

UNTANGLING Y SMOOTHING SIMULTÁNEOS DE MALLAS

Ezequiel J. López^a, Norberto N. Nigro^a y Mario A. Storti^a

^a*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC-CONICET-UNL, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, ejlopez@ceride.gov.ar*

Palabras clave: Untangling de mallas, Smoothing de mallas, Movimiento de mallas, ALE.

Resumen. En este trabajo se presenta una técnica útil para realizar untangling y smoothing simultáneos de mallas. La misma se basa en la extensión de una estrategia de smoothing presentada por los autores y empleada para la determinación del movimiento de la malla en problemas de interacción fluido-estructura. La necesidad de realizar untangling de mallas surge en este tipo de problemas cuando el movimiento de la frontera es tal que invalida la malla, provocando la inversión de elementos. La estrategia de smoothing original consiste en la minimización de un funcional que mide la distorsión de la malla empleando un indicador de calidad geométrico. Dicho funcional se vuelve discontinuo cuando alguno de los elementos de la malla posee volumen nulo, lo cual imposibilita la obtención de una malla válida a partir de una inválida. Para superar este inconveniente, se regularizó el funcional original volviéndolo continuo en todo el espacio y obteniendo así la técnica de untangling mencionada. La regularización depende de un único parámetro que, al tender a cero, permite recuperar el funcional de la estrategia de smoothing original. Se presentan varios casos test aplicando la técnica a mallas de elementos simples 2D y 3D. Además, con un ejemplo bidimensional se indica como podría emplearse la estrategia propuesta para la generación de mallas.

1. INTRODUCCIÓN

En diversas aplicaciones científicas y de ingeniería suele presentarse la necesidad de trabajar con mallas móviles, como por ejemplo en problemas de interacción fluido estructura resueltos con técnicas tipo ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), problemas de sólidos con grandes deformaciones (estampado, forja, etc.), etc. En estos casos la malla debe ser actualizada en cada paso de tiempo debido al movimiento de las fronteras del dominio, pudiendo ésto dar lugar a la degradación de la calidad de la grilla. Otro problema que puede presentarse es la inversión de elementos, lo cual resulta en una malla inválida para el cálculo. Es bien sabido que elementos de baja calidad tienen una importante influencia sobre la estabilidad, convergencia y precisión de los métodos numéricos de resolución. En Mecánica Computacional, las estrategias empleadas para resolver el movimiento de la malla se agrupan en el tópico denominado CMD (Computational Mesh Dynamics) y su importancia está probada mediante los variados enfoques que pueden hallarse en la bibliografía reciente (Koobus y Farhat, 1999; Farhat et al., 2001; Farhat y Geuzaine, 2004; Farhat et al., 1998; C.O.E., 2004; Stein et al., 2004; Bar-Yoseph et al., 2001; Blom, 2000; Chiandussi et al., 2000; Kjellgren y Hyvärinen, 1998; Löhner y Yang, 1996).

El objetivo principal, del cual este trabajo forma parte, consiste en la resolución de problemas de interacción fluido estructura, en los cuales se requiere resolver en forma acoplada los problemas del fluido y la estructura de forma tal que el flujo determina las fuerzas que actúan sobre la estructura y el problema estructural determina la variación de la geometría debido a su deformación y a sus movimientos de traslación y rotación. La resolución generalmente se realiza por medio de una estrategia iterativa que hace uso de códigos CFD (Computational Fluid Dynamics) y CSD (Computational Structure Dynamics) cuyas soluciones interactúan a través de la piel de la estructura mojada por el fluido. Se tiene entonces un problema acoplado CFD+CSD+CMD, donde el movimiento de la malla constituye apenas un campo artificial aunque de gran importancia como fuera mencionado anteriormente. Dado que generalmente la “etapa” CFD es la de mayor costo computacional, la misma determinará el paso de tiempo para la simulación. Puede ocurrir entonces que el movimiento de las fronteras del dominio provoque la inversión de elementos, requiriendo de la estrategia CMD no sólo que sea capaz de entregar mallas de buena calidad sino también que pueda realizar *untangling*, es decir, que devuelva una malla válida a partir de una inválida.

La calidad de la malla puede ser mejorada aplicando métodos de suavizado, siendo entonces de utilidad como técnicas CMD. Estos métodos reposicionan los nodos de la grilla manteniendo constante la topología. Muchos de éstos son *locales*, es decir, en un proceso iterativo, los nodos se reubican de a uno por vez considerando sólo la submalla que lo contiene.

La estrategia más popular de suavizado local es el suavizado laplaciano debido a su bajo costo computacional y su facilidad de implementación. Este método consiste en mover los nodos interiores del dominio al centro geométrico de sus vecinos. Sin embargo el método no siempre funciona, pudiendo dar mallas invertidas y; además, si no se alcanza la convergencia, la malla resultante depende del orden en el cual fueron recorridos los nodos. Este último inconveniente lo presentan en general las estrategias de resolución local. Un tipo de suavizado relacionado con el anterior es el suavizado de Winslow, el cual es más resistente a la inversión de la malla debido al requerimiento de que las variables lógicas sean funciones armónicas (Winslow, 1967). Originalmente la técnica fue presentada para mallas estructuradas, habiendo sido extendida en Knupp (1999) al caso de mallas no estructuradas.

Existe una gran variedad de métodos de suavizado basados en optimización, con el objetivo de mejorar la calidad de la malla minimizando una métrica de calidad particular (Amenta et al.,

1999; Amezua et al., 1995; Cannan et al., 1998; Parthasarathy y Kodiyalam, 1991; Zavattieri et al., 1998; Freitag y Knupp, 1999; López et al., 2006). El principal inconveniente que presentan es su costo computacional debido a que generalmente es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineal; además, varias de ellas no soportan mallas inválidas, es decir, no resultan útiles para realizar un *untangling*. Relativo a la forma de resolución, la misma puede ser local o *global*; consistiendo esta última en actualizar simultáneamente la totalidad de los nodos.

Cuando la malla se invierte, debe aplicarse una estrategia de *untangling*. Estos métodos suelen estar basados en el volumen de los elementos, como por ejemplo el presentado en Knupp (2000). Combinando alguna de estas estrategias con un suavizado de la malla, se tiene una técnica CMD capaz de tratar con mallas inválidas. Un enfoque que parece preferible al anterior es diseñar un método que realice en forma simultánea el *untangling* y suavizado de la malla, por ejemplo los propuestos en Freitag y Plassmann (2000); Kovalev et al. (2003); Escobar et al. (2003); Montenegro et al. (2003).

En este trabajo se propone una técnica de *untangling* y *smoothing* simultáneos de mallas basada en la optimización de la calidad de la grilla. La estrategia surge a partir de la regularización del funcional correspondiente a un método de suavizado propuesto por los autores y aplicado al movimiento de mallas. La resolución del problema de optimización se realiza en forma global.

El método propuesto también puede resultar de utilidad para la generación de mallas. En este caso, la topología está dada por una grilla generada en un dominio auxiliar que sea muy simple de mellar. Los nodos de frontera son posicionados en la frontera del dominio de interés mientras que los nodos interiores se reubican aplicando la técnica presentada en este trabajo.

El paper está organizado del siguiente modo: en primer lugar se resume el método original de suavizado, luego se presenta la regularización del funcional original y la estrategia aplicada para la resolución del problema de optimización. A continuación se muestran los resultados obtenidos para varios tests 2D y 3D y un caso bidimensional de generación de mallas aplicando la técnica propuesta. Las conclusiones y trabajos a futuro concluyen el paper.

2. ESTRATEGIA ORIGINAL

En un trabajo anterior de los mismos autores, se propuso una técnica para suavizado de mallas que resulta útil como estrategia CMD (López et al., 2006). La técnica se basa en un problema de optimización resuelto en forma global, donde la función costo o funcional representa la distorsión de la malla. Tal funcional fue definido del siguiente modo:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_e F_e(\mathbf{x})_e \quad (1)$$

con

$$F_e(\mathbf{x})_e = C_v \left(\frac{V_e}{V_{ref}^e} - 1 \right)^m + C_q q_e^n \quad (2)$$

siendo V_e el volumen del elemento, V_{ref}^e el volumen buscado para el elemento, q_e algún indicador de calidad, C_v y C_q coeficientes que afectan, respectivamente, a los términos de volumen y calidad del elemento y pesan la influencia de cada uno en el funcional. Relativo a los exponentes, m debe ser par y $n < 0$.

Así planteado el funcional, la estrategia es aplicable a mallas de cualquier tipo de elementos adoptando un indicador de calidad adecuado. En el presente trabajo se propone utilizar los siguientes índices de calidad geométricos:

- Elementos símplices:

$$q = Cq_S \quad (3)$$

siendo

$$q_S = \frac{V}{\sum_j l_j^{nd}} \quad (4)$$

con l_j la longitud del j -ésimo lado, V su volumen, nd el número de dimensiones espaciales del problema y, $C = 4\sqrt{3}$ para triángulos y $C = 36\sqrt{2}$ para tetraedros.

