

SOBRE EL USO DE LA TEORÍA REFINADA DE ZIGZAG (RZT) EN LAMINADOS NO-HOMOGÉNEOS

ON THE USE OF THE REFINED ZIGZAG THEORY IN NON-HOMOGENEOUS LAMINATES

Fernando G. Flores^a, Sergio H. Oller^b y Liz G. Nallim^c

^a*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET, y Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

^b*CIMNE, Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, 08034 Barcelona-España, oller@cimne.upc.edu, <http://www.cimne.upc.edu>*

^c*Facultad de Ingeniería, INQUI (CONICET), Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, lnallim@unsa.edu.ar, <http://www.ing.unsa.edu.ar>*

Palabras clave: Laminados, Teoría Refinada de Zigzag, Elementos Finitos, Delaminación.

Resumen. El presente trabajo muestra posibilidades y limitaciones de la teoría refinada de zigzag (RZT) que ha sido implementada en distintos elementos finitos estructurales de viga y lámina. La RZT permite tratar estructuras laminadas en forma económica, adicionando sólo un grado de libertad nodal por dirección espacial del laminado, con muy buena precisión. Consiste en suponer que la variación de los desplazamientos en el espesor de la viga/lámina tiene una forma zigzagueante impuesta en función de la rigidez al corte de cada lámina del laminado. En este trabajo se presenta los detalles de un elemento de viga/lámina de revolución utilizado para las simulaciones numéricas y se dan detalles de la teoría refinada de zigzag a fin de discutir algunos problemas que ocurren al tratar el fenómeno no-lineal de delaminación. Se presentan y discuten dos ejemplos en los que se incluyen distintas inhomogeneidades que muestran las limitaciones de la RZT para el tratamiento de vigas parcialmente delaminada

Keywords: Keywords: Composite Laminates, Refined zigzag theory, Finite Elements, Delamination.

Abstract. This paper is intended to show some limitations of the refined zigzag theory (RZT) in the analysis of non-homogeneous laminates. The RZT, that has been implemented in different structural (beam, plate and shell) finite elements, can handle composite laminates economically, adding only one nodal degree of freedom per spatial dimension of the laminate, with very good accuracy. The in-plane displacements are assumed to have a piece-wise linear shape across the thickness as a function of the shear stiffness of each composite layer. This paper presents the main aspects of a beam/shell of revolution element used for the numerical simulations, the details of the refined zigzag theory are given also in order to discuss some problems that occur when dealing with the non-linear phenomenon of delamination. Two examples are presented and discussed, including different inhomogeneities that show the limitations of the RZT for the treatment of partially delaminated beams.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría refinada de zigzag (RZT de su acrónimo en inglés) orientada al tratamiento de laminados compuestos es una evolución de las teorías de zigzag propuestas a partir de los 80 (en [Carrera \(2003\)](#) puede verse una reseña de estas teorías). La RZT ([Tessler et al. \(2010\)](#)) parte de la teoría con deformaciones de corte de primer orden (FSDT de su acrónimo en inglés) que incluye 5 grados de libertad (tres desplazamientos de la superficie media de la lámina más los dos componentes de rotación en el plano de la normal) agregando sólo dos grados de libertad, que corresponden a las amplitudes de desplazamientos jerárquicos sobre la hipótesis de desplazamientos lineales en el espesor. Esta teoría conduce a tensiones de corte transversales constantes en cada lamina (y por lo tanto discontinuas en el espesor del laminado), pero permite tratar condiciones de contorno empotrado que era una limitación que presentaban las primeras teorías de zigzag. Por otro lado las tensiones de corte obtenidas directamente usando la relación constitutiva y las deformaciones de corte en cada punto del espesor muestran en muchos casos una pobre aproximación. Una precisa recuperación de las tensiones de corte requiere de la integración en el espesor del laminado de las ecuaciones de equilibrio en el plano de la lámina, para lo cual hay que evaluar las derivadas de las tensiones entre elementos finitos. Para evitar esto se han desarrollado versiones mixtas de la RZT ([Iurlaro et al. \(2015\)](#); [Tessler \(2015\)](#)) donde también se incluyen otras mejoras en la definición de los desplazamientos adicionales. La RZT ha sido implementada, en todos los casos con cinemática lineal, en elementos finitos de viga ([Gherlone et al. \(2011\)](#); [Oñate et al. \(2012\)](#); [Di Sciuva et al. \(2015\)](#); [Nallim et al. \(2017\)](#)), en elementos de placa plana ([Tessler et al. \(2010\)](#); [Eijo et al. \(2013a\)](#); [Iurlaro et al. \(2013\)](#); [Versino et al. \(2013\)](#); [Barut et al. \(2013\)](#)) y en elementos de doble curvatura ([Versino et al. \(2014\)](#)). También ha sido implementada incluyendo cinemática no-lineal restringida a pequeñas deformaciones elásticas en elementos de lámina de doble curvatura ([Flores \(2014\)](#)) y en un elemento de sólido-lámina ([Flores et al. \(2017\)](#)). Los resultados publicados muestran para laminados homogéneos, i.e. cuya topología se mantiene en todo el dominio, incluyendo distintos tipos de secciones pero principalmente del tipo sándwich, una muy buena aproximación al campo de tensiones axiales. Esto permite obtener las tensiones transversales de corte por integración en la dirección transversal de las ecuaciones de equilibrio en el plano de la lámina. Naturalmente una muy buena aproximación a las tensiones axiales está asociada a una aproximación aún mejor a los desplazamientos en el plano de la lámina. En general las aproximaciones no incluyen variación de los desplazamientos transversales en el espesor salvo en [Barut et al. \(2013\)](#) y colateralmente en [Flores et al. \(2017\)](#). Por otro lado en varios de los trabajos citados se ha reportado una muy buena aproximación a frecuencias y modos de vibración en vigas y placas planas. La utilización de cinemática no-lineal ha permitido comparar, en unos pocos casos, cargas de pandeo con muy buena precisión. Otro aspecto que ha despertado interés es la posibilidad de utilizar esta teoría (RZT) para problemas de delaminación. Las dificultades que aparecen aquí son la falta de homogeneidad y la necesidad de actualizar la función de interpolación transversal durante el proceso ([Eijo et al. \(2013b, 2014\)](#)).

En el presente trabajo se muestra una implementación de la RZT en un elemento de viga/lámina de revolución. Para ello inicialmente se resume la teoría de láminas utilizada y la formulación básica (FSDT) del elemento de viga/lámina. A continuación se introducen dos variantes de la RZT, cómo se implementa en el elemento descripto, y cómo se modifica la formulación del elemento para el caso en que haya una o más secciones definidas. Luego se presentan simulaciones numéricas en las cuales por un lado, se muestra la buena correlación con comparaciones con modelos de sólidos, y por otro las limitaciones al intentar simular discontinuidades

por delaminación. Finalmente, se resumen algunas conclusiones.

2. ELEMENTO FINITO DE VIGA/LÁMINA ESTÁNDAR (FSDT)

2.1. Resumen de la teoría de láminas utilizada

La teoría de láminas considerada está basada en la restricción al caso bidimensional de la propuesta por Simo y colaboradores (Simo y Fox (1989)). La configuración de la lámina en \mathbf{R}^2 está definida por (ver Figura 1):

a) la superficie media φ definida por la transformación

$$\varphi : \bar{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \tag{1}$$

b) el campo director \mathbf{t} definida por la transformación

$$\mathbf{t} : \bar{\mathcal{S}} \longrightarrow S^2. \tag{2}$$

El vector \mathbf{t} define la dirección de la fibra a través del espesor que permanece recta durante la deformación (hipótesis de Kirchhoff generalizada). El dominio $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}$ se supone compacto y puntos caracterizados por $\xi \in \bar{\mathcal{S}}$.

Con esta notación, la geometría de la lámina puede expresarse por

$$\Phi := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 / \mathbf{x} = \varphi + z\mathbf{t}, \quad z \in [-h, +h]\} \tag{3}$$

$[-h, +h]$ define el espesor de la lámina. Usando la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ en \mathbf{R}^2 se puede escribir

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^i \mathbf{e}_i \\ \varphi_{,\xi} &= \varphi_{,\xi}^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t} &= t^i \mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{4}$$

Definiendo ahora un sistema convectivo sobre las configuraciones deformada y la de referencia $(()^0$ denota a variables geométricas asociadas con la configuración de referencia Φ^0):

$$\begin{aligned} \{\varphi_{,\xi}, \mathbf{t}\} &\equiv \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \\ \{\varphi_{,\xi}^0, \mathbf{t}^0\} &\equiv \{\mathbf{a}_1^{(0)}, \mathbf{a}_2^{(0)}\} \end{aligned} \tag{5}$$

donde la coordenada ξ queda naturalmente asociada con la dirección convectiva 1. Se definen las siguientes medidas sobre la superficie media

$$\begin{aligned} d\mu^0 &= \bar{j}_0 \, d\xi \, d\zeta \\ d\mu &= \bar{j} \, d\xi \, d\zeta \end{aligned} \tag{6}$$

