

## MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS ESTABILIZADOS PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

### STABILIZED HYBRID FINITE ELEMENTS METHODS FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS

Wesley Lourenço<sup>1</sup> e Iury Igreja<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, Juiz de Fora, 36036-900, MG, Brasil

E-mail: wesley.r.jesus@hotmail.com; iuryigreja@ice.ufjf.br

**Palavras-chave:** Stokes; métodos de elementos finitos; métodos mistos híbridos; método de Galerkin descontínuo; métodos estabilizados.

**Resumo.** Neste trabalho, propomos métodos de elementos finitos híbridos estabilizados para a solução de escoamentos incompressíveis. Os métodos em questão se caracterizam pela introdução de multiplicadores, que tem por objetivo a imposição fraca das condições de continuidade entre os elementos. Devido a introdução de termos de estabilização, esta estratégia permite a condensação das informações dos elementos nas arestas, dando origem a um problema global que envolve somente os graus de liberdade dos multiplicadores de Lagrange. Uma vez que os multiplicadores são determinados, os problemas locais são resolvidos no nível do elemento. Neste contexto, aplicamos esta abordagem para a formulação de esquemas mistos híbridos e apresentamos resultados numéricos com o objetivo de avaliar as taxas de convergência obtidas para cada problema.

**Keywords:** Stokes; finite element methods; hybrid mixed methods; discontinuous Galerkin method; stabilized methods.

**Abstract.** In this work, we propose stabilized hybrid finite element methods for the solution of incompressible flows. The methods in question are characterized by the introduction of multipliers, which weakly impose conditions of continuity between the elements. Due to the introduction of stabilization terms, this approach allows the condensation of the information of the elements on the edges, giving rise to a global problem involving only the degrees of freedom of the Lagrange multipliers. Once the multipliers are determined, the local problems are solved at the element level. In this context, we apply this approach to the formulation of mixed hybrid schemes and present numerical results with the objective of evaluating the convergence rates obtained for each problem.

## 1 INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações de engenharia de petróleo, dinâmica de fluidos, hidrologia, dentre outros, obter a solução numérica de equações diferenciais parciais (EDP) que modelam problemas com escamento incompressível é, comumente, muito importante. Nas décadas passadas, muitos pesquisadores desenvolveram trabalhos considerando estas classes de problemas, em particular, problemas modelados pelas equações de Stokes, Oseen e Navier-Stokes. Dentre estes, podemos citar [Toselli \(2002\)](#), [Brezzi \(1974\)](#), [Baker et al. \(1990\)](#), [Montlaur et al. \(2008\)](#) e [Verfürth \(1984\)](#), que desenvolveram formulações de Galerkin Descontínuo (DG) para o problema de Stokes. Além destes, [Bassi e Rebay \(1997\)](#) apresentou soluções numéricas para uma formulação que trata o problema de Navier-Stokes, enquanto [Cockburn et al. \(2005\)](#), [Rivière e Girault \(2006\)](#), [Cockburn et al. \(2009\)](#) propuseram e analisaram formulações de DG para equações de Oseen e Navier-Stokes.

Todos os trabalhos citados acima utilizaram formulações clássicas mistas de Galerkin Descontínuo para aproximar, simultaneamente, os campos de velocidade e pressão. Porém, esta abordagem não é muito viável, uma vez que restringe a flexibilidade com a qual se constrói as aproximações via método de elementos finitos ([Babuška, 1971](#) e [Brezzi, 1974](#)). Outra desvantagem presente neste tipo de abordagem é que, quando se utiliza elementos lagrangianos com mesma ordem para velocidade e pressão, obtém-se instabilidade na solução ([Brezzi e Fortin, 2012](#)). [Crouzeix e Raviart \(1973\)](#) desenvolveram uma formulação utilizando espaços de aproximação estáveis, resolvendo, assim, o problema da incompatibilidade e, com isso, a instabilidade no caso em que se atribuía mesma ordem de aproximação para a velocidade e para a pressão. Por outro lado, [Filho e Loula \(1992\)](#) e [Hughes et al. \(1986\)](#) são exemplos de formulações estabilizadas, caracterizadas pela introdução de termos, no mesmo sentido dos mínimos quadrados, para estabilização de suas formulações mistas permitindo, então, a atribuição de mesma ordem para os campos de velocidade e pressão.