- Elementos no símplices:

$$q = C \prod_{i=1}^N q_{S,i} \quad (5)$$

donde C es una constante de normalización tal que $0 < q \leq 1$, N es el total de todas las posibles divisiones del elemento en elementos símplices y q_S es el indicador de calidad para elementos símplices presentado en el ítem anterior.

Debido a que los indicadores de calidad empleados están basados en los índices de calidad para triángulos y tetraedros, sin pérdida de generalidad, sólo se analiza el caso para elementos símplices.

El funcional propuesto es continuo siempre que $q_e \neq 0$ para todos los elementos de la malla debido a que $F_e(\mathbf{x})_e$ tiende a infinito cuando q_e tiende a cero ($n < 0$). Esto ocurre cuando para algún elemento $V_e \rightarrow 0$ dado que $\sum_j l_j^{nd}$ se encuentra acotado por debajo si el símplice no tiende a ser un punto. De este modo, la aplicación de la técnica se restringe a mallas válidas debido a que se forman “barreras” infinitas cuando el volumen de alguno de los elementos tiende a cero, impidiendo así la obtención de una malla válida a partir de una inválida. En problemas de interacción fluido-estructura tal requerimiento implica disminuir el paso de tiempo a fin de evitar la inversión de algún elemento en la malla provocada por el movimiento de la frontera. El costo de cálculo puede incrementarse sobremanera si la malla posee elementos relativamente pequeños en cercanías de los contornos móviles.

3. REGULARIZACIÓN DEL FUNCIONAL

Con el objetivo de evitar los problemas asociados con las singularidades referidas, se modificó el funcional según lo propuesto en [Escobar et al. \(2003\)](#), y así, el funcional regularizado resulta continuo en todo el espacio. La modificación consiste en reemplazar V en la ecuación (4) por la función

$$h(V) = \frac{1}{2}(V + \sqrt{V^2 + 4\delta^2}) \quad (6)$$

Esta es una función estrictamente creciente del volumen y además positiva $\forall V$ (véase Figura 1). El parámetro δ representa el valor de la función cuando el volumen es nulo.

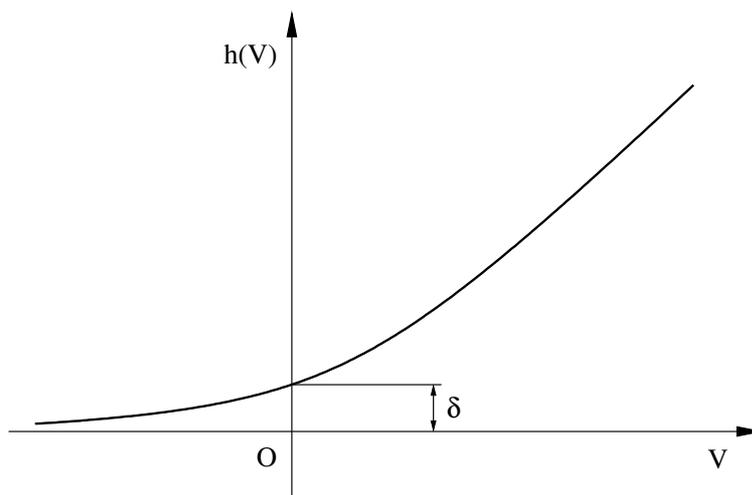


Figura 1: Función $h(V)$.

El funcional modificado queda expresado entonces como:

$$F_e^*(\mathbf{x})_e = C_v \left(\frac{V_e}{V_{ref}} - 1 \right)^m + C_q q_e^{*n} \quad (7)$$

con

$$q^* = \frac{Ch(V)}{\sum_i l_i^{nd}} \quad (8)$$

La dependencia de $h(V)$ con el parámetro δ es tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} h(V) = \begin{cases} V & \text{si } V \geq 0 \\ 0 & \text{si } V < 0 \end{cases}$$

De este modo, a medida que δ disminuye el funcional modificado se acerca cada vez más al funcional original, al igual que sus respectivos puntos de óptimo. En el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, $F^*(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{x})$ punto a punto.

A continuación se presenta un ejemplo sencillo planteado en Escobar et al. (2003) que permite comprender mejor el comportamiento de los funcionales original y modificado. Sea la malla bidimensional formada por los triángulos ABp , BCp y CAp como se observa en la Figura 2. Los puntos $A(0, -1)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ y $C(0, 1)$ se mantienen fijos, mientras que el punto $p(x, y)$ posee sus coordenadas variables. Está claro que una malla válida se obtiene si p es ubicado en

cualquier punto interior del triángulo ABC , lugar geométrico denominado la *región factible* para el punto p . En la Figura 3 se encuentran representadas las funciones objetivo para distintos valores del parámetro δ en función de x para $y = 0$. Como se observa, si $\delta \neq 0$ el funcional es continuo en \mathbb{R} y a medida que el valor de este parámetro disminuye el punto de óptimo de los funcionales modificados se acerca al óptimo del funcional original. En este ejemplo muy simplificado los funcionales modificados poseen sus óptimos en la región factible, lo cual no ocurre en general para mallas de mayor número de elementos cuando el valor de δ es relativamente elevado.

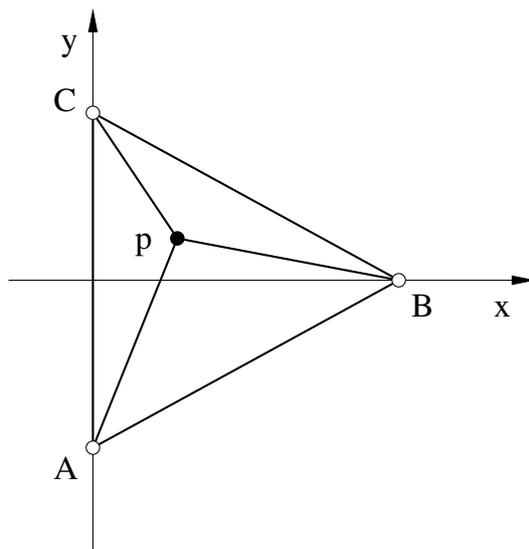


Figura 2: Malla ejemplo 2 D.

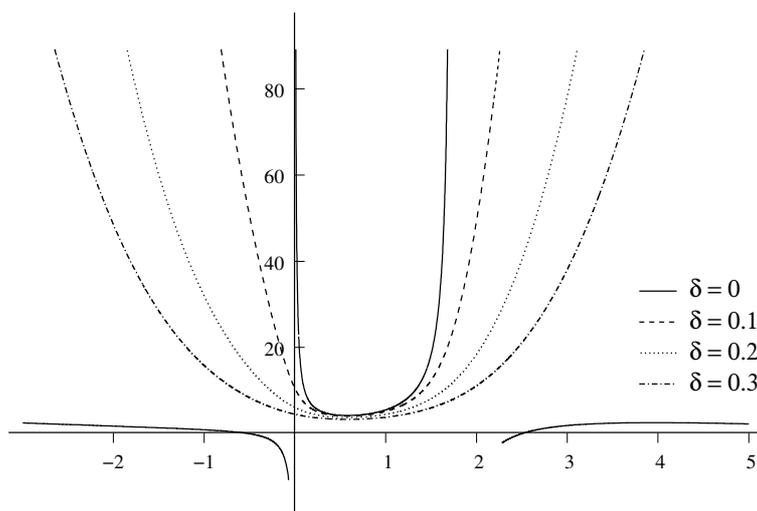


Figura 3: Funcional regularizado para distintos valores de δ .

4. ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN

En el trabajo de Escobar et al. (2003) se aplica una estrategia local de resolución, es decir, se recorren todos los nodos de la malla hallando la posición óptima de los mismos considerando

sólo la correspondiente submalla. En cambio, aquí se emplea una forma de resolución global, adoptando como variables las coordenadas de los nodos de la malla.

El objetivo es encontrar el óptimo del funcional original (1) o una solución muy próxima, suponiendo que existe una malla válida para la topología y la posición de la frontera dadas. Entonces, debe hacerse disminuir el valor de δ progresivamente hasta que éste tienda a 0 (o sea menor que una tolerancia prefijada). Según las experiencias numéricas realizadas, cuanto más pequeño es el valor de δ la convergencia del algoritmo de optimización aplicado se degrada, pudiendo incluso no converger. Por otro lado, si δ es relativamente elevado es posible que la correspondiente malla “óptima” sea inválida. Este hecho empeora a medida que la deformación relativa del dominio es mayor. Se tienen entonces dos inconvenientes: determinar un valor inicial para δ y su tasa de decrecimiento para asegurar la convergencia en las coordenadas.