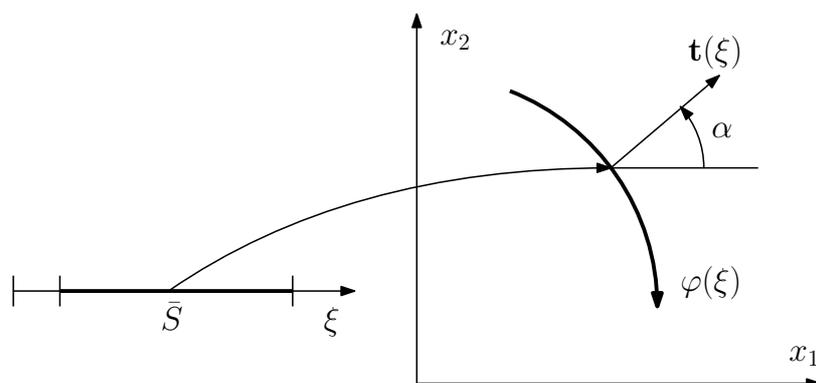


Figura 1: Definición básica de la geometría de la lámina

con

$$\begin{aligned} \bar{j}^0 &= \left(\boldsymbol{\varphi}'_{\xi}^{(0)} \times \mathbf{t}^{(0)} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\zeta}^{(0)} \\ \bar{j} &= \left(\boldsymbol{\varphi}'_{\xi} \times \mathbf{t} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\zeta} \end{aligned} \quad (7)$$

donde ζ es la coordenada en la dirección normal al plano, que para tensión plana, deformación plana o láminas de revolución conduce a $\boldsymbol{\varphi}'_{\zeta} = \mathbf{e}_3$. Se define también:

$$\bar{J} = \bar{j} / \bar{j}^0 \quad (8)$$

El gradiente de la deformación sobre la superficie media ($z = 0$) está dado por la aplicación lineal

$$\bar{\mathbf{F}} := \boldsymbol{\varphi}'_{\xi} \otimes \mathbf{a}^{1(0)} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{a}^{2(0)} + \boldsymbol{\varphi}'_{\zeta} \otimes \mathbf{e}^3 \quad (9)$$

con el cual pueden definirse las siguientes medidas de deformación Lagrangeanas $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\varphi}'_{\xi} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\xi} - \boldsymbol{\varphi}'_{\xi}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\xi}^{(0)} \right] \quad (10)$$

$$\gamma = \boldsymbol{\varphi}'_{\xi} \cdot \mathbf{t} - \boldsymbol{\varphi}'_{\xi}^{(0)} \cdot \mathbf{t}^{(0)} \quad (11)$$

$$\chi_1 = \boldsymbol{\varphi}'_{\xi} \cdot \mathbf{t}'_{\xi} - \boldsymbol{\varphi}'_{\xi}^{(0)} \cdot \mathbf{t}'_{\xi}^{(0)} \quad (12)$$

Para láminas de revolución deben además considerarse la deformación axial del paralelo y la segunda curvatura

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1}{x_1^{(0)}} \right)^2 - 1 \right] \quad (13)$$

$$\chi_3 = \frac{\sin \alpha^{(0)}}{x_1^{(0)}} - \frac{x_1 \sin \alpha}{\left(x_1^{(0)} \right)^2} \quad (14)$$

Los esfuerzos resultantes pueden escribirse en función de las medidas de tensión definidas sobre la configuración actual o la de referencia

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^1 &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{g}^1 j \, dz \\ &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \mathbf{P} \mathbf{g}^{1(0)} j^0 \, dz \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^1 &= \mathbf{t} \times \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} z \boldsymbol{\sigma} \mathbf{g}^1 j \, dz \\ &= \mathbf{t} \times \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} z \mathbf{P} \mathbf{g}^{1(0)} j^0 \, dz = \mathbf{t} \times \tilde{\mathbf{m}}^1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{g}^2 j \, dz \\ &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \mathbf{P} \mathbf{g}^{2(0)} j^0 \, dz \end{aligned} \quad (17)$$

donde $\mathbf{g}_1 = \partial \mathbf{x} / \partial \xi$, $\mathbf{g}_2 = \partial \mathbf{x} / \partial z$, y \mathbf{g}^1 , \mathbf{g}^2 son los correspondientes vectores contravariantes. $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{P} son respectivamente los tensores de tensiones de Cauchy y Iro de Piola-Kirchhoff. Por otro lado \mathbf{n}^1 y \mathbf{m}^1 son la fuerza resultante y el momento a lo largo de la línea $\xi = \text{cte}$, y \mathbf{l} es el

esfuerzo resultante a través del espesor. El vector $\tilde{\mathbf{m}}^1$ se denomina “momento flector director” y permite definir las siguientes “esfuerzos resultante efectivos”

$$\begin{aligned} \tilde{n}^1 &= n^1 - \lambda_1 \tilde{m}^1 \\ \tilde{q} &= n^{13} - \lambda_1 \tilde{m}^1 \end{aligned} \tag{18}$$

donde λ_i se obtiene de la relación

$$\mathbf{t}_{r_1} = \lambda_1 \boldsymbol{\varphi}_{r_1} + \lambda_2 \mathbf{t} \tag{19}$$

En el caso de láminas de revolución debe también definirse

$$\begin{aligned} \tilde{n}^3 &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \mathbf{e}^3 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}^3 j \, dz \\ &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \mathbf{e}^3 \mathbf{P} \mathbf{e}^3 j^0 \, dz \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}^3 &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} z \mathbf{e}^3 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}^3 j \, dz \\ &= \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} z \mathbf{e}^3 \mathbf{P} \mathbf{e}^3 j^0 \, dz \end{aligned} \tag{21}$$

De las expresiones de la potencia interna por unidad de longitud, puede demostrarse que los esfuerzos resultantes efectivos definidos arriba son conjugados de las medidas de deformación Lagrangeanas

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \int_A \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dA \\ &= \int_A [\tilde{n}^{\alpha\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \tilde{q} \dot{\gamma} + \tilde{m}^{\alpha\alpha} \dot{\chi}_{\alpha\alpha}] \, d\mu \end{aligned} \tag{22}$$

Postulando la existencia de una función energía interna de deformación w , usando la desigualdad de Clausius-Duhem y siguiendo argumentos estándar, se pueden formular ecuaciones constitutivas hiperelásticas en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{n}^\alpha &= \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_\alpha} \\ \tilde{q} &= \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial \gamma} \\ \tilde{m}^\alpha &= \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial \chi_\alpha} \end{aligned} \tag{23}$$

con

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{j}} \int_{-h}^{+h} \rho j \, d\xi \tag{24}$$

El modelo más simple conduce a vigas 2-D donde en el caso de secciones homogéneas:

$$\bar{J} \begin{bmatrix} \tilde{n}^1 \\ \tilde{q} \\ \tilde{m}^1 \end{bmatrix} = 2Ebh \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{5}{12(1+\nu)} & \\ & & \frac{h^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \gamma^e \\ \chi_1^e \end{bmatrix} \tag{25}$$

con E el módulo de Young y ν la relación de Poisson. En tanto que para deformación plana y láminas de revolución se tiene

$$\bar{J} \begin{bmatrix} \tilde{n}^1 \\ \tilde{n}^3 \\ \tilde{q} \\ \tilde{m}^1 \\ \tilde{m}^3 \end{bmatrix} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & \frac{5(1-\nu)}{12} & & \\ & & & \frac{h^2}{3} & \\ & & & \nu \frac{h^2}{3} & \frac{h^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_3^e \\ \gamma^e \\ \chi_1^e \\ \chi_3^e \end{bmatrix} \tag{26}$$

2.2. Elementos finitos considerados

El modelo de lámina definido arriba, que implica continuidad C^0 , y que se asocia con la teoría de láminas con deformaciones de corte transversal de primer orden (FSDT), fue implementado en un elemento finito isoparamétrico sencillo (Flores (1995)), de dos y tres nudos y tres grados de libertad por nudo (los 2 desplazamientos en el plano y el ángulo que forma el director con el eje global x_1). Para evitar el bloqueo debido al corte transversal se utiliza integración reducida, con un punto de integración para el elemento de 2 nudos y 2 puntos de integración para el elemento de 3 nudos que puede aproximar con mejor detalle una superficie curva.

3. TEORÍA REFINADA DE ZIGZAG RZT Y RZT₃

La teoría refinada de zigzag (RZT), propuesta y desarrollada por Tessler y colaboradores (Tessler et al. (2010)), ha sido implementada en distintos modelos de elementos finitos. El objetivo es mejorar sustancialmente la FSDT cuando se abordan problemas con secciones laminadas, particularmente secciones del tipo sándwich, es decir con dos capas externas rígidas y un núcleo flexible.

