\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}])$, aplicando (27), a desigualdade de Young e agrupando os termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
a([\mathbf{u}_h,\hat{\mathbf{u}}_h],\xi[\Pi_h\tilde{\mathbf{u}},\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}]) \ge -\Bigg[&\Big(1+\frac{C}{2\delta}\Big)\|\nabla\mathbf{u}_h\|_{0,h}^2 + \Big(\frac{\delta C}{2}+\beta_0\Big)|\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h|_{-1/2,\mathcal{T}_h}^2 \\
&+\xi^2\Big(1+\frac{C}{2\delta}\Big)\|\nabla\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}\|_{0,h}^2 + \xi^2\Big(1+\frac{\delta C}{2}\Big)|\Pi_h\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\Pi}_h\tilde{\mathbf{u}}|_{-1/2,\mathcal{T}_h}^2\Bigg]. \quad (29)
\end{aligned}
$$

Os dois últimos termos da desigualdade (29) podem ser limitados por $\|p\|_{0,h}$ usando as propriedades do operador Fortin e a definição (25), como pode ser visto em Egger e Waluga (2013).

Coletando (27), (28) e (29) e substituindo em (26), obtemos $A(\mathbf{X}_h,\overline{\mathbf{Y}}_h)\ge\overline{C}(\xi,\beta_0,\delta)\|\mathbf{X}_h\|^2$. Além disso, $\|\overline{\mathbf{Y}}_h\|\le\hat{C}\|\mathbf{X}_h\|$, e assim fica provado o lema, com $\alpha=\overline{C}/\hat{C}$.

Lema 3.2. ***Continuidade:*** *Existem constantes $M_A < \infty$ e $M_F < \infty$, independentes de h, tais que*

$$|A(\mathbf{X},\mathbf{Y})| \leq M_A\|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\|, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbf{W}(\mathcal{T}_h) \;\; e \;\; \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{W}(\mathcal{T}_h), \tag{30}$$

$$|F(\mathbf{Y})| \leq M_F\|\mathbf{Y}\|, \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{W}(\mathcal{T}_h). \tag{31}$$

Demonstração: Direto do problema (26), aplicando Cauchy-Schwaz, a desigualdade (3) e $|\operatorname{div}\mathbf{v}_h| \leq \sqrt{2}|\nabla\mathbf{v}_h|$, geramos:

$$\begin{aligned}|A(\mathbf{X},\mathbf{Y})| \leq\ & \|\nabla\mathbf{u}\|_{0,h}\|\nabla\mathbf{v}\|_{0,h} + C\|\nabla\mathbf{u}\|_{0,h}|\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}|_{+1/2,\mathcal{T}_h} + C\|\nabla\mathbf{v}\|_{0,h}|\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}|_{+1/2,\mathcal{T}_h}\\ & + \beta_0|\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}|_{-1/2,\mathcal{T}_h}|\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}|_{-1/2,\mathcal{T}_h} + \sqrt{2}(\|p\|_{0,h}\|\nabla\mathbf{v}\|_{0,h} + \|q\|_{0,h}\|\nabla\mathbf{u}\|_{0,h})\\ & + \beta_1|p-\hat{p}|_{+1/2,\mathcal{T}_h}|q-\hat{q}|_{+1/2,\mathcal{T}_h} + C\|p\|_{0,h}|\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}|_{+1/2,\mathcal{T}_h} + C\|q\|_{0,h}|\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}|_{+1/2,\mathcal{T}_h}\\ & \leq \max\{1, C, \beta_0, \beta_1, \sqrt{2}\}\|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\|.\end{aligned} \tag{32}$$

Analogamente, a continuidade da forma $F(\mathbf{Y})$ segue da aplicação da desigualdade (Arnold, 1982) $\|\mathbf{v}\|_{1,h} \leq C\left(\|\nabla\mathbf{v}\|_{0,h} + |\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}|_{-1/2,\mathcal{T}_h}\right)$, para estimar

$$\begin{aligned}|F(\mathbf{Y})| &\leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{0,h} \leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,h} \leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}C\left(\|\nabla\mathbf{v}\|_{0,h} + |\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}|_{-1/2,\mathcal{T}_h}\right)^{1/2}\\ &\leq C\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{Y}\|.\end{aligned} \tag{33}$$

Lema 3.3. ***Consistência:*** *A formulação híbrida (19) é consistente se a solução exata $\mathbf{X} = [\mathbf{u}, p, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}]$ satisfaz*

$$A(\mathbf{X},\mathbf{Y}_h) = F(\mathbf{Y}_h), \;\; \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{W}_h. \tag{34}$$

Demonstração: Substituindo $(\mathbf{u}, p, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$ em (19), com os multiplicadores exatos dados por $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}|_{\partial K}$ e $\hat{p} = p|_{\partial K}$, os termos que contém multiplicadores se anulam, gerando

$$\begin{aligned}&\int_K \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}_h\, d\mathbf{x} - \int_{\partial K} \nabla\mathbf{u}\,\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v}_h ds + \int_{\partial K} (\nabla\mathbf{u} - p\mathbf{I})\mathbf{n}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}_h ds\\ &- \int_K p \operatorname{div}\mathbf{v}_h\, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p\,(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K)\, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h\, ds, \quad \forall[\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h] \in \mathbf{V}_h^k \times \hat{\mathbf{V}}_h^k\\ &- \int_K \operatorname{div}\mathbf{u}\, q_h\, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_h \in Q_h^m\end{aligned}$$

em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$. Considerando a condição (10) e integrando ambas as equações por partes, recuperamos o sistema local (7)-(8), demonstrando assim a consistência da formulação (19).