Con el fin de hallar una ecuación que permita decrementar δ en forma “automática”, se supone a este parámetro como una variable más del funcional; es decir, $F^* = F^*(\mathbf{x}, \delta)$. Debe aclararse aquí que el valor óptimo del funcional regularizado aumenta cuando δ disminuye ($\delta \neq 0$), como puede inferirse a partir del comportamiento de la función $h(V)$ con este parámetro. Sin embargo, si se plantea el problema como si fuera de optimización en las variables (\mathbf{x}, δ) y se utiliza un método de resolución tipo Newton, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x} \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 F^*}{\partial \delta \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 F^*}{\partial \delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \delta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial F^*}{\partial \delta} \end{bmatrix}$$

Rescribiendo la ecuación anterior del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x} \partial \delta} \Delta \delta &= - \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial^2 F^*}{\partial \delta \partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \delta^2} \Delta \delta &= - \frac{\partial F^*}{\partial \delta} \end{aligned} \quad (9)$$

se observa que la misma puede resolverse en forma desacoplada si para la primera de las ecuaciones se asume que δ es constante ($\Delta \delta = 0$), suponiendo además que tanto la matriz como el residuo se mantienen constantes para la iteración presente. Despejando $\Delta \mathbf{x}$ y $\Delta \delta$ se obtiene el siguiente sistema desacoplado:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= - \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}^2} \right)^{-1} \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{x}} \\ \Delta \delta &= - \frac{\left(\frac{\partial F^*}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \delta \partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \right)}{\frac{\partial^2 F^*}{\partial \delta^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

La expresión para $\Delta \delta$ en (10) se adopta como valor máximo para decrementar δ . De esta forma, la actualización para δ en la iteración k se plantea del siguiente modo:

$$\delta^k = \max(\delta^{k-1} - \alpha |\Delta \delta|, \beta \delta^{k-1}) \quad (11)$$

con α y β constantes menores que la unidad.

Respecto de la convergencia del método aplicado de optimización, se encontró que los términos de “acople” o fuera de los bloques diagonales en la matriz elemental tienen una importancia significativa. En la etapa de untangling resulta conveniente hacer que estos términos sean relativamente pequeños o incluso nulos para obtener la convergencia del sistema. Sin embargo, mantener la matriz sin tales términos en la etapa de smoothing implica disminuir considerablemente la tasa de convergencia. Como estrategia se propuso multiplicar dichos términos de acople por un coeficiente $\gamma < 1$, el cual puede mantenerse constante o ser una función de las iteraciones. Por ejemplo, para un caso bidimensional se modifica la matriz elemental del siguiente modo:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}_1^2} \right)_e & \gamma \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_2} \right)_e \\ \gamma \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}_2 \partial \mathbf{x}_1} \right)_e & \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \mathbf{x}_2^2} \right)_e \end{bmatrix}$$

Además, la resolución se realiza aplicando el método de Armijo de búsqueda lineal inexacta (Papalambros y Wilde, 1988). En cada iteración δ es decrementado sólo si la estrategia de búsqueda lineal da por resultado un paso unitario.

Relativo al costo computacional, puede decirse que la técnica presentada posee un costo apenas superior al método original de suavizado dado que sólo involucra una búsqueda lineal y la evaluación de la calidad de los elementos en cada iteración del algoritmo de optimización. Detalles del costo de la estrategia original pueden hallarse en López et al. (2006).

5. RESULTADOS OBTENIDOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de algunos de los tests resueltos. Estos incluyen movimiento de mallas con distinto porcentaje de deformación y generación de mallas, en 2 y 3 dimensiones. En todos los casos, el criterio de “convergencia” aplicado consistió en las siguientes condiciones (las cuales deben satisfacerse en forma simultánea):

- Malla válida.
- Para la iteración k , $\frac{|q_{min}^k - q_{min}^{k-1}|}{q_{min}^k} < \epsilon_q$, siendo $q_{min} = \min_e q_e$ y ϵ_q una tolerancia prefijada.

El coeficiente de relajación de la matriz utilizado en todos los casos fue $\gamma = 0.5$ para la etapa de untangling, valor que se halló muy robusto; mientras que en la etapa de smoothing la matriz no fue relajada en ninguno de los tests resueltos. En cuanto a la elección del valor inicial para δ cuando la malla es inicialmente inválida, se empleó el siguiente criterio que hace uso del volumen mínimo ($V_{min} = \min_e V_e$). Como la función $h(V)$ es estrictamente creciente, entonces

$$h_{min} = h(V_{min}) = \frac{1}{2}(V_{min} + \sqrt{V_{min}^2 + 4\delta^2}) \quad (12)$$

Definiendo $h_{min}^* = h_{min}/\delta$ como parámetro a fijar por el usuario y despejando δ de la ecuación anterior, se tiene el siguiente criterio para inicializar δ :

$$\delta = \begin{cases} \frac{h_{min}^* V_{min}}{h_{min}^* - 1} + \epsilon_\delta & \text{si } V \leq \epsilon_\delta \\ 0 & \text{si } V > \epsilon_\delta \end{cases}$$

donde $\epsilon_\delta > 0$ es el valor mínimo dado al δ inicial a fin de tener $\delta > 0$ cuando $V_{min} = 0$.

En todos los casos, los parámetros utilizados fueron los siguientes: $C_v = 0$, $C_q = 1$, $m = 2$, $n = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\epsilon_q = 0.01$, $h_{min}^* = 0.1875$ y $\epsilon_\delta = 10^{-6}$.

5.1. Test 1

La Figura 4 ilustra el dominio y la secuencia de deformación para este problema. El test fue resuelto para una deformación relativa media (50 %), para una grande (90 %) y para una muy grande (99 %). Se empleó una malla con 200 elementos triangulares y 121 nodos. Los resultados que se muestran corresponden a la malla inválida inicial y la malla final obtenida (figuras 5, 7 y 9). Además, se incluye la evolución de la calidad mínima y del parámetro δ en función del número de iteraciones (figuras 6, 8 y 10).

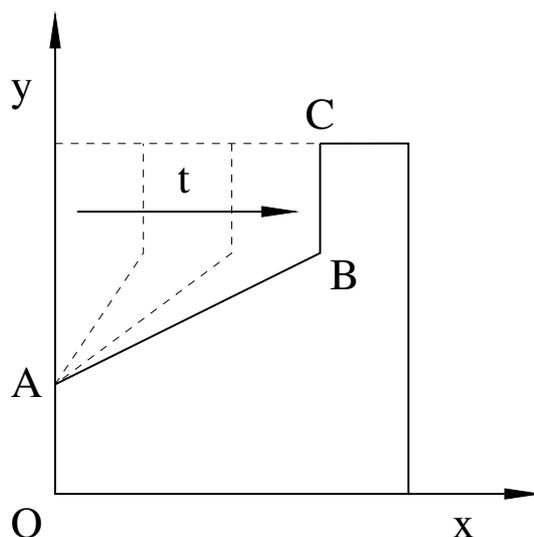


Figura 4: Test 1 - Dominio.

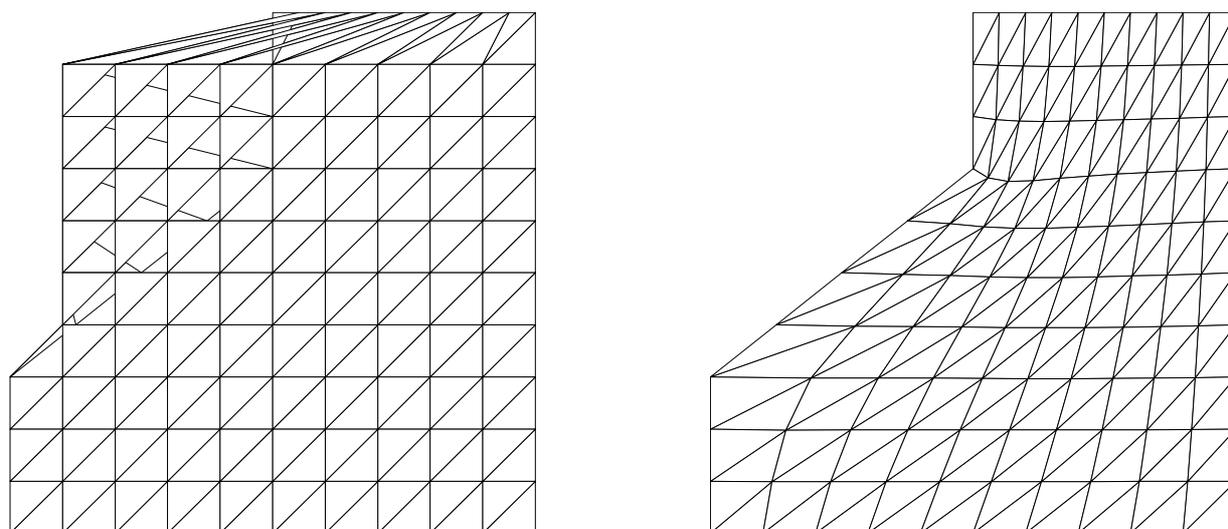


Figura 5: Test 1 - 50 % deformación - Mallas inicial y final.