En la FSDT la deformación de corte $\gamma(z)$ es constante y por lo tanto la tensión de corte $\tau(z)$ es discontinua entre dos capas de material con distinto módulo de corte. Para mejorar esto se propone modificar la deformación de corte incluyendo desplazamientos adicionales (jerárquicos) ψ en la dirección del plano medio cuyo perfil transversal $\phi(z)$ es un zigzag con derivada $\beta^k = \phi_{i_z}^k$ constante en cada capa k :

$$u_1(z) = u_1^{FSDT}(z) + \psi\phi(z) \quad (27)$$

La deformación de corte total puede verse ahora como la suma de dos componentes: una constante η y una discontinua que darán lugar a dos componentes de tensión de corte, una discontinua y la otra constante respectivamente. La componente de deformación η constante sobre el espesor puede verse como un cambio de la deformación de corte uniforme en el espesor de la teoría de Reissner-Mindlin

$$\eta = \gamma - \psi \quad (28)$$

que al igual que antes conduce a una discontinuidad de las tensiones de corte transversal entre capas. Por otro lado la definición de la función $\phi(z)$ a partir de los módulos de corte de cada capa G^k ($k = 1..N$ con N el número de capas) se basa en la idea de que las tensiones de corte se escriben como la suma de dos partes

$$\begin{aligned} \tau^k(z) &= G^k\eta + G^k(1 + \phi_{i_z}^k)\psi \\ &= G^k\eta + G^k[(1 + \beta^k)]\psi \\ &= G^k\eta + \bar{\tau}^k(z) \end{aligned} \quad (29)$$

y de plantear la continuidad de la componente $\bar{\tau}^k(z)$ en cada interfaz (hay $N - 1$ interfaces), lo que conduce a

$$\begin{aligned} G^k[(1 + \beta^k)] &= \bar{G} \\ \beta^k &= \frac{\bar{G}}{G^k} - 1 \end{aligned} \quad (30)$$

donde \bar{G} resulta de la condición $\int_{-h}^{+h} \beta dz = 0$ (con h el semi-espesor y h^k el espesor de cada capa)

$$\int_{-h}^{+h} \beta^k dz = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\bar{G}}{G^k} - 1 \right) h_k = \bar{G} \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{G^k} - 2h = 0 \quad (31)$$

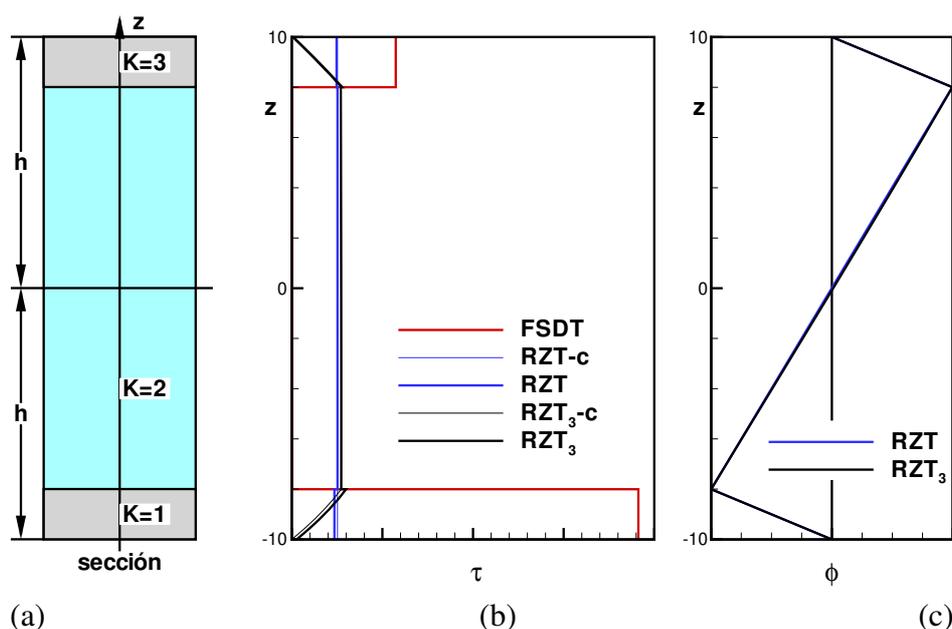


Figura 2: (a)Sección, (b)Distribución de τ y (c)valor de la función ϕ en FSDT, RZT y RZT₃

es decir

$$\bar{G} = \frac{2h}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k}{G^k}} \quad (32)$$

Esta versión inicial de la RZT conduce a que la tensión $\tau(z)$ es la suma de un término discontinuo (asociado a η) y otro constante $\bar{\tau}$, lo cual hace imposible satisfacer simultáneamente continuidad y condiciones de contorno. Lo que si se logra con la RZT es pasar de una FSDT con $\gamma(z)$ constante y donde el corte es tomado solamente por las capas más rígidas (en una sección sándwich) a una importante contribución del núcleo a soportar el esfuerzo de corte debido a la componente $\bar{\tau}$. La ventaja principal de la RZT es que el perfil $\phi(z)$ permite acomodar mucho mejor las tensiones longitudinales $\sigma_x(z)$. Esto conduce a una rigidez flexional mucho más ajustada a la realidad, lo que a su vez permite obtener un perfil de tensiones de corte con muy buena precisión si se recurre a integrar las ecuaciones de equilibrio en la dirección transversal y no a través de las relaciones cinemáticas junto a las ecuaciones constitutivas.

En la Figura 2 se muestra lo que ocurre en una viga tipo sándwich asimétrica con un núcleo muy flexible y una capa inferior con un módulo de elasticidad transversal el triple que el de la capa superior. El ejemplo corresponde a una viga en voladizo con un esfuerzo de corte constante (ver Figura 3 y Tabla 1) y la sección está a mitad de la longitud, donde la influencia de la restricción del empotramiento en la distribución de tensiones es muy baja. En la FSDT todo el corte es tomado por las capas rígidas proporcionalmente a su módulo G con discontinuidades muy marcadas. De la RZT se muestran dos curvas, una que corresponde a la parte continua $\bar{\tau}$ (RZT-c) y la total (RZT). Claramente no se anula en las superficies externas pero a diferencia de la FSDT el núcleo contribuye sustancialmente a equilibrar el corte.

En el trabajo de Iurlaro et al. (2015) hay un aspecto muy interesante que es la definición de una nueva función zigzag. En el trabajo citado se mejora la definición de $\bar{\tau}^k(z)$ que ahora además de continua, es variable y nula en los bordes. Así si $\eta \cong 0$ se tiene una aproximación más precisa y para secciones alejadas de restricciones geométricas se puede usar de manera directa para una determinación confiable de las tensiones de corte.

La obtención de la nueva función $\phi(z)$, a la que denotaremos como RZT₃, parte de proponer

para el desplazamiento adicional la siguiente forma:

$$u_a(z) = [z^2\chi_0 + z^3\omega_0 + v^k(z)]\psi = \phi(z)\psi \quad (33)$$

donde $v(z)$ es lineal por tramos (zigzag), es sólo parte de la $\phi(z)$ buscada, y se han agregado dos términos distribuidos sobre el espesor: uno cuadrático $z^2\chi_0$ y otro cúbico $z^3\omega_0$. Las tensiones de corte se escriben al igual que en la RZT inicial (con $\eta = \gamma - \psi$)

$$\begin{aligned} \tau^k(z) &= G^k\eta + G^k[(1 + v_{,z})\psi + 2z\chi_0\psi + 3z^2\omega_0\psi] \\ &= G^k\eta + \bar{\tau}^k(z) \end{aligned} \quad (34)$$

Para redefinir la función zigzag $\phi(z)$ se establecen las siguientes condiciones: en las superficies superior e inferior se pide (2 condiciones, nuevas respecto a la versión original)

$$\bar{\tau}^k(z = \pm h) = 0 \quad (35)$$

(Notar que se anula la componente $\bar{\tau}^k(z)$ pero no la tensión de corte total $\tau^k(z = \pm h) = G^{1-N}\eta$ que sólo se anula si $\eta = 0$) luego

$$(1 + v_{,z}^N) + 2h\chi_0 + 3h^2\omega_0 = 0 \quad (36)$$

$$(1 + v_{,z}^1) - 2h\chi_0 + 3h^2\omega_0 = 0 \quad (37)$$

alternativamente sumando/restando se obtienen dos expresiones desacopladas para χ_0 y ω_0

$$(2 + v_{,z}^N + v_{,z}^1) + 6h^2\omega_0 = 0 \quad (38)$$

$$(v_{,z}^N - v_{,z}^1) + 4h\chi_0 = 0 \quad (39)$$

resolviendo

$$\chi_0 = -\frac{(v_{,z}^N - v_{,z}^1)}{4h} \quad (40)$$

$$\omega_0 = -\frac{(2 + v_{,z}^N + v_{,z}^1)}{6h^2} \quad (41)$$

Llevando esta nueva definición a (27) la tensión de corte se escribe:

$$\begin{aligned} \tau^k(z) &= G^k\eta + G^k[(1 + v_{,z}) - 2z\chi_0 - 3z^2\omega_0]\psi \\ &= G^k\eta + \bar{\tau}^k(z) \end{aligned} \quad (42)$$

En forma similar a la RZT en cada interfaz ($N - 1$ condiciones) se impone la continuidad de la componente $\bar{\tau}$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^k(z_k) - \bar{\tau}^{k+1}(z_k) &= 0 \\ G^k[(1 + v_{,z}^k) + 2z_k\chi_0 + 3z_k^2\omega_0] - G^{k+1}[(1 + v_{,z}^{k+1}) + 2z_k\chi_0 + 3z_k^2\omega_0] &= 0 \\ \frac{v_{,z}^k}{1 - G^{k+1}/G^k} + \frac{v_{,z}^{k+1}}{1 - G^k/G^{k+1}} + 2z_k\chi_0 + 3z_k^2\omega_0 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Notar que las condiciones de igualdad de tensiones de corte no pueden plantearse de esta forma si los módulos de corte son iguales en dos capas adyacentes. En tal caso resulta simplemente

$$v_{,z}^k - v_{,z}^{k+1} = 0 \quad (44)$$

y finalmente las dos condiciones en las superficies externas para anular el desplazamiento adicional en tales superficies (con $v_0 = v(z = -h)$)

$$\phi(z = -h) = \phi(z = h) = 0 \quad (45)$$

$$\phi(z = -h) = h^2\chi_0 - h^3\omega_0 + v_0 \quad (46)$$

$$\phi(z = h) = h^2\chi_0 + h^3\omega_0 + v_0 \quad (47)$$

Se tienen entonces $N + 3$ condiciones, cuyas incógnitas son χ_0 , ω_0 , las v_z^k ($k = 1..N$) y v_0 .