Vale salientar a relevância de alguns trabalhos, quando o assunto é formulações mistas híbridas com estabilizações, veja, por exemplo, alguns que trataram o problema de Stokes, são eles: [Egger e Waluga \(2012\)](#), que apresentaram e analisaram uma formulação para o problema de Stokes, considerando malhas híbridas e irregulares, em duas ou três dimensões; [Igreja e Loula \(2017\)](#) que também propuseram a solução numérica de uma formulação para o problema de Stokes, porém, com estabilizações, tanto para o campo de velocidade como para o campo de pressão. Além disso, comprovaram taxa ótima de convergência na norma  $L^2$  com elementos triangulares, quadráticos, atribuindo mesma ordem para os campos de velocidade e pressão e ordem mista; [Rhebergen e Wells \(2017\)](#) propuseram e analisaram uma formulação com estabilizações para os campos de velocidade e pressão do problema de Stokes, considerando em sua análise, mesma ordem e ordem mista para aproximações dos campos de velocidade e pressão. Recentemente, [Igreja e Loula \(2018\)](#) propuseram uma formulação com estabilização apenas para o campo de velocidade, na qual trata o problema acoplado de Stokes-Darcy.

Neste contexto de métodos estabilizados, propomos formulações mistas híbridas com estabilizações para os campos de velocidade e pressão para modelar três problemas distintos, a saber: problema de Stokes, o problema de Oseen e o problema de Navier-Stokes, sendo que, para os dois primeiros, apresentamos resultados numéricos para estudo da ordem de convergência na norma  $L^2$ .

A estrutura do trabalho foi construída da seguinte maneira: na seção 2, apresentamos notações e definições básicas para o desenvolvimento das formulações, bem como a formulação propriamente dita. Na seção 3, realizamos simulações para ambos os problemas e, na seção 4,

são apresentadas conclusões do trabalho.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS E PROBLEMA MODELO

Nesta seção, são apresentadas definições e conceitos necessários para a compreensão das formulações, introduzidas nas seções seguintes.

### 2.1 Conceitos Básicos

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ) com contorno  $\Gamma = \partial\Omega$  e considere  $H^m(\Omega)$  o espaço usual de Sobolev, munido das respectivas norma e semi-norma,  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$  e  $|\cdot|_{m,\Omega}$ , com  $m \geq 0$ . Símbolos em negrito denotam vetores ou tensores. Definindo vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$  e matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , seja  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  o tensor com componentes  $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} = v_i w_j$  e  $\mathbf{A} : \mathbf{B}$  o produto escalar entre dois tensores. Por simplicidade, restringimos nossa pesquisa ao caso bidimensional ( $d = 2$ ) e consideramos  $\mathcal{T}_h$  uma discretização regular de  $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$  em elementos finitos  $K$ . Por  $\mathcal{E}_h$ , denotamos o conjunto de aresta  $e$  de cada elemento  $K$ ;  $\mathcal{E}_h^0$  define o conjunto das arestas interiores, e  $\mathcal{E}_h^\partial$ , o conjunto das arestas da fronteira de  $\Omega$ . Consideramos  $\Omega$  um domínio poligonal e  $\mathcal{T}_h$  uma partição regular de  $\Omega$ . Desse modo, existe  $c > 0$ , tal que  $h \leq ch_e$ , onde  $h_e$  é o diâmetro da aresta  $e \in \partial K$  e  $h$ , o diâmetro do elemento. Para cada elemento  $K$ , associamos um vetor normal unitário  $\mathbf{n}_K$ .

### 2.2 Problema Modelo

Denote  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio com fronteira  $\Gamma = \partial\Omega$ . O problema é definido como segue: *Dada uma força de corpo prescrita  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  e a viscosidade cinemática  $\nu$ , encontre os campos de velocidade  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  e pressão  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que*

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{em } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Gamma,$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad \text{em } \Gamma. \quad (3)$$

Nas equações (1)-(3),  $\mathbf{w} = 0$  define o problema de Stokes;  $\mathbf{w} = \beta$  conhecido, denota o problema de Oseen, e  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ , caracteriza o problema de Navier-Stokes. O símbolo  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário, normal à  $\Gamma$ . Existência e unicidade são garantidas pelo Teorema de Brezzi, para  $\mathbf{w} = 0$  (Brezzi, 1974); no caso em que  $\mathbf{w} = \beta$ , o problema possui uma única solução (veja, por exemplo Cockburn et al. (2004), Brezzi e Fortin (2012) e Cuvelier et al. (1986)); por fim, para o problema incompressível de Navier-Stokes ( $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ ), existência e unicidade foram demonstradas (veja Temam (2001)).