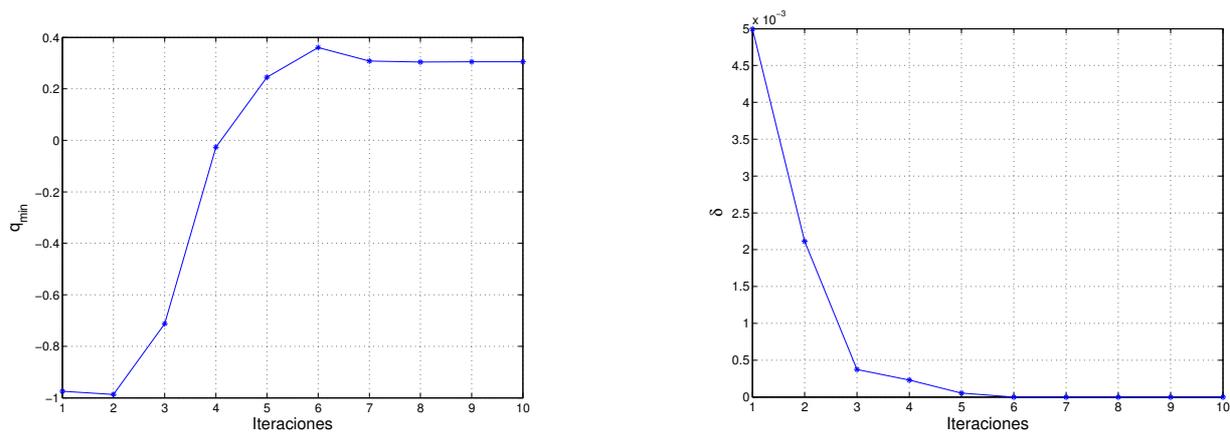


Figura 6: Test 1 - 50 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

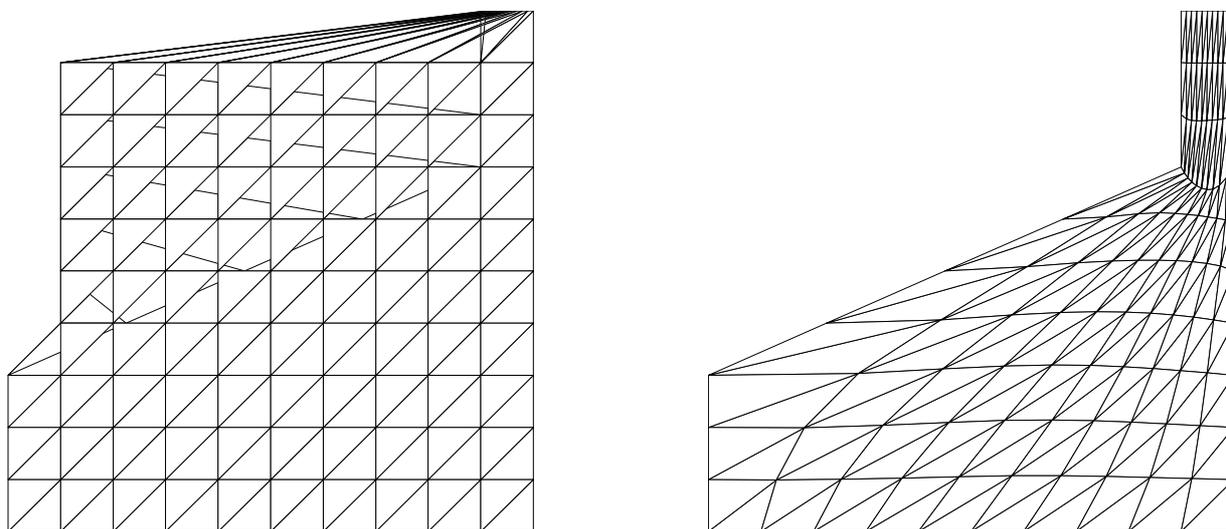


Figura 7: Test 1 - 90 % deformación - Mallas inicial y final.

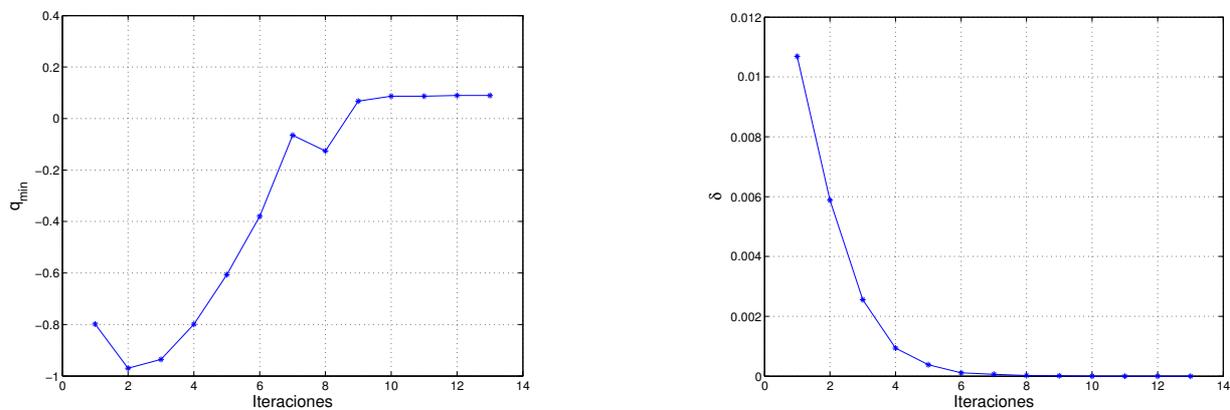


Figura 8: Test 1 - 90 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

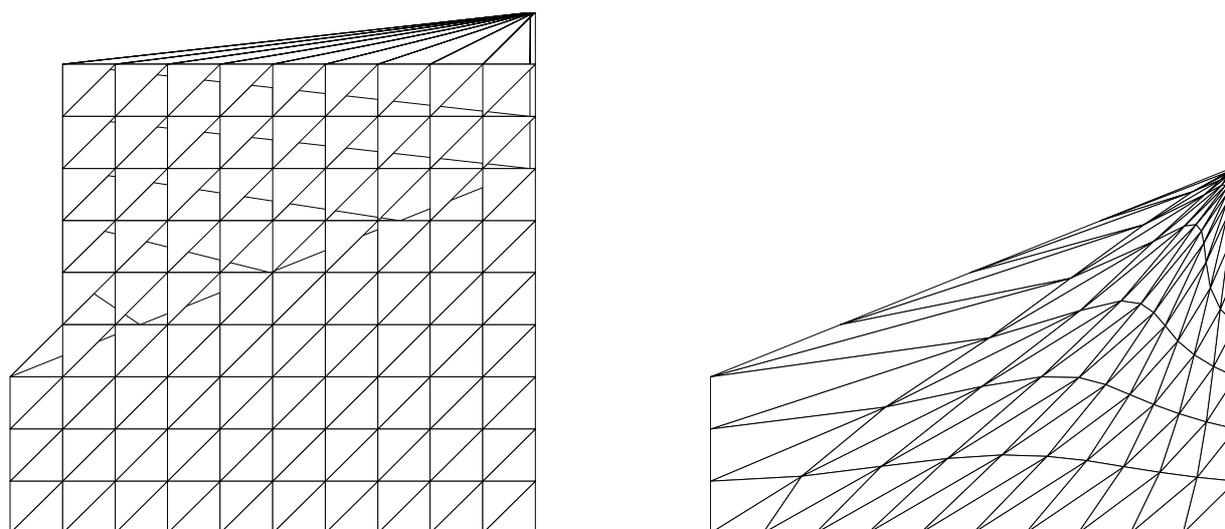
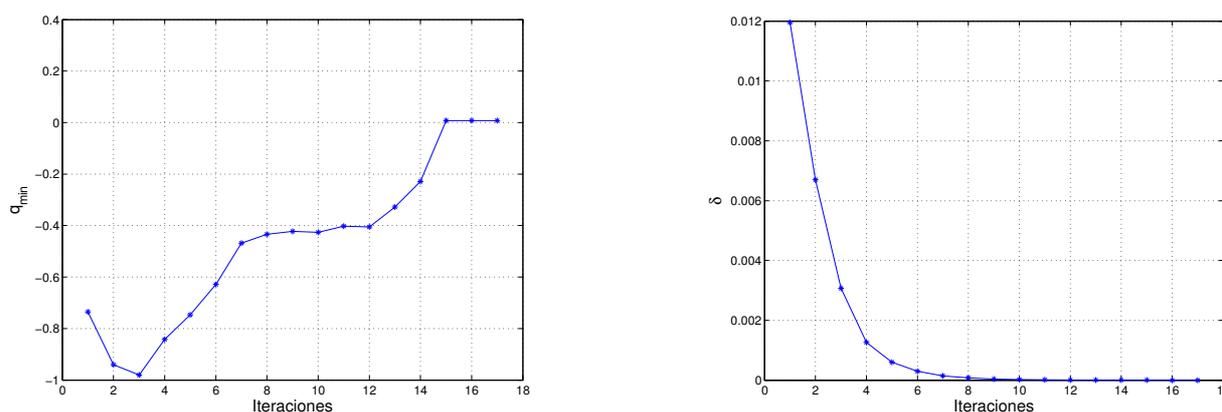


Figura 9: Test 1 - 99 % deformación - Mallas inicial y final.