En la Figura 2 se muestra también la distribución de tensiones de corte usando esta aproximación. Puede verse que en las capas externas la tensión de corte crece prácticamente desde cero (η tiene un valor muy bajo en el ejemplo graficado) hasta un valor prácticamente constante en el núcleo. En la parte derecha de la figura se muestran las funciones $\phi(z)$ para ambas versiones de la RZT. Aunque a simple vista la RZT₃ es idéntica a la RZT original y lineal entre capas, las componentes cuadráticas y cúbicas permiten ajustar la condición de tensión de corte nula en las superficies externas. Adicionalmente, notar que la $\phi(z)$ de la RZT original resulta nula para secciones de una sola capa (un único material) o cuando no hay cambio en el valor de G^k entre capas, como se deduce de las expresiones (30 y 32). En tal caso se ha propuesto una técnica especial en (Tessler et al. (2011)) para la obtención de la $\phi(z)$. Por el contrario la RZT₃ conduce para ese tipo de secciones a una variación parabólica de la componente $\bar{\tau}$ sin necesidad de ninguna técnica especial.

4. IMPLEMENTACIÓN DE LA RZT₃ EN EL ELEMENTO DE VIGA

En el sistema convectivo la configuración (3) se escribe ahora

$$\Phi := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 / \mathbf{x} = \varphi + z\mathbf{t} + \psi\phi(z)\mathbf{a}_1, \quad z \in [-h, +h]\} \quad (48)$$

y a los fines de mantener una implementación sencilla se supone que las deformaciones son pequeñas, de tal forma de que se puedan sumar directamente las contribuciones del elemento base (FSDT) con las que resultan de los desplazamientos adicionales ($\psi\phi(z)\mathbf{a}_1$).

4.1. Modelo con una sección geométrica y mecánicamente constante en la luz de la viga

Las deformaciones de interés son

$$\varepsilon_1^k = [1, z, \phi^k] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \chi_1 \\ \psi'_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_p \hat{\varepsilon}_p \quad (49)$$

$$\gamma_{1z}^k = [1, \beta^k] \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{S}_t \hat{\varepsilon}_t \quad (50)$$

La energía interna de deformación por unidad de longitud de la viga, asociada con las ten-

siones en el plano normal a \mathbf{a}_1 , resulta de integrar en el área de la sección transversal:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_1^k \sigma_1^k + \gamma_{1z}^k \tau_{1z}^k) dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A (\hat{\varepsilon}_p^T \mathbf{S}_p^T E^k \mathbf{S}_p \hat{\varepsilon}_p + \hat{\varepsilon}_t^T \mathbf{S}_t^T G^k \mathbf{S}_t \hat{\varepsilon}_t) dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \left(\hat{\varepsilon}_p^T \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \phi^k \end{bmatrix} E^k [1, z, \phi^k] \hat{\varepsilon}_p + \hat{\varepsilon}_t^T \begin{bmatrix} 1 \\ \beta^k \end{bmatrix} G^k [1, \beta^k] \hat{\varepsilon}_t \right) dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \left(\hat{\varepsilon}_p^T E^k \begin{bmatrix} 1 & z & \phi^k \\ z & z^2 & z\phi^k \\ \phi^k & z\phi^k & (\phi^k)^2 \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}_p + \hat{\varepsilon}_t^T G^k \begin{bmatrix} 1 & \beta^k \\ \beta^k & (\beta^k)^2 \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}_t \right) dA \quad (51)
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$\mathbf{D}_p = \int_A E^k \begin{bmatrix} 1 & z & \phi^k \\ z & z^2 & z\phi^k \\ \phi^k & z\phi^k & (\phi^k)^2 \end{bmatrix} dA \quad (52)$$

y

$$\mathbf{D}_s = \int_A G^k \begin{bmatrix} 1 & \beta^k \\ \beta^k & (\beta^k)^2 \end{bmatrix} dA \quad (53)$$

Luego la expresión de la energía interna de deformación se puede escribir

$$w_1 = \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}_p \hat{\varepsilon}_p + \hat{\varepsilon}_t^T \mathbf{D}_t \hat{\varepsilon}_t) \quad (54)$$

lo cual permite definir esfuerzos integrados en la sección

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_p \\ \hat{\sigma}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_p \\ \hat{\varepsilon}_t \end{bmatrix} \quad (55)$$

4.2. Modelo con más de una sección (laminados no homogéneos)

La implementación de la RZT se basa en la idea de grados de libertad jerárquicos ψ asociados a funciones de forma ϕ . Es decir que los grados de libertad jerárquicos nodales ψ^i están por un lado asociados a funciones de forma nodales $N^i(\xi)$ en el plano del laminado (o dirección axial de la viga) y por otro lado a la función $\phi(z)$ en la dirección transversal. Cuando se tiene un único laminado, es decir la sección es la misma a lo largo de la viga o lámina (laminado homogéneo), las función ϕ es única en todo el dominio.

Cuando las propiedades del laminado cambian a lo largo de la viga o lámina, la función ϕ deja de ser la misma para todo el modelo. Como las incógnitas nodales son las amplitudes ψ^i y éstas multiplican a las $\phi(z)$, si estas últimas son distintas a un lado y otro del nudo el modelo de elementos finitos deja de ser conforme, es decir se pierde la continuidad, ya que los desplazamientos dejan de ser iguales a un lado y a otro de la interfaz entre elementos. Un modelo “no conforme”, en este caso, conduce a resultados inconsistentes.

Resulta entonces necesario modificar la interpolación transversal a los fines de mantener un modelo continuo. Un caso donde las propiedades de la sección cambian es cuando esta presenta algún tipo de daño. Por ejemplo, para simular la delaminación de un tramo interlaminar se ha

utilizado un modelo de daño escalar (Eijo et al. (2013b)), que implica degradar los módulos de elasticidad (longitudinal y transversal) del material de una capa. Este cambio en las propiedades de una capa requiere modificar la función $\phi(z)$ asociada.

Un aspecto distintivo del MEF es que en cada elemento e hay un único “material” o una única “sección” y como se ha visto la función ϕ definida por la RZT depende de las propiedades de los materiales. Luego, puede decirse, que cada elemento tiene una función ϕ^e asociada al laminado correspondiente. A continuación, para tratar este caso, se plantean dos opciones conceptualmente sencillas que consisten en suponer que en la interfaz entre elementos la función ϕ asociada al nudo n resulte de:

- a) el promedio de las propiedades de las secciones asociadas a los elementos adyacentes al nudo $\phi^n = f(\bar{G})$.
- b) el promedio de las funciones asociadas a los elementos adyacentes al nudo

De esta forma puede suponerse que los desplazamientos adicionales en el plano resultan de la interpolación (para un elemento de dos nudos)

$$u_a(\xi, z) = N^1(\xi) \phi^1(z) \psi^1 + N^2(\xi) \phi^2(z) \psi^2 \quad (56)$$

donde las $N^n(\xi)$ son los polinomios de Lagrange lineales

$$\begin{aligned} N^1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N^2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (57)$$

en tanto que las funciones de interpolación transversales serán, para el caso a)

$$\begin{aligned} \phi^1(z) &= f\left(\frac{1}{2} [G^{i1}(z) + G^{d1}(z)]\right) \\ \phi^2(z) &= f\left(\frac{1}{2} [G^{i2}(z) + G^{d2}(z)]\right) \end{aligned} \quad (58)$$

donde $G^{iI}(z)$ y $G^{dI}(z)$ son las propiedades de las secciones a la izquierda (i) y derecha (d) del nudo I .

Mientras que para el caso b) son

$$\begin{aligned} \phi^1(z) &= \frac{1}{2} (\phi^{i1}(z) + \phi^{d1}(z)) \\ \phi^2(z) &= \frac{1}{2} (\phi^{i2}(z) + \phi^{d2}(z)) \end{aligned} \quad (59)$$

con ϕ^{iI} y ϕ^{dI} las funciones evaluadas con las propiedades de la sección en los elementos a la izquierda y derecha del nudo I .

La deformación axial adicional resulta

$$\varepsilon_{1\phi} = -\frac{1}{L} \phi^1(z) \psi^1 + \frac{1}{L} \phi^2(z) \psi^2$$

En tanto que la deformación de corte adicional valuada en el centro del elemento vale

$$\gamma_\phi = \frac{\partial u_a}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta^1(z) \psi^1 + \frac{1}{2} \beta^2(z) \psi^2 \quad (60)$$

Luego las deformaciones totales se pueden escribir como

$$\varepsilon_1^k = [1, z, \phi^1, \phi^2] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \chi_1 \\ -\frac{1}{L}\psi^1 \\ \frac{1}{L}\psi^2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^p \bar{\varepsilon}^p \quad (61)$$

$$\gamma_{1z}^k = [1, \beta^1, \beta^2] \begin{bmatrix} \gamma \\ \frac{1}{2}\psi^1 \\ \frac{1}{2}\psi^2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^t \bar{\varepsilon}^t \quad (62)$$

Aparecen diferencias con respecto a la formulación con secciones constantes, dado que ahora a los fines prácticos de implementación se separan las contribuciones de cada nudo y por lo tanto de cada función de interpolación transversal ϕ .