### 2.3 Formulação Variacional Clássica

Temos interesse em obter a formulação variacional do problema modelo. Para tanto, multiplicamos, por uma função  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ , a equação (1); multiplicamos por uma função  $q \in L_0^2(\Omega)$ , a equação (2), integramos ambas equações sobre  $\Omega$  e aplicamos integração por partes. Com isso, a formulação fraca mista dual clássica para o problema modelo é definida como:

Encontrar o par  $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ , de modo que

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{u} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Gamma} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

## 2.4 Método de Elementos Finitos Híbridos

Nesta seção, apresentaremos formulações de elementos finitos híbridos estabilizados para os problemas de Stokes, Oseen e Navier-Stokes. Para tal, definimos o problema (1)-(3) em cada elemento  $K$  de uma partição  $\mathcal{T}_h$ , resultando no seguinte problema local:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{em } K, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } K, \quad (5)$$

suplementado pelas condições de contorno e interface abaixo.

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \quad (6)$$

$$[[\mathbf{u}]] = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (7)$$

$$[[p\mathbf{I} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}]] = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (8)$$

em que  $\mathbf{I}$  define o tensor identidade. Os operadores salto  $[[\cdot]]$  e  $[[[\cdot]]]$  são definidos nas arestas  $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$  dos elementos como segue.

$$[[\mathbf{A}]] = \mathbf{A}^+ \mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{A}^- \mathbf{n}_{K^-} \quad \text{e} \quad [[[\mathbf{v}]]] = \mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}_{K^+} + \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}_{K^-},$$

sendo  $\mathbf{A}$  um tensor,  $\mathbf{v}$  um vetor e  $\otimes$  o produto tensorial.

Seguindo procedimentos análogos aos realizados para a descrição da formulação fraca mista dual clássica, multiplicamos a equação (4) por uma função  $\mathbf{v} \in [H_0^1(K)]^2$  e aplicamos a técnica de integração por partes. Posteriormente, multiplicamos a equação (5) por uma função  $q \in L_0^2(K)$  e temos como resultado,

$$\begin{aligned} \nu \int_K \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u} \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_K (\mathbf{w} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ - \int_K p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ - \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

A solução do problema anterior encontra-se em espaços de dimensão infinita, isto é,  $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(K)]^2 \times L_0^2(K)$ . É possível definir o problema (9) em espaços de dimensão finita  $\mathcal{V}_h^k$  e  $\mathcal{Q}_h^l$ , definidos abaixo.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h^k &= \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v} \in [\mathbb{P}_k(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ \mathcal{Q}_h^l &= \left\{ q \in L^2(\Omega) : q \in \mathbb{P}_l(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{P}_k(K)$  representa o espaço das funções polinomiais com grau menor do que ou igual a  $k$ . Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \, \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds + \int_K (\mathbf{w} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Temos, em (10), um problema definido em cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ . Sendo assim, para estabelecer uma relação entre estes elementos, introduzimos em suas arestas, multiplicadores de Lagrange  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}|_e$  e  $\hat{p} = p|_e$ , pertencentes aos espaços  $\hat{\mathcal{V}}_h^k$  e  $\hat{\mathcal{Q}}_h^l$ , respectivamente. Os espaços em questão são definidos como

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}}_h^k &= \left\{ \hat{\mathbf{v}}_h \in [L^2(\mathcal{E}_h)]^2 : \hat{\mathbf{v}}_h \in [p_k(e)]^2, \forall e \in \mathcal{E}_h, \hat{\mathbf{v}}_h|_e = \mathbf{0}, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \right\}, \\ \hat{\mathcal{Q}}_h^l &= \left\{ \hat{q}_h \in L^2(\mathcal{E}_h) : \hat{q}_h \in p_k(e), \forall e \in \mathcal{E}_h \right\}, \end{aligned}$$

os quais nos permite definir o problema modelo da seguinte maneira: *Encontre  $\mathbf{u}_h|_K \in \mathcal{V}_h^k$  e  $p_h|_K \in \mathcal{Q}_h^l$ , de modo que*

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \nu \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{w} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \, \mathbf{n}_K) \cdot \mathbf{v}_h \, ds \right. \\ \left. - \int_{\partial K} \nabla \mathbf{v}_h \, \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds + \beta_u \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds \right. \\ \left. - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds \right. \\ \left. - \beta_p \int_{\partial K} q_h (p_h - \hat{p}_h) \, ds \right] = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, ds, \end{aligned} \quad (11)$$

para todo  $\mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{V}_h^k$  e  $q_h|_K \in \mathcal{Q}_h^l$ .