Figura 10: Test 1 - 99 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

5.2. Test 2

Este test consiste en un cuadrado de lado unitario ubicado dentro de otro cuadrado de 3 unidades de lado, como lo ilustra la Figura 11. El cuadrado interior es desplazado en la dirección vertical sin contacto con el cuadrado exterior. La malla utilizada posee 710 elementos triangulares y 415 nodos.

Fueron resueltos tres casos con distintas deformaciones: 50 %, 90 % y 99 %. Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 12 a 17.

5.3. Test 3

Este test es la extensión tridimensional del test presentado en la sección 5.1. La Figura 18 ilustra el dominio en algunas instancias de su deformación. La cara superior del cubo se mueve en la dirección vertical. Durante la deformación, esta cara se transforma en dos planos a diferentes alturas unidos por un cono truncado con radio superior r y radio inferior R .

Se utilizó una malla con 1080 tetraedros y 343 nodos. El test fue resuelto para deformaciones del 50 %, 80 % y 87 %. Las figuras 19 a 24 ilustran los resultados obtenidos.

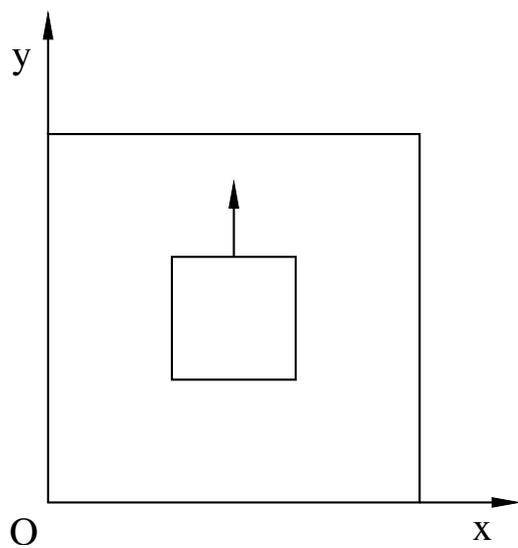


Figura 11: Test 2 - Dominio.

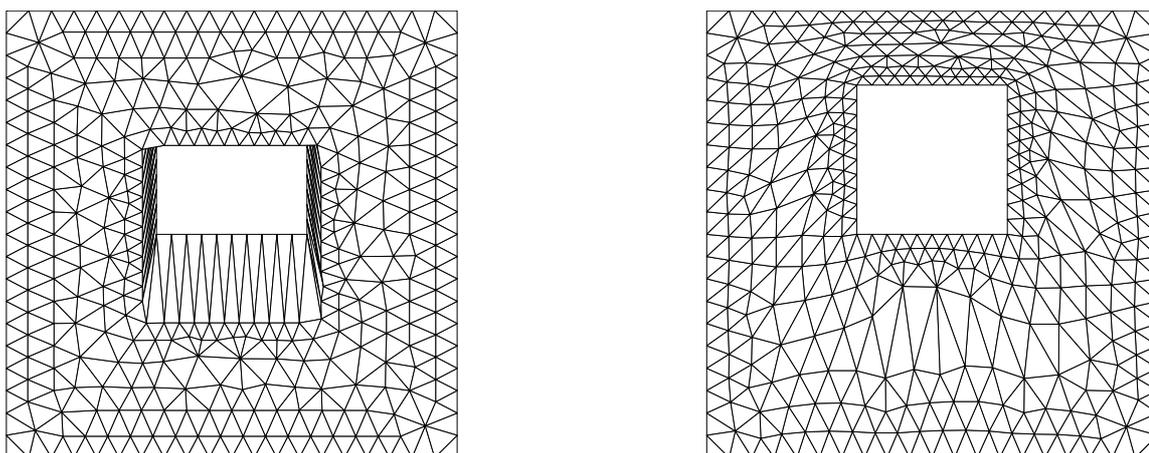


Figura 12: Test 2 - 50 % deformación - Mallas inicial y final.

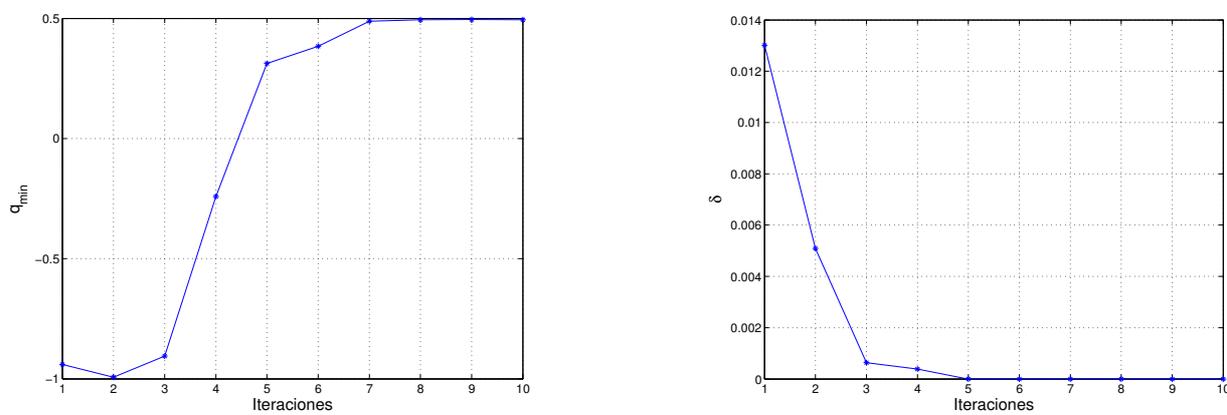


Figura 13: Test 2 - 50 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

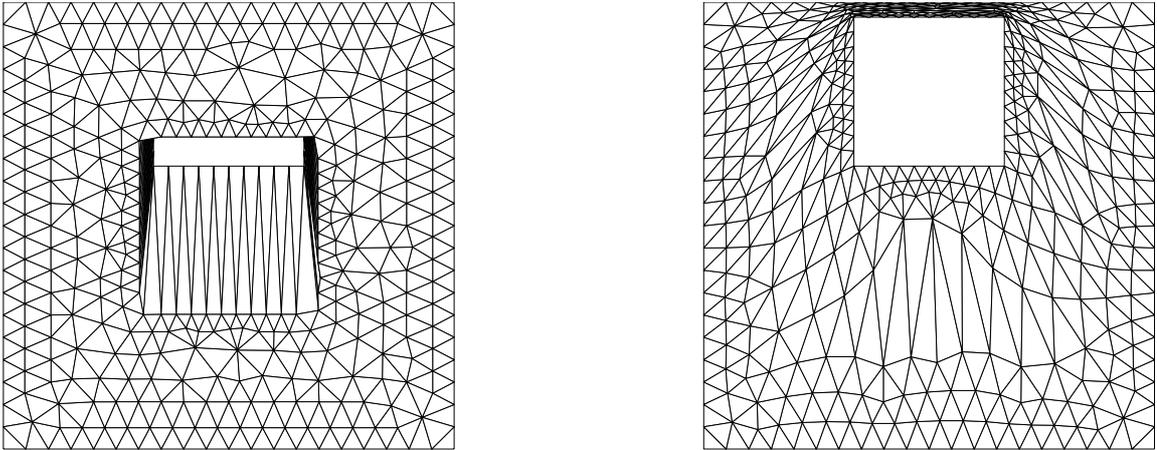


Figura 14: Test 2 - 90 % deformación - Mallas inicial y final.