Las tensiones relevantes se pueden escribir de la forma

$$\sigma_1^k = E^k \varepsilon_1^k = E^k \mathbf{S}^p \bar{\varepsilon}^p \quad (63)$$

$$\tau_{1z}^k = G^k \gamma_{1z}^k = G^k \mathbf{S}^t \bar{\varepsilon}^t \quad (64)$$

Que llevado a la energía interna de deformación por unidad de longitud, permite integrar en la sección:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_1^k \sigma_1^k + \gamma_{1z}^k \tau_{1z}^k) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A (\bar{\varepsilon}^{pT} \mathbf{S}^{pT} E^k \mathbf{S}^p \bar{\varepsilon}^p + \bar{\varepsilon}^{tT} \mathbf{S}^{tT} G^k \mathbf{S}^t \bar{\varepsilon}^t) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left(\bar{\varepsilon}_p^T \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix} E^k [1, z, \phi^1, \phi^2] \bar{\varepsilon}_p + \bar{\varepsilon}_t^T \begin{bmatrix} 1 \\ \beta^1 \\ \beta^2 \end{bmatrix} G^k [1, \beta^1, \beta^2] \bar{\varepsilon}_t \right) dA \quad (65) \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left(\bar{\varepsilon}_p^T E^k \begin{bmatrix} 1 & z & \phi^1 & \phi^2 \\ z & z^2 & z\phi^1 & z\phi^2 \\ \phi^1 & z\phi^1 & (\phi^1)^2 & \phi^1\phi^2 \\ \phi^2 & z\phi^2 & \phi^1\phi^2 & (\phi^2)^2 \end{bmatrix} \bar{\varepsilon}_p + \bar{\varepsilon}_t^T G^k \begin{bmatrix} 1 & \beta^1 & \beta^2 \\ \beta^1 & (\beta^1)^2 & \beta^1\beta^2 \\ \beta^2 & \beta^1\beta^2 & (\beta^2)^2 \end{bmatrix} \bar{\varepsilon}_t \right) dA \end{aligned}$$

Definiendo ahora

$$\mathbf{D}^p = \int_A E^k \begin{bmatrix} 1 & z & \phi^1 & \phi^2 \\ z & z^2 & z\phi^1 & z\phi^2 \\ \phi^1 & z\phi^1 & (\phi^1)^2 & \phi^1\phi^2 \\ \phi^2 & z\phi^2 & \phi^1\phi^2 & (\phi^2)^2 \end{bmatrix} dA \quad (66)$$

y

$$\mathbf{D}^t = \int_A G^k \begin{bmatrix} 1 & \beta^1 & \beta^2 \\ \beta^1 & (\beta^1)^2 & \beta^1\beta^2 \\ \beta^2 & \beta^1\beta^2 & (\beta^2)^2 \end{bmatrix} dA \quad (67)$$

Luego la expresión de la energía interna de deformación por unidad de longitud se puede escribir

$$w_1 = \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}^{pT} \mathbf{D}^p \bar{\varepsilon}^p + \bar{\varepsilon}^{tT} \mathbf{D}^t \bar{\varepsilon}^t) \quad (68)$$

lo cual permite definir esfuerzos integrados en la sección

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}^p \\ \bar{\sigma}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}^p \\ \bar{\varepsilon}^t \end{bmatrix} \quad (69)$$

donde ahora

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}^p \\ \bar{\sigma}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M \\ M_\phi^1 \\ M_\phi^2 \\ Q \\ Q_\phi^1 \\ Q_\phi^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}^p \\ \bar{\varepsilon}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \chi_1 \\ -\frac{1}{L}\psi^1 \\ \frac{1}{L}\psi^2 \\ \gamma \\ \frac{1}{2}\psi^1 \\ \frac{1}{2}\psi^2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

a partir de lo cual los esfuerzos adicionales son el promedio de los valores en $\bar{\sigma}$ y las deformaciones asociadas resultan de sumar las contribuciones en ε ;

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_p \\ \hat{\sigma}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M \\ \frac{1}{2}M_\phi^1 + \frac{1}{2}M_\phi^2 \\ Q \\ \frac{1}{2}Q_\phi^1 + \frac{1}{2}Q_\phi^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_p \\ \hat{\varepsilon}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \chi_1 \\ \frac{1}{L}(\psi^2 - \psi^1) \\ \gamma \\ \frac{1}{2}(\psi^1 + \psi^2) \end{bmatrix} \quad (71)$$

Esta propuesta asegura continuidad de los desplazamientos, es decir una formulación C^0 , pero utiliza dentro de un elemento una función ϕ que depende de las propiedades mecánicas del elemento adyacente. Individualmente en cada elemento se define una función $\phi^e(z)$ dependiente de las propiedades mecánicas de la sección (que son función del nivel de daño en el caso de delaminación) que satisface continuidad de la componente $\bar{\tau}^e(z)$. Pero esta propiedad desaparece al combinar las funciones de dos elementos con distintas propiedades (ec. 59) o utilizar propiedades que no son estrictamente las del elemento (ec. 58). Esto es lo que ocurre en el caso de un elemento con elementos contiguos (a izquierda y/o derecha) con propiedades mecánicas diferentes. Debe entonces puntualizarse que:

- Que en tal elemento e se han de combinar las funciones de interpolación transversal usando (58) o (59) que dependen en forma no-lineal de las propiedades del material
- Que en el elemento se mantienen las propiedades del material asociado al elemento (y su nivel de daño) no se combinan las propiedades del material
- Y en consecuencia esa combinación de ϕ entre elementos y el uso del material del elemento conducirá a una función $\bar{\tau}$ discontinua y se perderán las propiedades utilizadas en su definición.

En el caso que es de particular interés aquí, es decir cuando una capa delgada tiene un módulo de elasticidad muy bajo asociado con un proceso de degradación o daño, ninguna de las opciones descritas conduce a resultados aceptables como se muestra más abajo.

5. EJEMPLOS

En los ejemplos que se presentan a continuación se realizarán comparaciones entre el elemento de viga/lámina 2D descrito en la Sección 2 (de dos nodos V2) incluyendo la teoría refinada de zigzag (RZT₃) con resultados obtenidos usando un elemento de sólido bidimensional

(cuadrilátero de cuatros nudos Q4). El objetivo es utilizar las configuraciones más sencillas posibles (unidimensionales en el caso de la viga) para que las comparaciones y los aspectos que se intenta mostrar sean fáciles de visualizar. Se intenta comparar dos cosas: a) Comportamiento estructural global, lo que incluye desplazamientos, frecuencia de vibración y carga de pandeo y b) Estados tensionales locales, que incluye distribución de tensiones axiales y tensiones de corte transversal. Por otro lado se busca evaluar el comportamiento de la RZT frente a un cambio abrupto de las propiedades de la sección, que es lo que ocurre en el frente de delaminación.

5.1. Viga empotrada con esfuerzo de corte constante

El primer ejemplo considerado es una viga en cantilever con una carga en su extremo libre, es decir con un esfuerzo de corte constante, como se esquematiza en la Figura 3. Se ha supuesto un ancho $b = 20\text{mm}$. La sección es tipo sándwich asimétrico compuesto por materiales isotrópicos. Las propiedades de los materiales se indican en la Tabla 1 donde también se indican el espesor de cada capa y el material correspondiente. Hay allí descritas dos secciones, en la segunda se reemplaza una delgada capa (0,01mm) en la unión entre el núcleo y la capa superior por un material dañado (2d) con muy baja rigidez a los fines de simular una delaminación total o parcial.

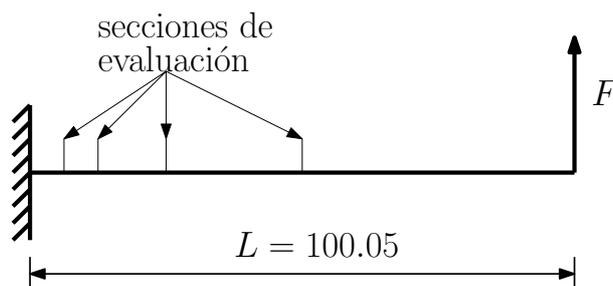


Figura 3: Esquema de la viga analizada

Mat	$E[\text{GPa}]$	$G[\text{GPa}]$
1	730	292
2	0,73	0,292
2d	$0,73 \times 10^{-6}$	$0,292 \times 10^{-6}$
3	219	87,6

(1)

Mat	Espesor
3	2,00
2	16,01
1	2,00

(2)

Mat	Espesor
3	2,00
2d	0,01
2	16,00
1	2,00

(3)

Tabla 1: (a) Propiedades de los materiales involucrados, (b) laminado sano y (c) laminado dañado

Para este análisis se consideró una carga $F = 20,01\text{N}$, es decir un corte por unidad de ancho $T = 1,0005\text{kN/m}$ y una tensión promediada sobre la sección de $\tau_{ave} = 0,05\text{MPa}$. Como referencia se usó un modelo con elementos de sólido de 4 nudos (Q4), que incluye 400 divisiones a lo largo de la viga y 37 en el espesor, 12 en cada capa externa y 12 en 16mm del espesor del núcleo más 1 elemento en la subcapa de espesor 0.01 mm. Los desplazamientos verticales de la sección libre están obligados a tener un único valor. Esto a los fines de evitar tener que distribuir la carga sobre cada capa en el extremo. Para el elemento de viga (V2) se consideró una malla fina de 400 elementos, con la misma distribución axial que la malla de sólidos, aunque una malla mucho más gruesa conduce a los mismos resultados. Para comparar los resultados

que se obtienen con ambos modelos se han elegido cuatro secciones, indicadas en la Figura 3, designadas por 1-4 y ubicadas respectivamente a $1: \frac{L}{16}$, $2: \frac{L}{8}$, $3: \frac{L}{4}$ y $4: \frac{L}{2}$ del empotramiento.