Uma vez que duas novas variáveis foram adicionadas ao problema (10), a saber,  $\hat{\mathbf{u}}_h$  e  $\hat{p}_h$ , é imprescindível que tenhamos mais duas equações para que o sistema fique completo. Nesse contexto, introduzimos as equações dos multiplicadores,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \, \mathbf{n}_K) \cdot \hat{\mathbf{v}}_h \, ds - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta_u \int_{\partial K} \hat{\mathbf{v}}_h \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds &= 0, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \hat{q}_h \, ds + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta_p \int_{\partial K} \hat{q}_h \cdot (p_h - \hat{p}_h) \, ds &= 0, \end{aligned}$$

em que  $\beta_u$  e  $\beta_p$  são parâmetros de estabilização para as velocidade e pressão, respectivamente, sendo

$$\beta_u = \frac{\mu \beta_0}{h} \quad \text{e} \quad \beta_p = \frac{h \beta_1}{\mu}, \quad \text{com} \quad \beta_0 > 0 \quad \text{e} \quad \beta_1 \geq 0.$$

A efeito de simplificação, o problema pode ser reescrito como segue.

Encontre  $(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) \in \mathcal{V}_h^k \times \hat{\mathcal{V}}_h^k$  e  $(p_h, \hat{p}_h) \in \mathcal{Q}_h^l \times \hat{\mathcal{Q}}_h^l$ , de modo que

$$\mathbf{B}_h([\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) = \mathbf{F}_h([\mathbf{v}_h, q_h]), \quad (12)$$

para todo  $\mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{V}_h^k$  e  $q_h|_K \in \mathcal{Q}_h^l$ , com

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_h([\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h, p_h, \hat{p}_h], [\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h, q_h, \hat{q}_h]) := & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{w} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \right. \\ & - \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{n}_K) \cdot (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \, ds - \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_K) \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds - \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ & + \beta_u \int_{\partial K} (\mathbf{v}_h - \hat{\mathbf{v}}_h) \cdot (\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h) \, ds - \beta_p \int_{\partial K} (q_h - \hat{q}_h)(p_h - \hat{p}_h) \, ds + \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K) \, ds \\ & \left. - \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_K) \hat{q}_h \, ds \right] \end{aligned} \quad (13)$$

e 
$$\mathbf{F}_h([\mathbf{v}_h, q_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}.$$

### 3 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção, são exibidos alguns resultados numéricos para os problemas de Stokes e Oseen. Para cada simulação, foram impostas condições de contorno de Dirichlet, por meio do traço da velocidade  $\mathbf{u}$  em  $\Gamma$ . Ambos problemas foram simulados em uma malha de domínio bidimensional  $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$ , discretizada com elementos triangulares. Inicialmente, são apresentados os resultados do estudo da  $h$ -convergência para o problema de Stokes e, posteriormente, para o problema de Oseen.

#### 3.1 Problema de Stokes

Os estudos envolvendo o problema de Stokes foram realizados em um domínio bidimensional, com solução exata

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = -2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y),$$

considerando

$$\mathbf{f} = 2\pi^2 \begin{bmatrix} (1 + \nu) \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ (1 - \nu) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{bmatrix}.$$

Em todas as simulações, as aproximações para velocidade e pressão foram obtidas utilizando elementos triangulares  $\mathbf{P}_k \mathbb{P}_l - p_m$  do espaço de Lagrange, em que  $k$ ,  $l$  e  $m$  definem, respectivamente, os graus dos espaços polinomial da velocidade, da pressão e do multiplicador associado à pressão. Além disso, escolhemos  $\nu = 1,0 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Neste contexto, são realizadas três simulações para o problema de Stokes ( $\mathbf{P}_1 \mathbb{P}_1 - p_1$ ,  $\mathbf{P}_2 \mathbb{P}_1 - p_2$  e  $\mathbf{P}_2 \mathbb{P}_2 - p_2$ ), para as quais definimos, respectivamente, os seguintes parâmetros de estabilização:  $\beta_0 = \beta_1 = 12, 24$  e  $24$ .