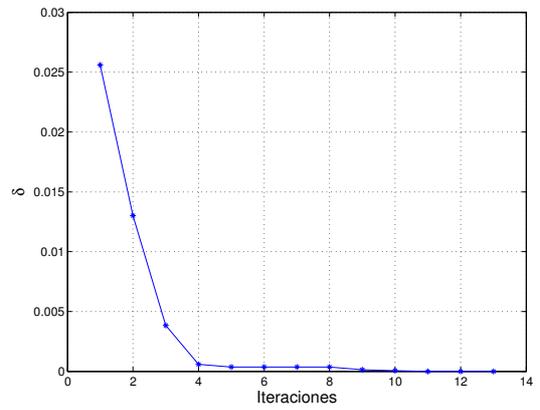
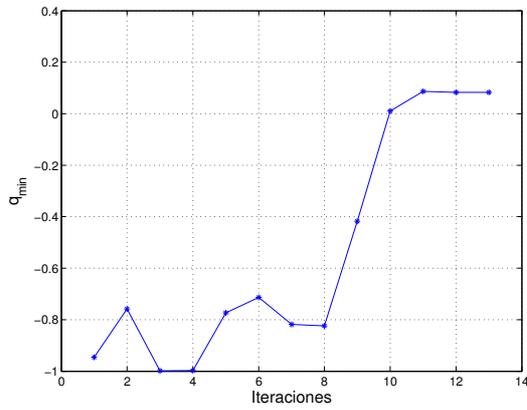


Figura 15: Test 2 - 90 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

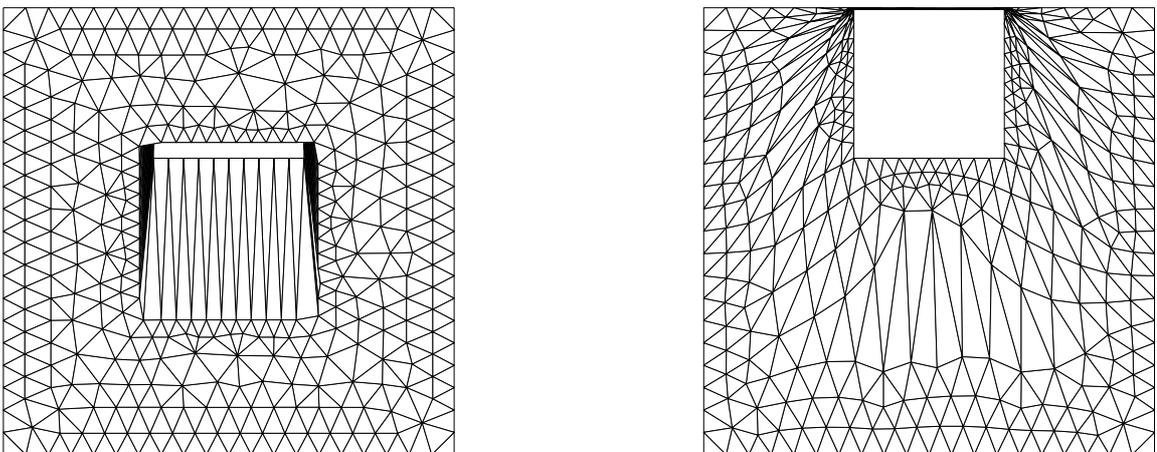


Figura 16: Test 2 - 99 % deformación - Mallas inicial y final.

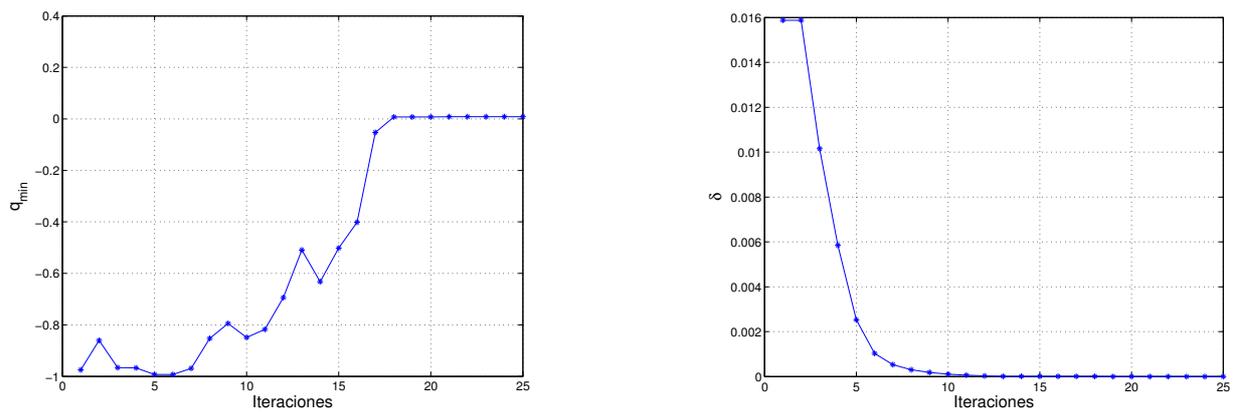


Figura 17: Test 2 - 99 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

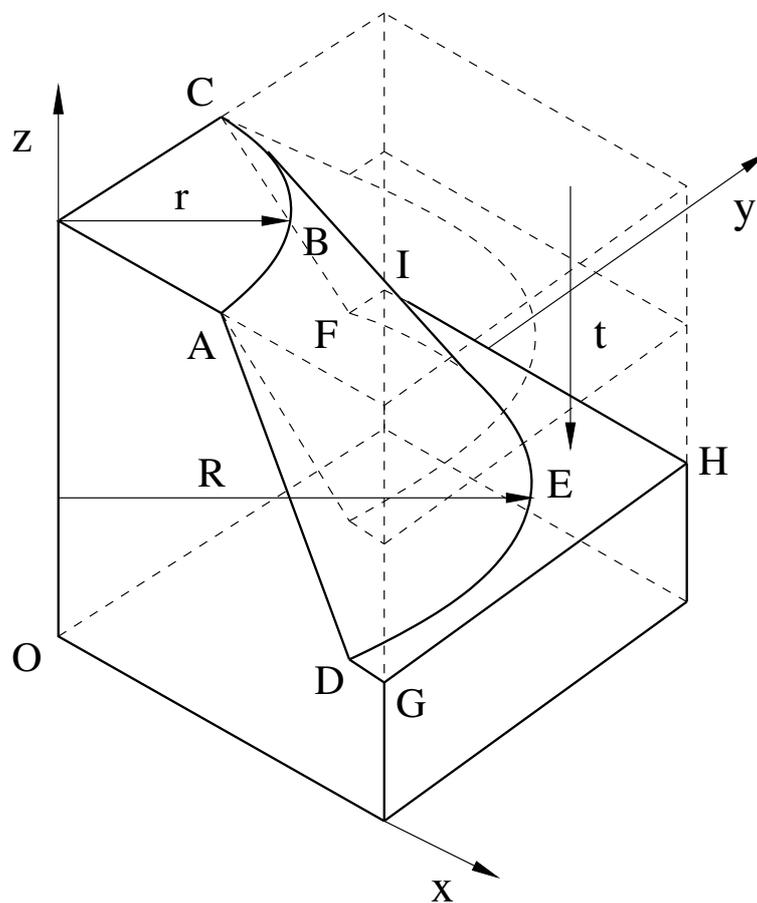


Figura 18: Test 3 - Definición del problema.

5.4. Test 4

Este test fue tomado de [Montenegro et al. \(2003\)](#) y consiste en un cubo unitario con 625 tetraedros y 216 nodos. La malla inválida fue obtenida transformando el cubo a otro de lado 10 cambiando las coordenadas de algunos nodos del siguiente modo: los nodos interiores mantienen su posición, los nodos ubicados en las aristas son reubicados en las aristas del cubo nuevo y los nodos de las caras son proyectados en las caras nuevas respectivas.

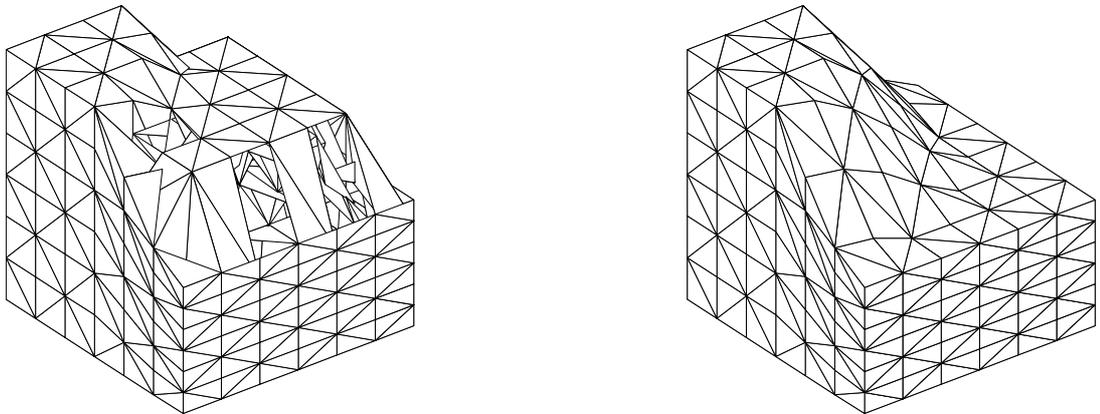


Figura 19: Test 3 - 50 % deformación - Mallas inicial y final.