5.1.1. Viga original no dañada

El desplazamiento vertical del centro del extremos libre resulta $u_z^{V2} = 0,01805\text{mm}$ para el modelo de vigas y $u_z^{Q4} = 0,01808\text{mm}$ para el modelo de sólidos, con una diferencia de sólo el 0,2 %. Para una densidad uniforme $\delta = 4 \times 10^3\text{kg/m}^3$ y manteniendo la condición de que los nudos del borde libre se desplacen el mismo valor vertical, se obtiene respectivamente como período fundamental $T^{V2} = 3,0982\text{ms}$ y $T^{Q4} = 3,1042\text{ms}$, también con una diferencia del 0,2 % lo que es congruente con la ligera menor rigidez del modelo de sólidos.

La Figura 4 muestra los perfiles de desplazamientos horizontales y tensiones axiales para las cuatro secciones mencionadas. Los perfiles de desplazamientos del modelo de sólido muestran alguna curvatura en la zona más cercana al empotramiento y allí se ven algunas discrepancias con el modelo de vigas. Esas diferencias desaparecen en las secciones más alejadas. Respecto a las tensiones axiales son prácticamente coincidentes entre ambos modelos en las cuatro secciones analizadas. Esto es muy importante porque permite pensar que es posible evaluar tensiones de corte mediante integración en la dirección z de la ecuación de equilibrio axial. Por otro lado los perfiles mas cercanos al empotramiento indican una flexión local de la capa inferior con cambio de signo de las tensiones, en tanto que en las secciones más alejadas las tensiones en la capa inferior son sólo de tracción.

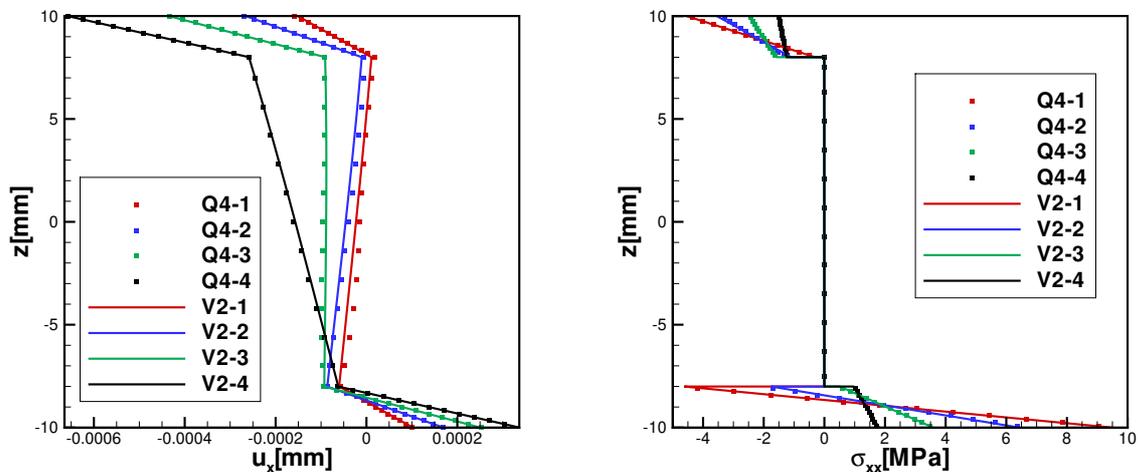


Figura 4: Perfiles de desplazamientos horizontales y tensiones axiales

La Figura 5.a muestra los perfiles de tensiones de corte transversal para las cuatro secciones mencionadas obtenidas con el modelo de sólidos y con el modelo de vigas integrando las ecuaciones de equilibrio a partir de las tensiones axiales. El perfil cambia mucho en la primera mitad de la viga luego se mantiene prácticamente constante. En la cercanía del empotramiento el corte es tomado principalmente por las capas rígidas, donde se producen las mayores tensiones de corte τ_{xz}^{max} . Allí por un lado en la zona del núcleo los resultados son coincidentes pero el modelo de referencia (Q4) indica que la capa inferior toma menos corte que lo que indica el modelo de vigas (y viceversa para la capa superior). Por otro lado hay un excelente acuerdo a

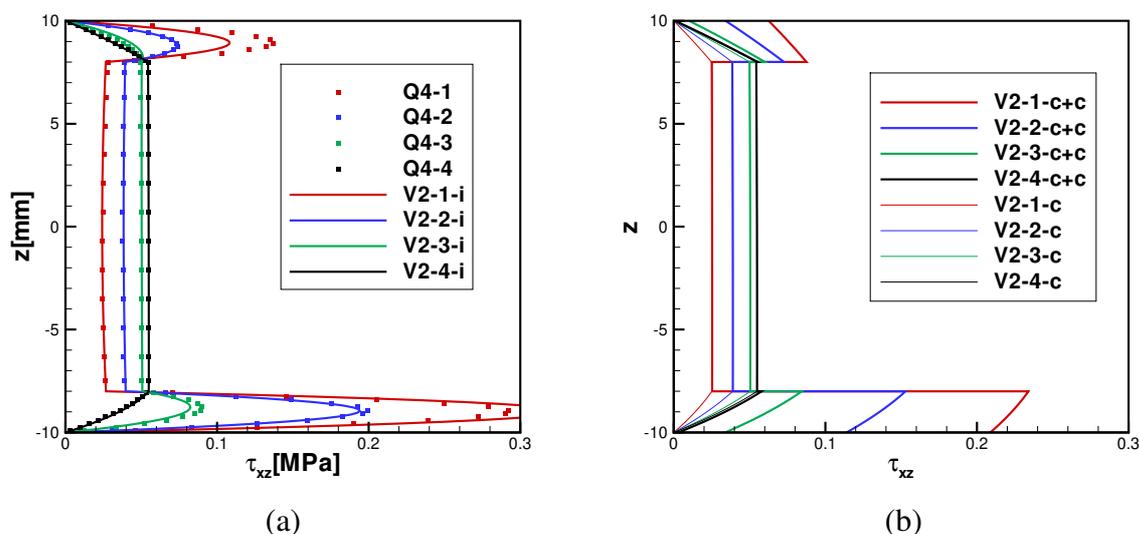


Figura 5: Perfiles de tensiones de corte en la viga sana

partir de $\frac{x}{L} = \frac{1}{8}$ y a medida que se avanza hacia el borde libre es esfuerzo de corte es tomado principalmente por el núcleo flexible.

La Figura 5.b muestra los perfiles de tensiones de corte transversal usando el estándar de elementos finitos basado en desplazamientos, es decir obteniendo deformaciones a partir de los desplazamientos y usar las constitutivas. En dicha figura aparecen dos conjuntos de curvas, “c+c” indica cinemática mas constitutiva y “c” es la parte continua de la RZT₃ es decir sin incluir la medida de deformación η . De este gráfico puede concluirse que :

- Para todos los perfiles, en la zona del núcleo las τ_{xz} que arroja la RZT₃ son casi independientes de η y coincidentes con el modelo de sólidos
- La influencia de η disminuye notoriamente al alejarse del empotramiento y es nula a la mitad de la viga.
- la tensión de corte total (c+c) da un valor promedio sobre las capas externas pero no aproxima correctamente la variación en esas capas.

Puede decirse que la restricción al alabeo que impone el empotramiento es lo que impide que la parte central flexible contribuya a soportar el esfuerzo de corte. En la sección más cercana al empotramiento el corte es tomado por las capas externas rígidas, donde se aprecia en cada una de ellas una variación parabólica de las tensiones de corte similar a lo que ocurre en una sección de material homogéneo. A medida que las secciones están mas alejadas del empotramiento pueden desarrollarse deformaciones de corte en la parte central.

5.1.2. Viga dañada en toda su longitud

En este caso el desplazamiento vertical del centro del extremos libre resulta $u_z^{V2} = 0,18027$ mm para el modelo de vigas y $u_z^{Q4} = 0,18794$ mm para el modelo de sólidos, con una diferencia superior al 4 % que se explica más abajo. En tanto que el período fundamental resulta ahora $T^{V2} = 8,470$ ms y $T^{Q4} = 8,704$ ms y una diferencia del 2,7 %.