3.1 Estimativa de Erro na norma da Energia

Seja $\tilde{\mathbf{X}} := (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\hat{\mathbf{u}}}, \tilde{p}, \tilde{\hat{p}})$ a projeção de $\mathbf{X}$ no espaço $\mathbf{W}_h$. Neste contexto, a consistência do método (Lema 3.3) nos permite escrever o problema (19) como

$$A(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h) = A(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}, \mathbf{Y}_h). \tag{35}$$

Utilizando os resultados da coercividade (Lema 3.1) e continuidade (Lema 3.2), podemos escrever

$$\|\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right)\|\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|. \tag{36}$$

Direto do Lema 5.2 apresentado em Rhebergen e Wells (2017), temos que

$$\|\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\| \leq C(h^k|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + h^{l+1}|p|_{l+1,\Omega}),$$

que dá origem a seguinte estimativa para o erro na norma da energia:

$$\|\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_h\| \leq C_{eng}(h^k|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + h^{l+1}|p|_{l+1,\Omega}), \tag{37}$$

com $C_{eng} = C\left(1 + \frac{M}{\alpha}\right)$.

3.2 Estimativas de Erro na norma L^2

Para estimativas de erro na norma L^2, adotamos a estratégia usual. Para tanto, considere o problema auxiliar

$$-\Delta \mathbf{y} + \nabla s = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \quad \text{em } \Omega, \tag{38}$$

$$-\text{div}\, \mathbf{y} = 0, \quad \text{em } \Omega, \tag{39}$$

$$\mathbf{y} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma. \tag{40}$$

Introduzindo uma nova variável $\hat{y} = y|_e$, o problema auxiliar pode ser enunciado como

Encontre $\mathbf{Z} := [\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}, s, \hat{s}] \in \mathbf{W}_h$, tal que

$$A(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}\, d\mathbf{x}, \tag{41}$$

para todo $\mathbf{Y} \in \mathbf{W}$.

Escolhendo $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_h$, $q = p - p_h$ e $\hat{q} = \hat{p} - \hat{p}_h$, obtemos

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 = A(\mathbf{Y}, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h),$$

com $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}_h$ definidos como anteriormente. Utilizando a continuidade, ortogonalidade e simetrização de $A(\cdot, \cdot)$, temos

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 = A(\mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{X}_h) - A(\mathbf{X} - \mathbf{X}_h, \tilde{\mathbf{Z}}), \tag{42}$$

$$= A(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{X} - \mathbf{X}_h) \leq M\|\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}\|\, \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_h\|, \tag{43}$$

sendo $\tilde{\mathbf{Z}} := (\tilde{\mathbf{y}}_h, \tilde{\hat{\mathbf{y}}}_h, \tilde{s}_h, \tilde{\hat{s}}_h)$ a projeção de $\mathbf{Z}$. A estimativa de erro na norma da energia (37), juntamente com a desigualdade do traço [Di Pietro e Ern (2011), remark 9], nos permitem limitar a norma $\|\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}\|$ por

$$\|\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}\| \leq C_{eng} h\Big(|\mathbf{y}|_{2,\Omega} + |\text{div}\, \mathbf{y}|_{1,\Omega}\Big) \leq C_{eng} h|\mathbf{y}|_{2,\Omega}. \tag{44}$$

Adotando a regularidade de Brenner e Sung (1992), $|\mathbf{y}|_{2,\Omega} \leq C_f\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}$, obtemos a estimativa de erro para a velocidade na norma L^2, dada por

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2\Big(h^{k+1}\|\mathbf{u}\|_{k+1,K} + h^{l+1}\|p\|_{l,K}\Big). \tag{45}$$

Note, por outro lado, que um dos termos que definem a norma em (22) é dado pela estimativa de erro da pressão na norma L^2. Em virtude disso, temos

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_h\| \leq C_R\Big(h^k\|\mathbf{u}\|_{k+1,K} + h^{l+1}\|p\|_{l,K}\Big), \tag{46}$$

sendo a última desigualdade obtida diretamente do Lema 5.2 de Rhebergen e Wells (2017).