### 3.1.1 Estudio de convergência

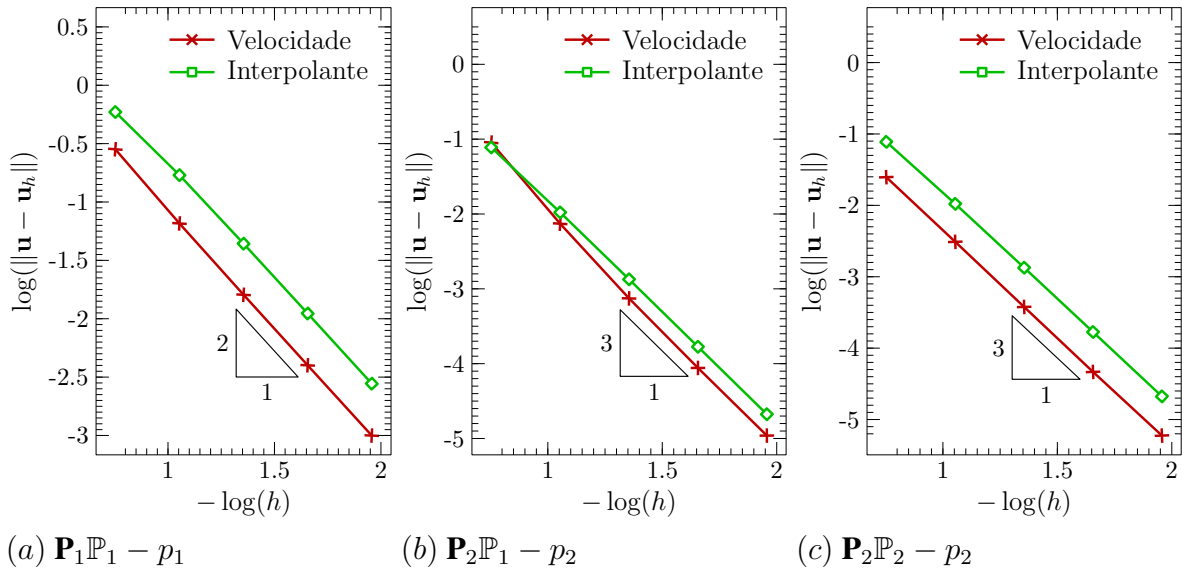


Figura 1: Estudio h-convergência da aproximação para a velocidade  $\mathbf{u}_h$  em comparação com a interpolante. (a)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$ ; (b)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_2 - p_2$  e (c)  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ .

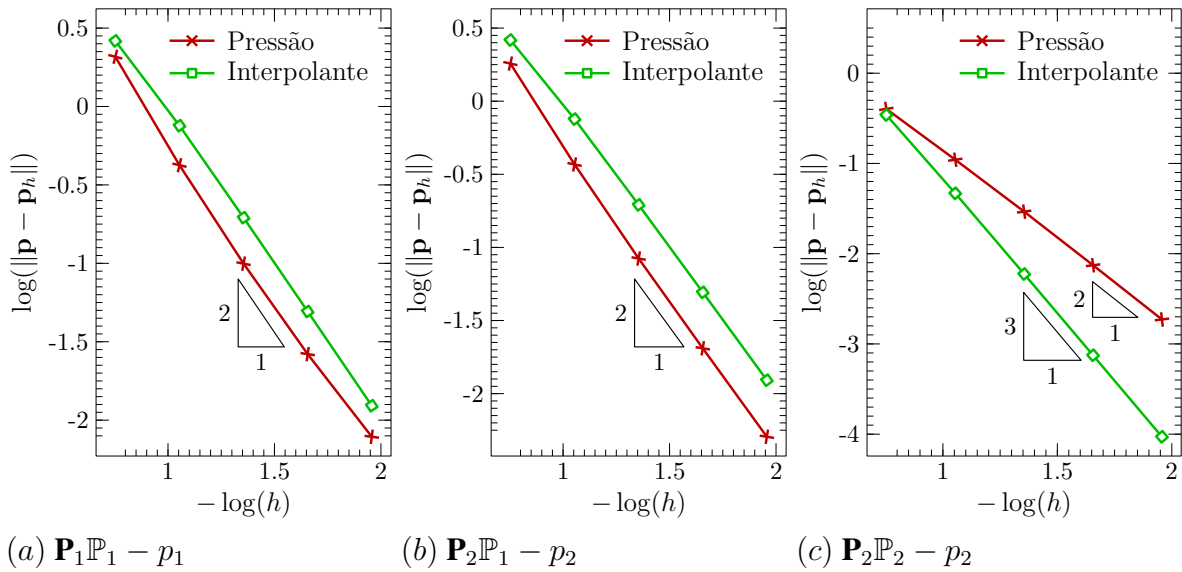


Figura 2: Estudio h-convergência da aproximação para a pressão  $p_h$  em comparação com a interpolante. (a)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$ ; (b)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_2 - p_2$  e (c)  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ .

As Figuras 1 e 2 mostram a  $h$ -convergência para o problema de Stokes. Note que obtivemos taxa ótima para o campo de velocidade em todas as simulações (ver Figura 1). Já para o campo de pressão, obtivemos taxa subótima na simulação  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$  (ver Figura 2).

### 3.2 Problema de Oseen

Para o problema de Oseen, consideramos a solução exata desenvolvida por Kovasznay (1948). Dado o número de Reynolds  $\Re$ , definimos a viscosidade  $\nu = 1/\Re$  e  $\lambda = \frac{\Re}{2} - \sqrt{\frac{\Re^2}{4} + 4\pi^2}$ . Com

isso,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 - \exp(\lambda x) \cos(2\pi y) \\ \frac{\lambda}{2\pi} \exp(\lambda x) \sin(2\pi y) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{2} \exp(2\lambda x) + c_0, \quad \text{com } c_0 \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

A constante  $c_0$  é encontrada integrando a equação da pressão (14) e igualando a zero. Além disso, escolhemos  $\nu = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  e os parâmetros de estabilização:  $\beta_0 = \beta_1 = 12,24$  e  $24$ .

### 3.2.1 Estudo de convergência

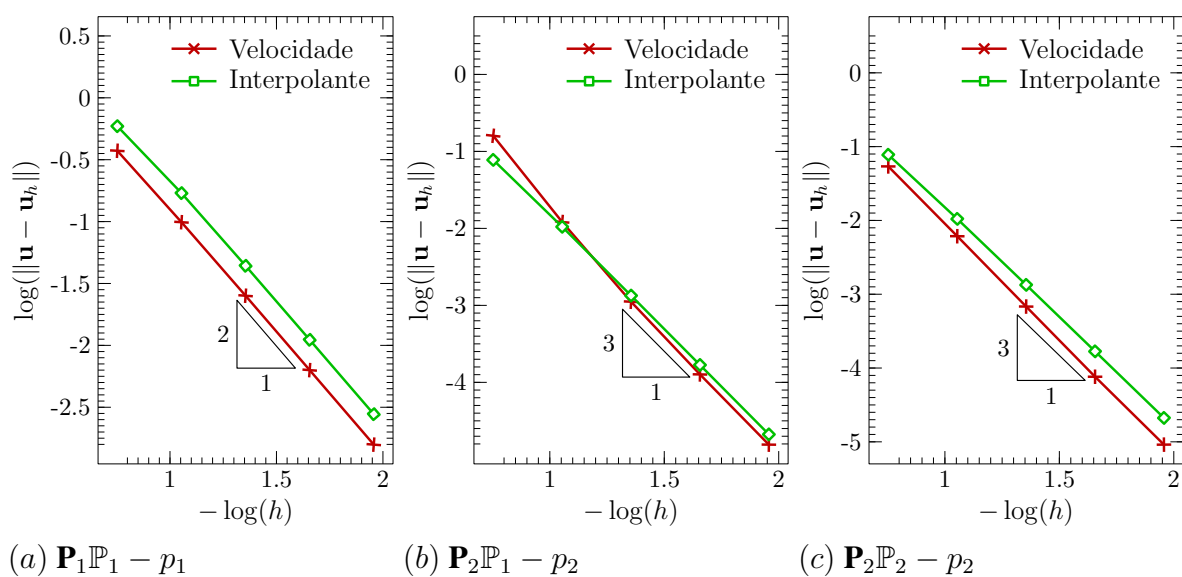


Figura 3: Estudo h-convergência da aproximação para a velocidade  $\mathbf{u}_h$  em comparação com a interpolante. (a)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$ ; (b)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_2 - p_2$  e (c)  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ .