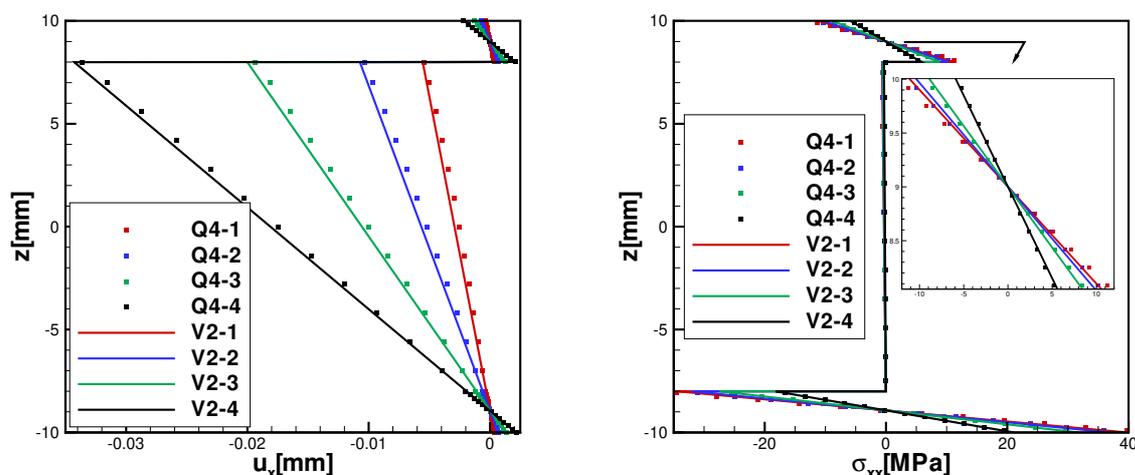


Figura 6: Perfiles de desplazamientos horizontales y tensiones axiales en la viga dañada

La Figura 6 muestra los perfiles de desplazamientos horizontales y tensiones axiales para las cuatro secciones mencionadas. Los perfiles de desplazamientos son muy similares en ambos modelos, ligeramente desplazados hacia la izquierda en el caso del modelo de vigas debido a su mayor rigidez. La RZT permite captar la discontinuidad en la capa débil, dividiendo la sección en dos partes donde parece adecuada una aproximación lineal de los desplazamientos horizontales. Respecto a las tensiones axiales, si bien se ven similares, hay algunas diferencias sobre todo en la parte más cercana al empotramiento. Esto es importante porque hace presumir que al evaluar tensiones de corte mediante integración de la ecuación de equilibrio se encontrarán diferencias. Claramente todos los perfiles indican una flexión local de cada capa rígida “independiente” de la otra con valores casi idénticos de tracción y compresión.

La Figura 7.a muestra los perfiles de tensiones de corte transversal para las cuatro secciones mencionadas obtenidas con el modelo de sólidos y con el modelo de vigas integrando las ecuaciones de equilibrio a partir de las tensiones axiales. Naturalmente las tensiones no sólo se anulan en las superficies externas sino también en la capa débil. En el modelo de sólidos puede verse que el corte es principalmente tomado por las capas rígidas con una menor contribución del núcleo, más aún en la cercanía del empotramiento. El modelo de vigas por otro lado predice el mismo perfil para todas las secciones. Esto se debe a que la función ϕ de la RZT ha gastado su potencial en predecir la discontinuidad y no tiene la posibilidad adicional de aproximar correctamente la distribución de tensiones axiales en la zona del empotramiento. Esto se ve también en la Figura 7.b donde ahora la componente continua de la tensión de corte es prácticamente nula y sólo tiene relevancia la asociada a la medida de deformación η .

Esto también explica la mayor rigidez del modelo de viga. En una sección con una capa muy débil la RZT conduce a una deformación de corte prácticamente constante en el espesor, lo mismo que ocurre con la FSDT en una sección sana donde es necesario utilizar factores de corrección del corte (SCF). La RZT no utiliza SCF, por lo cual en este caso resulta más rígida (4 %).

De estos gráficos puede concluirse que para una sección que incluye una capa muy débil:

- La RZT mejora sustancialmente la FSDT captando la discontinuidad, pero resulta más rígida que el modelo de sólidos

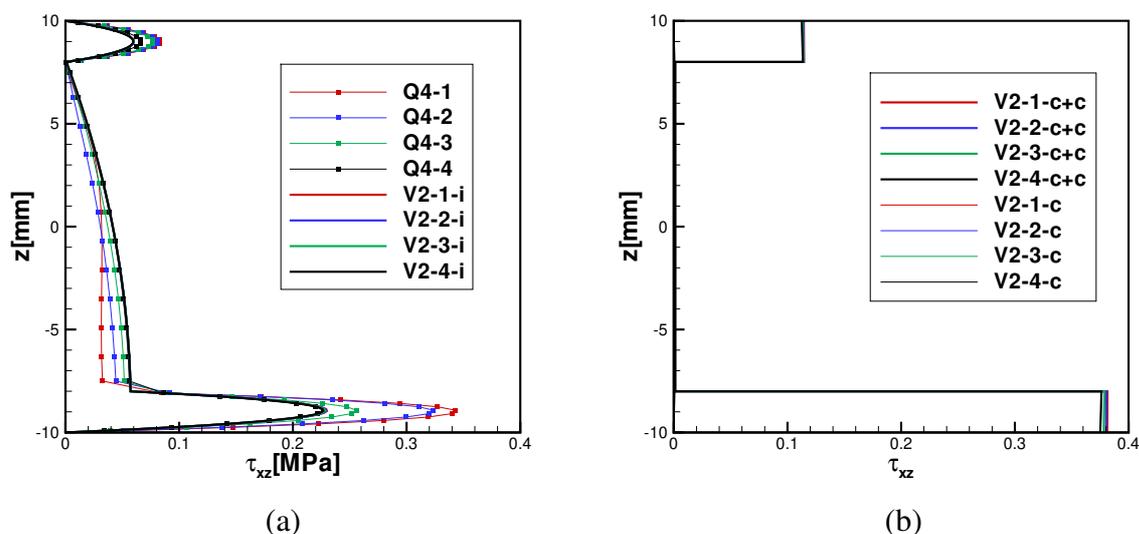


Figura 7: Perfiles de tensiones de corte en la viga dañada

- Las tensiones de corte lejos de la restricción cinemática (empotramiento) se pueden determinar muy bien por integración de la ecuación de equilibrio.
- La RZT predice un perfil de tensiones de corte constante a lo largo de la viga, controlado exclusivamente por la medida de deformación η y por lo tanto discontinua

5.1.3. Viga parcialmente dañada

Finalmente se considera el caso en que la primera la mitad de la viga mantiene la sección sana y que en la segunda mitad ha dañado la unión entre el núcleo y la capa superior. Para el modelo de vigas el punto de unión de las dos secciones resulta crítico. Se presentan los resultados obtenidos con 3 formulaciones para abordar el cambio de sección en la viga, los dos modelos conformes mencionados en la sección anterior y el modelo no-conforme. En la Figura 8.a se indica el desplazamiento vertical del eje de la viga con los tres modelos mas los obtenidos con un modelo de sólidos usados como resultados de referencia. Puede verse que el modelo no-conforme conduce a resultados inaceptables en tanto que los modelos conformes, dan resultados casi-idénticos entre sí pero muestran un comportamiento mucho más rígido que el esperado. Esta mayor rigidez está asociada con la importante restricción que impone la continuidad de la variable adicional ψ . Se indica con un único punto (referencia SANA) el desplazamiento vertical del centro de la viga en $x = \frac{l}{2}$ en el caso de que toda la viga esté sana. Puede verse, en el modelo de referencia, que el daño de la segunda mitad implica un mayor desplazamiento a la mitad de de la viga que en el caso sano, y por el contrario en los modelos conformes este desplazamiento es menor. En la Figura 8.b se muestra el desplazamiento adicional $\phi(z = 8,005) \psi$ que se produce en el borde superior del núcleo. En el caso del modelo de referencia (Q4) este valor se obtiene restando al desplazamiento del punto el promedio ponderado de los desplazamientos inferior y superior de la sección. Puede observarse la fuerte discontinuidad que aparece en el modelo no-conforme.

El otros aspecto que debe considerarse es que, en el caso de un proceso de delaminación, en el frente de delaminación o punta de fisura se produce una concentración de tensiones que muy difícilmente pueda captarse con un modelo de vigas. Arriba se mostró que para una dis-