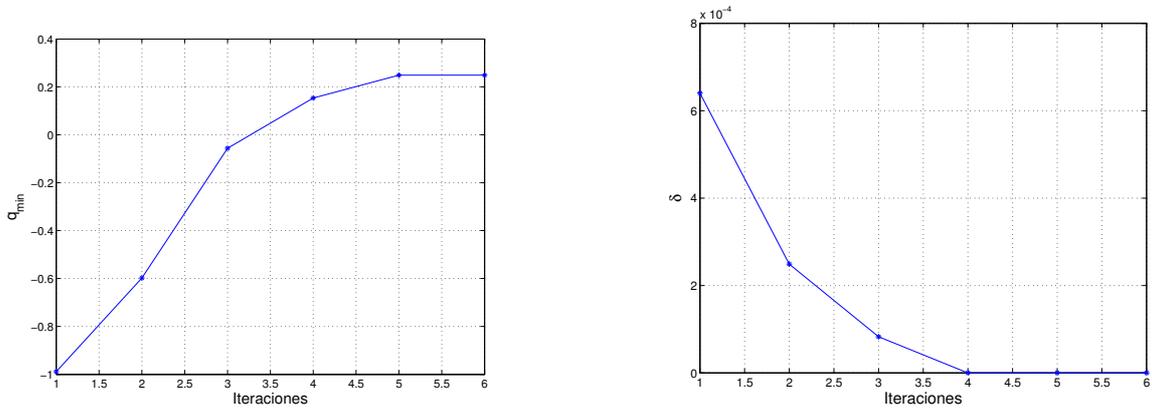


Figura 20: Test 3 - 50 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

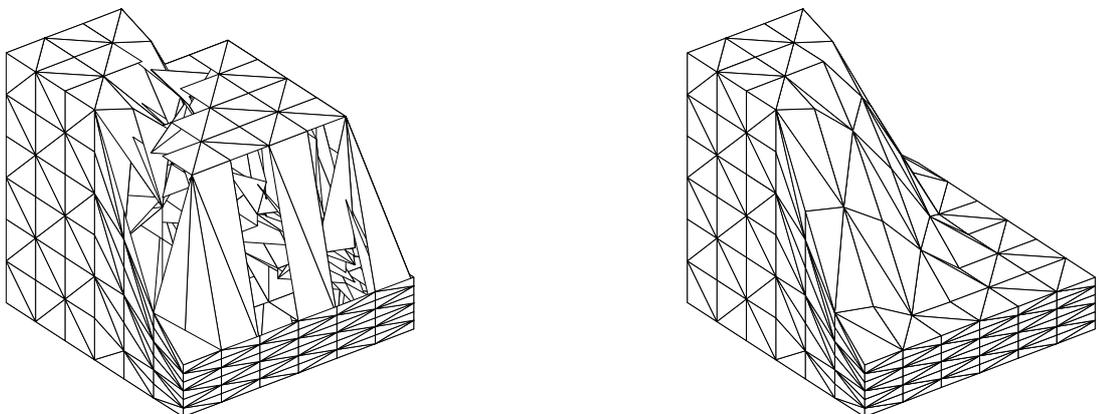


Figura 21: Test 3 - 80 % deformación - Mallas inicial y final.

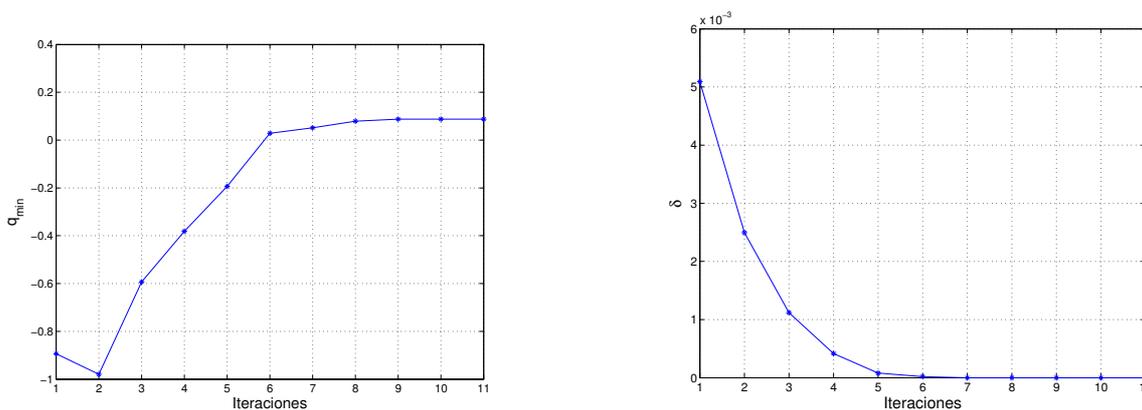


Figura 22: Test 3 - 80 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

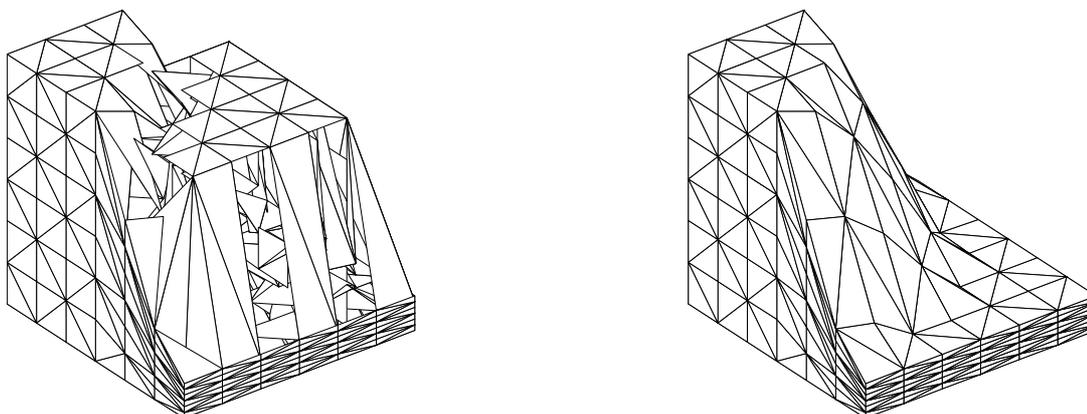


Figura 23: Test 3 - 87 % deformación - Mallas inicial y final.

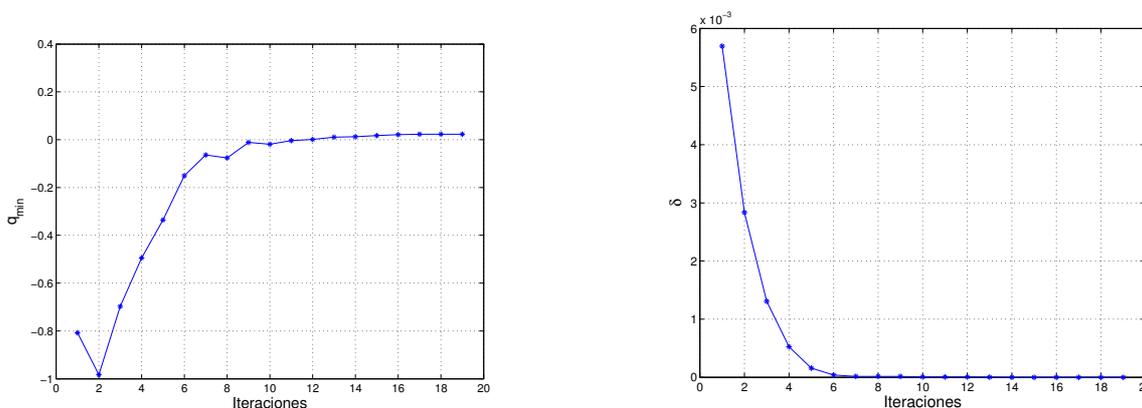


Figura 24: Test 3 - 87 % deformación - Evolución q_{min} y δ .

En la Figura 26 pueden observarse los resultados obtenidos: la evolución de la calidad mínima y del parámetro δ en función del número de iteraciones.