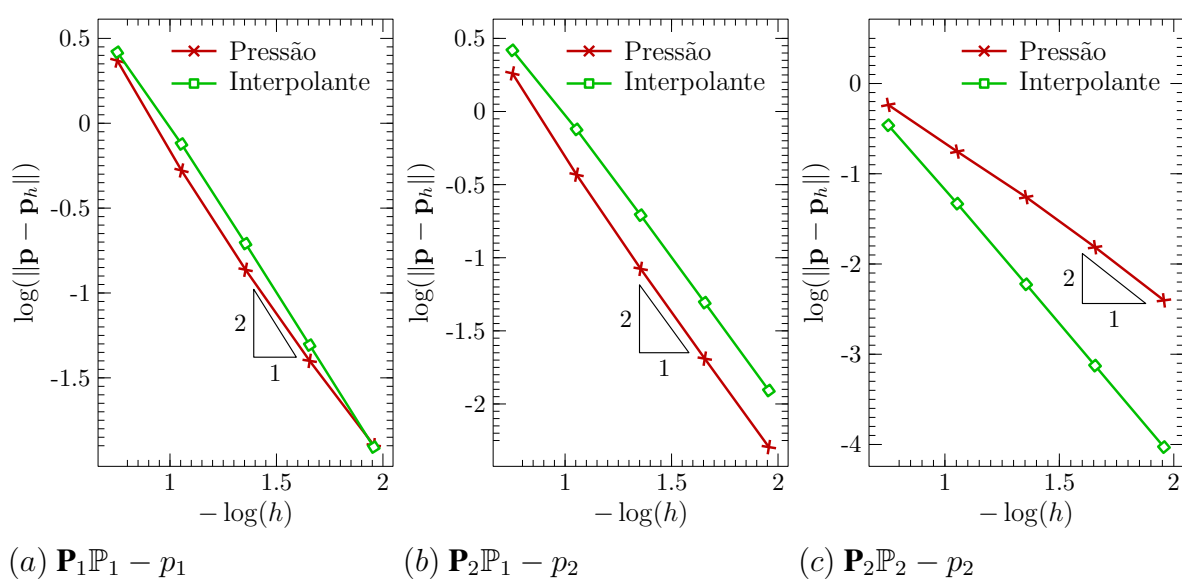


Figura 4: Estudo h-convergência da aproximação para a pressão  $p_h$  em comparação com a interpolante. (a)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$ ; (b)  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_2 - p_2$  e (c)  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ .



As Figuras 3 e 4, mostram o resultado da  $h$ -convergência para o problema de Oseen. Considerando as simulações  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$ ,  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_1 - p_2$  e  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ , obtivemos taxa ótima para aproximações do campo de velocidade (ver Figura 3), e taxa subótima para aproximações do campo de pressão na simulação  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$  (ver Figura 4).

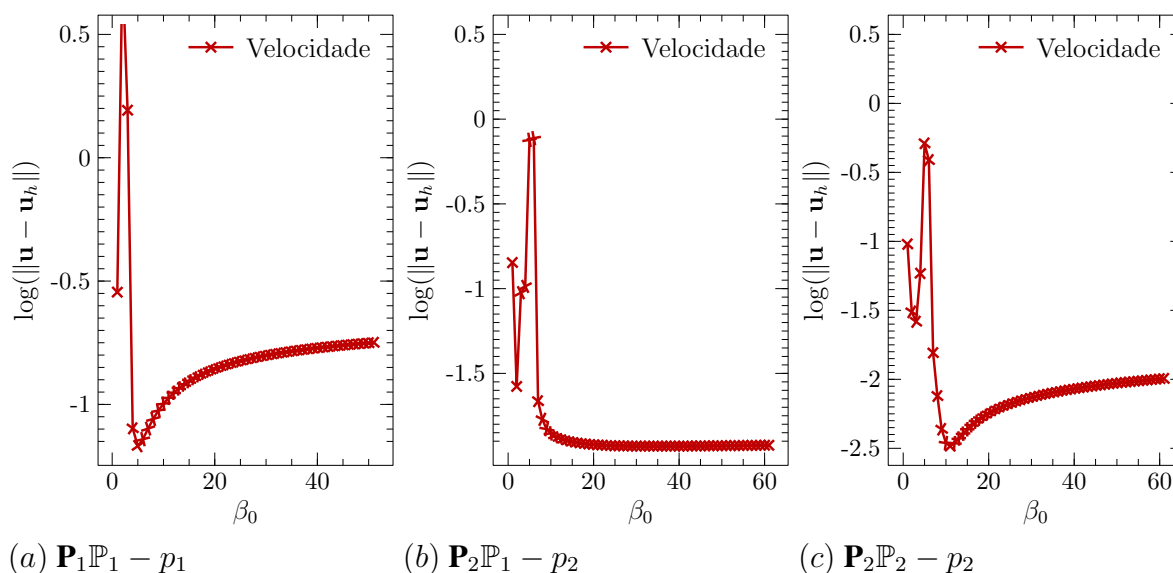


Figura 5: Estudo da sensibilidade provocada pelo parâmetro de estabilização  $\beta_0$  nas aproximações para o campo de velocidade.