Portanto, os resultados (45) e (46) demonstram que, escolhendo-se aproximações nos espaços $\mathbf{V}_h^k$ e $\times Q_h^k$ ou $\mathbf{V}_h^k$ e $\times Q_h^{k-1}$, obtém-se

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{k+1} \quad \text{e} \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch^k. \tag{47}$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção apresenta resultados numéricos da formulação (19) analisada. Para as simulações, consideramos condições de contorno de Dirichlet, um domínio bidimensional $\Omega = (0,2)\times(0,2)$ e malhas de elementos triangulares com solução exata

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sin(\pi x)\cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x)\sin(\pi y) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = -2\pi\cos(\pi x)\cos(\pi y).$$

A Tabela 1 mostra os resultados numéricos das simulações. Os parâmetros k e l denotam ordens de aproximação para os campos de velocidade e pressão, respectivamente, $\boldsymbol{e}_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ é o erro associado à velocidade e $e_p = p - p_h$ o erro associado à pressão, ambos computados na norma L^2. As simulações foram realizadas utilizando refinamentos $h_{\mathbf{N}} = 2^{1-\mathbf{N}}$ e os parâmetros de estabilização $\beta_0 = \beta_1 = 1$ para $k = l = 1$ e $\beta_0 = \beta_1 = 22$ para os demais casos.

Tabela 1: Erro na norma L^2 e taxa de convergência.

(k,l)	N	$\|\boldsymbol{e}_u\|_{0,\Omega}$	Ordem	$\|e_p\|_{0,\Omega}$	Ordem
(1,1)	5	1.61E-02	1.98004	8.44E-02	1.95974
	6	4.04E-03	1.99497	2.22E-02	1.93625
	7	1.06E-03	1.99868	6.30E-03	1.80559
(2,1)	5	7.34E-04	3.31645	8.42E-02	2.13888
	6	8.60E-05	3.08670	2.03E-02	2.03877
	7	1.10E-05	3.00307	5.15E-03	2.01008
(2,2)	5	3.63E-04	3.03127	3.00E-02	1.91163
	6	4.74E-05	3.02238	7.31E-03	1.97296
	7	5.59E-06	2.96031	2.05E-03	1.99600

Os resultados numéricos apresentados na Tabela 1 comprovaram as taxas (47) obtidas na análise da formulação dual mista híbrida estabilizada (19). Todavia, um resultado melhor que o esperado para a pressão é obtido tomando $k = l = 1$, isto pode se dever a escolha apropriada de β_0 e β_1 ou ainda a solução analítica adotada.

5 CONCLUSÕES

Analisamos uma formulação de elementos finitos híbridos para o problema de Stokes. Na análise, provamos a condição inf-sup, estabilidade e continuidade do método. Como resultado da análise, concluímos que, quando utilizamos ordem mista de aproximação para os campos de velocidade e pressão, obtemos taxa ótima para as estimativas de erro na norma L^2, tanto para a velocidade, como para a pressão. Por outro lado, utilizando mesma ordem de aproximação para os respectivos campos, obtemos taxa ótima para o campo de velocidade e subótima para o campo de pressão. Os resultados numéricos atestaram os resultados demonstrados na análise e estes podem ser visualizados na Tabela 1.

REFERÊNCIAS

Arnold D.N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4):742–760, 1982.

Arnold D.N., Brezzi F., e Fortin M. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, (21):337–344, 1984.

Babuška I. Error bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16:322–333, 1971.

Baker G. A., Jureidini W. N., e Karakashian O. A. Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(6):1466–1485, 1990.

Boffi D., Brezzi F., Fortin M., et al. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44. Springer, 2013.

Brenner S.C. e Sung L.Y. Linear finite element methods for planar linear elasticity. *Mathematics of Computation*, 59(200):321–338, 1992.

Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle, Séries Rouge*, 8(R-2):129–151, 1974.

Brezzi F. e Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.

Di Pietro D.A. e Ern A. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, volume 69. Springer Science & Business Media, 2011.

Douglas Jr. J. e Wang J. An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem. *Mathematics of Computation*, 52(186):495–508, 1989.

Egger H. e Waluga C. hp analysis of a hybrid DG method for Stokes flow. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33:687–721, 2013.

Fortin M. An analysis of the convergence of mixed finite element methods. *RAIRO. Analyse numérique*, 11(4):341–354, 1977.

Girault V. e Raviart P.A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations - Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Germany, 1986.

Hughes T.J.R. e Franca L.P. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. the Stokes problems with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 65:85–96, 1987.

Igreja I. e Loula A.F. Stabilized velocity and pressure mixed hybrid DGFEM for the Stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017.

Igreja I. e Loula A.F.D. A stabilized hybrid mixed DGFEM naturally coupling Stokes-Darcy flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339:739 – 768, 2018.

Karam-Filho J. e Loula A.F.D. On stable equal-order finite element formulations for incompressible flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34:655–665, 1992.

Rhebergen S. e Wells G.N. Analysis of a hybridized/interface stabilized finite element method for the Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(4):1982–2003, 2017.

Schötzau D., Schwab C., e Toselli A. Mixed hp-DGFEM for incompressible flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40:2171–2194, 2003.

Taylor C. e Hood P. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Intenat. J. Computat. & Fluids*, 1:73–100, 1973.

Toselli A. hp-Discontinuous Galerkin approximations for the Stokes problem. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12:1565–1598, 2002.

Verfürth R. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 18(2):175–182, 1984.