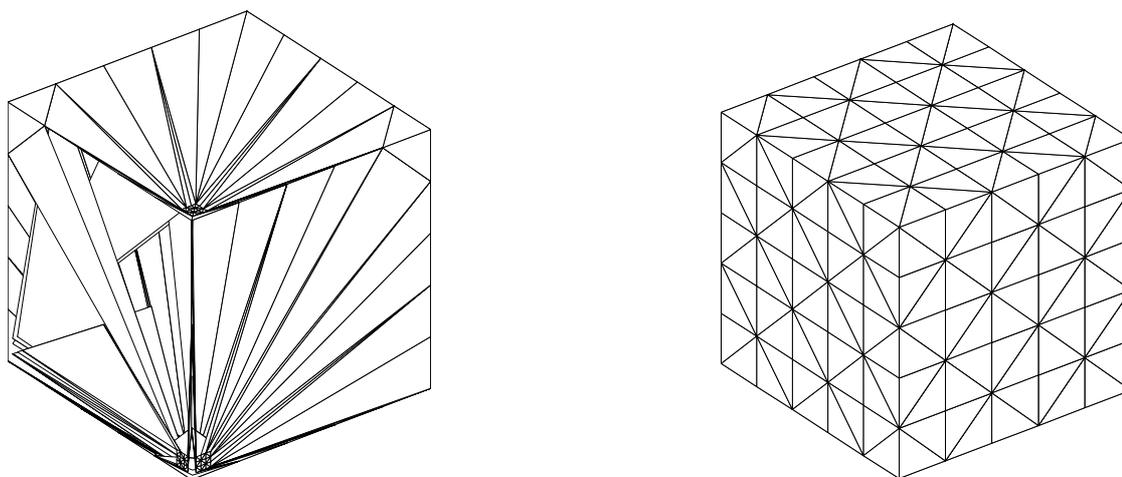
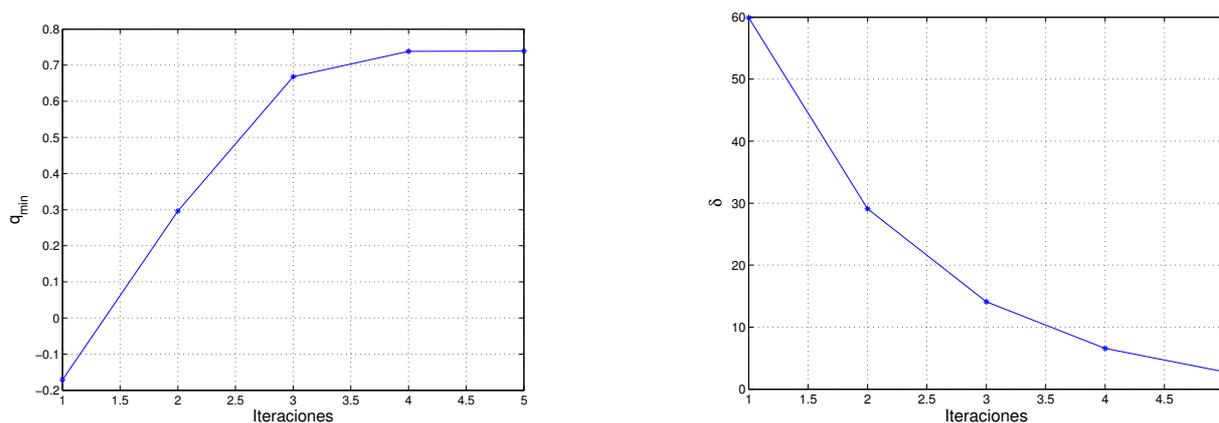


Figura 25: Test 4 - Mallas inicial y final.

Figura 26: Test 4 - Evolución q_{min} y δ .

5.5. Generación de mallas

Como fue mencionado anteriormente, la estrategia presentada de untangling-smoothing puede ser aplicada a la generación de mallas. Se presenta aquí un ejemplo test en 2 dimensiones.

El caso fue tomado de [Haussling y Coleman \(1981\)](#) y consiste en mellar el dominio delimitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ y $y = 0.75 + 0.25 \sin(\pi(0.5 + 2x))$. Para ello, se partió de una malla de 800 elementos triangulares y 441 nodos para el cuadrado unitario. Luego, deformando las fronteras de este cuadrado a la correspondiente posición de las del dominio a mellar y aplicando la técnica propuesta se obtiene la malla buscada. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 27 y 28.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo fue presentada una técnica de untangling y smoothing simultáneos de mallas basada en un problema de optimización resuelto en forma global. A partir de los resultados obtenidos puede concluirse que la estrategia es muy robusta y apta para su implementación en un código de interacción fluido estructura. El costo computacional de la técnica presentada

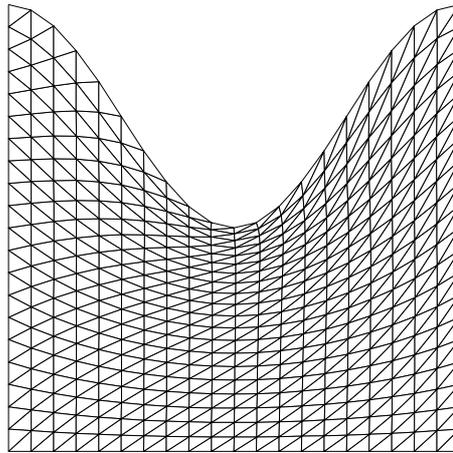


Figura 27: Generación de malla 2 D - Malla obtenida.

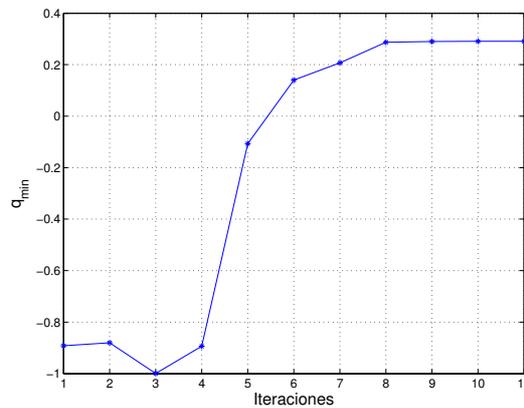


Figura 28: Generación de malla 2 D - Evolución q_{min} .

es apenas superior al costo del método original de suavizado, pero dado que no se tiene una limitación en el paso de tiempo a adoptar para la simulación, el costo total de cómputo de un problema de interacción fluido estructura sería inferior.

La técnica propuesta fue utilizada en la generación de la malla para un dominio 2D simple, quedando como trabajo a futuro su aplicación a dominios de mayor complejidad en 2 y 3 dimensiones. Un estudio matemático más profundo y exhaustivo de la estrategia también se propone como tarea futura.

REFERENCIAS

- A.B Amenta, M.W. Bern, y D. Eppstein. Optimal point placement for mesh smoothing. *Journal of Algorithms*, 30:302–322, 1999.
- E. Amezua, M. Hormaza, A. Hernandez, y M. Ajuria. A method for the improvement of 3D solid finite-element meshes. *Advances in Engineering Software*, 22:45–53, 1995.
- P.Z. Bar-Yoseph, S. Mereu, S. Chippada, y V.J. Kalro. Automatic monitoring of element shape quality in 2-D and 3-D computational mesh dynamics. *Computational Mechanics*, 27:378–395, 2001.

- F.J. Blom. Considerations on the spring analogy. *Numerical Methods in Fluids*, 32:647–668, 2000.
- S. Cannan, J. Tristano, y M. Staten. An approach to combined laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral and quad-dominant meshes. *Proceedings of the Seventh International Meshing Roundtable, Dearborn, MI*, pages 479–494, 1998.
- G. Chiandussi, G. Bugada, y E. Oñate. A simple method for automatic update of finite element meshes. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16:1–19, 2000.
- Burg C.O.E. A robust unstructured grid movement strategy using three-dimensional torsional springs. *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, 2004.
- J.M. Escobar, E. Rodríguez, R. Montenegro, G. Montero, y J.M. González-Yuste. Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2775–2787, 2003.
- C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, y M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169:231–245, 1998.
- C. Farhat y P. Geuzaine. Design and analysis of robust ALE time-integrators for the solution of unsteady flow problems on moving grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:4073–4095, 2004.
- C. Farhat, P. Geuzaine, y C. Grandmont. The discrete geometric conservation law and the non-linear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics*, 174:669–694, 2001.
- L.A. Freitag y P.M. Knupp. Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number. *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories*, pages 247–258, 1999.
- L.A. Freitag y P. Plassmann. Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:109–125, 2000.
- H.J. Haussling y R.M. Coleman. A method for generation of orthogonal and nearly orthogonal boundary-fitted coordinate systems. *Journal of Computational Physics*, 43:373–381, 1981.
- P. Kjellgren y J. Hyvärinen. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method. *Computational Mechanics*, 21:81–90, 1998.
- P. Knupp. Winslow smoothing on two-dimensional unstructured meshes. *Engineering with Computers*, 15:263–268, 1999.
- P. Knupp. Hexahedral mesh untangling and algebraic mesh quality metrics. *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable*, pages 173–183, 2000.
- B. Koobus y C. Farhat. Second order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 170:103–129, 1999.
- K. Kovalev, M. Delanaye, y Ch. Hirsch. Untangling and optimization of unstructured hexahedral meshes. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 43:807–814, 2003.
- R. Löhner y C. Yang. Improved ALE mesh velocities for moving bodies. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12:599–608, 1996.
- E.J. López, N.M. Nigro, M.A. Storti, y J.A. Toth. A minimal element distortion strategy for computational mesh dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006.
- R. Montenegro, J.M. Escobar, E. Rodríguez, G. Montero, y J.M. González-Yuste. Improved objective functions for tetrahedral mesh optimisation. *Lecture Notes in Computer Science*, 2657:568–578, 2003.

- P.Y. Papalambros y D.J. Wilde. *Principles of Optimal Design. Modeling and Computation*. Cambridge University Press, 1988.
- V.N Parthasarathy y S. Kodiyalam. A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing. *Finite Elements in Analysis and Design*, 9:309–320, 1991.
- K. Stein, T.E. Tezduyar, y R. Benney. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:2019–2032, 2004.
- A.M. Winslow. Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a nonuniform triangle mesh. *Journal of Computational Physics*, 2:149–172, 1967.
- P.D. Zavattieri, E.A. Dari, y G.C. Buscaglia. Optimizaton strategies in unstructured mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:2055–2071, 1998.