A Figura 5 mostra a influência do parâmetro de estabilização  $\beta_0$  nas aproximações para o campo de velocidade. Com base nesses estudos, parâmetros de estabilização adequados foram escolhidos para os problemas tratados nessa seção.

#### 4 CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

Apresentamos formulações mista híbrida estabilizada na qual, a depender da definição de  $\mathbf{w}$ , obtemos as formulações de Stokes, Oseen ou Navier-Stokes. Vale salientar, que o caso  $\mathbf{w} = \beta$  estende a formulação SMH do problema de Stokes, proposto por Igreja e Loula (2017) para o problema de Oseen, proposto neste presente trabalho. Para o problema de Stokes, obtivemos taxa ótima de convergência na norma  $L^2$  para o campo velocidade. Já para o campo de pressão, obtivemos taxa ótima nas simulações  $\mathbf{P}_1\mathbb{P}_1 - p_1$ ,  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_1 - p_2$  e subótima na simulação  $\mathbf{P}_2\mathbb{P}_2 - p_2$ . O que está de acordo com a análise realizada. As conclusões para os resultados de convergência para o problema de Oseen são as mesmas obtidas para o problema de Stokes. Por fim, cabe destacar que a formulação para o problema de Oseen foi proposta para motivar os experimentos numéricos do problema incompressível de Navier-Stokes.

#### REFERÊNCIAS

- Babuška I. Error-bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16(4):322–333, 1971.
- Baker G.A., Jureidini W.N., e Karakashian O.A. Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem. *SIAM journal on numerical analysis*, 27(6):1466–1485, 1990.
- Bassi F. e Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, 131(2):267–279, 1997.

- Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2):129–151, 1974.
- Brezzi F. e Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- Cockburn B., Kanschat G., e Schötzau D. The local discontinuous Galerkin method for the Oseen equations. *Mathematics of Computation*, 73(246):569–593, 2004.
- Cockburn B., Kanschat G., e Schötzau D. A locally conservative ldg method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 74(251):1067–1095, 2005.
- Cockburn B., Kanschat G., e Schötzau D. An equal-order dg method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*, 40(1-3):188–210, 2009.
- Crouzeix M. e Raviart P.A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations i. *Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, 7(R3):33–75, 1973.
- Cuvelier C., Segal A., Segal G., van Steenhoven A., e Van Steenhoven A. *Finite element methods and Navier-Stokes equations*, volume 22. Springer Science & Business Media, 1986.
- Egger H. e Waluga C. hp analysis of a hybrid dg method for Stokes flow. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33(2):687–721, 2012.
- Filho J.K. e Loula A.F. On stable equal-order finite element formulations for incompressible flow problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 34(2):655–665, 1992.
- Hughes T.J., Franca L.P., e Balestra M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.
- Igreja I. e Loula A.F. Stabilized velocity and pressure mixed hybrid dgfem for the Stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017.
- Igreja I. e Loula A.F. A stabilized hybrid mixed dgfem naturally coupling Stokes-Darcy flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018.
- Kovasznay L. Laminar flow behind a two-dimensional grid. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 44, páginas 58–62. Cambridge University Press, 1948.
- Montlaur A., Fernandez-Mendez S., e Huerta A. Discontinuous Galerkin methods for the Stokes equations using divergence-free approximations. *International journal for numerical methods in fluids*, 57(9):1071–1092, 2008.
- Rhebergen S. e Wells G.N. Analysis of a hybridized/interface stabilized finite element method for the Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(4):1982–2003, 2017.
- Rivière B. e Girault V. Discontinuous finite element methods for incompressible flows on subdomains with non-matching interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28):3274–3292, 2006.
- Temam R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc., 2001.
- Toselli A. hp discontinuous Galerkin approximations for the Stokes problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(11):1565–1597, 2002.
- Verfürth R. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *RAIRO. Analyse numérique*, 18(2):175–182, 1984.