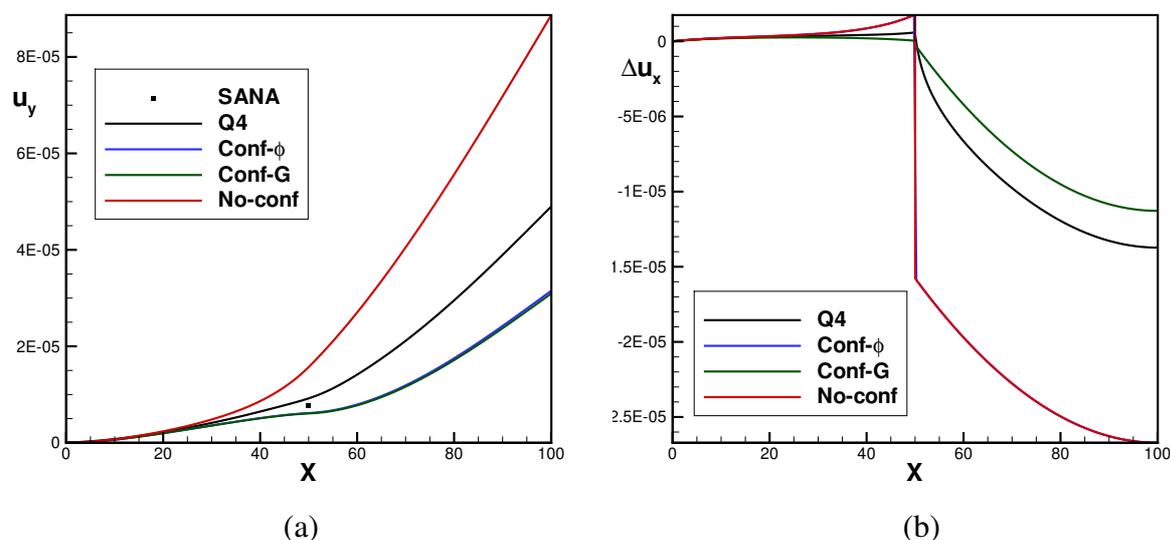


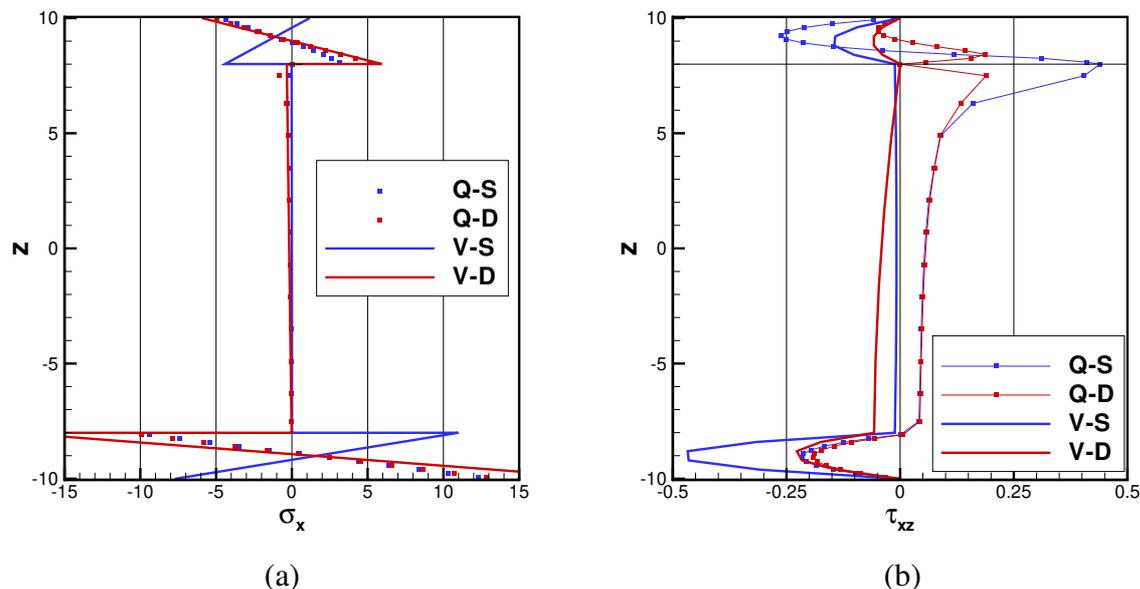
Figura 8: Viga parcialmente dañada (a)desplazamiento transversal del eje (b)desplazamiento adicional en la el borde superior del núcleo

continuidad en la sección la RZT conduce, usando ecuaciones cinemáticas, a una deformación de corte constante en la sección y a través de las ecuaciones constitutivas a tensiones de corte constante en cada capa. En la Figura 9 se comparan los perfiles de tensiones en dos secciones ubicadas simétricamente respecto al cambio de sección, a una distancia $d = \frac{L}{160}$ del mismo. Las referencias “Q” indica resultados obtenidos con elementos de sólido y “V” obtenidos con elementos de viga, en tanto que “S” (sección Sana) indica la sección a la izquierda del cambio de sección y “D” (sección Dañada) indica la sección a la derecha del cambio de sección. En la Figura 9.a se comparan los perfiles de tensiones normales. Puede verse que los modelos de sólido tienen, como es de esperar, un cambio gradual entre una y otra sección, en tanto que el modelo de vigas indica cambios extremadamente abruptos con inversión de la dirección de las tensiones. Los resultados con el modelo de sólidos son más parecidos a la sección de viga dañada que no puede transmitir esfuerzos de corte entre la parte inferior y superior. En la Figura 9.b se muestran los perfiles de tensiones de corte. Nuevamente puede verse pocos cambios entre perfiles en el modelo de sólido, con una fuerte concentración (en la parte sana) a la altura z de la capa con cambio de propiedades. En tanto que en el modelo de vigas las tensiones de corte (obtenidos por integración de las ecuaciones de equilibrio) muestra una distribución parabólica en cada capa rígida y tensiones muy bajas en el núcleo y no es capaz de predecir la concentración de tensiones presente en el modelo de sólidos.

5.2. Pandeo de un cilindro baja carga axial

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un cilindro bi-empotrado sometido a carga axial. El radio del cilindro es $R = 10\text{m}$ y el largo total $L = 20\text{m}$ en tanto que el espesor es $t = 250\text{mm}$ con una sección definida por un laminado simétrico tipo sándwich con las propiedades indicadas en la Tabla 2 donde la dirección principal del laminado es la dirección tangente al paralelo.

Se ha modelado sólo la mitad del cilindro imponiendo condiciones de simetría en el extremo superior. Esto restringe arbitrariamente el modo de bifurcación a dicha simetría pero a los efectos de la comparación es irrelevante. La discretización con elementos unidimensionales de

Figura 9: Viga parcialmente dañada. Perfiles de σ_x y τ_{xz}

Mat	E_1	E_2	E_3	ν_{12}, ν_{13}	ν_{23}	G_{12}, G_{13}, G_{13}	Mat	Espesor	Orient.
1	50	10	10	0,05	0,25	5	1	12,5	0
2	0,01	0,01	0,07585	0,01	0,01	0,0225	2	200,0	0
							1	12,5	90
							1	12,5	0

Tabla 2: Propiedades de los materiales (E_I y $G_{I,J}$ en GPa) y Laminado

2 nudos V2 incluye mallas de 100, 200 y 400 elementos, en tanto que las mallas con elementos bidimensionales Q4 incluyen 20 elementos en el espesor (6 en cada capa externa y 8 para el núcleo) y 100, 200, 400, 800, 1600 y 3200 divisiones en la dirección axial a los fines de obtener una solución convergida de comparación.

En la Figura 10 se observa la convergencia en la carga crítica y el número de semi-ondas en función de la discretización en la dirección axial. El elemento de lámina de revolución converge muy rápidamente y ya con la discretización de 100 elementos los resultados son muy buenos. Incluso con la discretización mas gruesa y con 50 elementos de 3 nudos se obtiene el mismo valor que con la discretización más fina con el elemento de 2 nudos (6,974 [MN/m] y 13 semi-ondas). Por otro lado y como era de esperar, el elemento bidimensional converge mucho más lentamente pero lo hace a un valor de carga crítica más bajo (6,761 [MN/m]) y el mismo número de semi-ondas. Este resultado muestra tres aspectos:

- Uno conocido, que indica que un modelo de sólidos requiere una discretización muy fina (una altísima cantidad de elementos) para obtener una solución convergida. Notar que en este caso la discretización es 2D y por lo tanto manejable, pero que en general la mayoría de los problemas requieren una discretización 3D.
- El modelo de láminas incluyendo la RZT converge mucho más rápidamente, es decir con discretizaciones que son 1 orden de magnitud menores y además de una dimensión

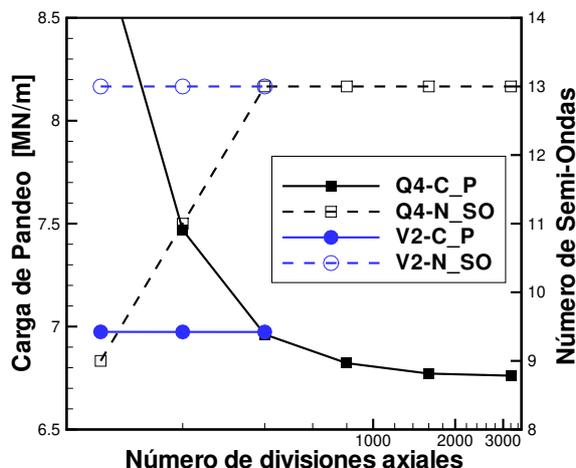


Figura 10: Convergencia en la carga y el modo de pandeo

menor, por lo cual la cantidad de grados de libertad involucrados es al menos 2 órdenes de magnitud menor.

- El modelo FSDT+RZT no puede captar todos los detalles del comportamiento a través del espesor por lo cual conduce a modelos un poco más rígidos pero con valores representativos del comportamiento estructural.

En la Figura 11 se muestra el modo de pandeo de la pared del cilindro para los modelos con sólido y lámina. Por otro lado se incluye el modo de pandeo que ocurre en un cilindro donde se han separado (delaminado) la capa interna y el núcleo en $\frac{1}{20}$ de su longitud L en la zona central (en este caso debido a las características del elemento en forma axilsimétrica, es decir en todo el paralelo). El modo de pandeo en tal caso resulta local lo cual no puede ser captado por el modelo de láminas incluyendo la RZT que sólo puede captar discontinuidades en los desplazamientos en el plano de la lámina.

6. CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es estudiar la influencia de discontinuidades de la sección transversal en el comportamiento de la teoría refinada de zigzag (RZT). Para ello se presenta inicialmente un elemento de lámina bidimensional (viga curva y lámina de revolución), los aspectos básicos de la RZT y se analiza un ejemplo con y sin discontinuidades. Por otro lado se estudia el comportamiento de la RZT en un problema de pandeo. Las conclusiones que se obtienen del estudio para secciones tipo sándwich son:

- Para vigas sin discontinuidades en la sección:
 - Los estados tensionales obtenidos en la forma habitual del MEF (cinemáticas más constitutivas) son muy buenos en zonas alejadas de aquellos puntos con restricciones en los desplazamientos (bordes).
 - Aún en tales puntos las tensiones axiales se obtienen con muy buena precisión, lo cual permite obtener las tensiones de corte por integración en la dirección transversal de la ecuación de equilibrio en la dirección axial

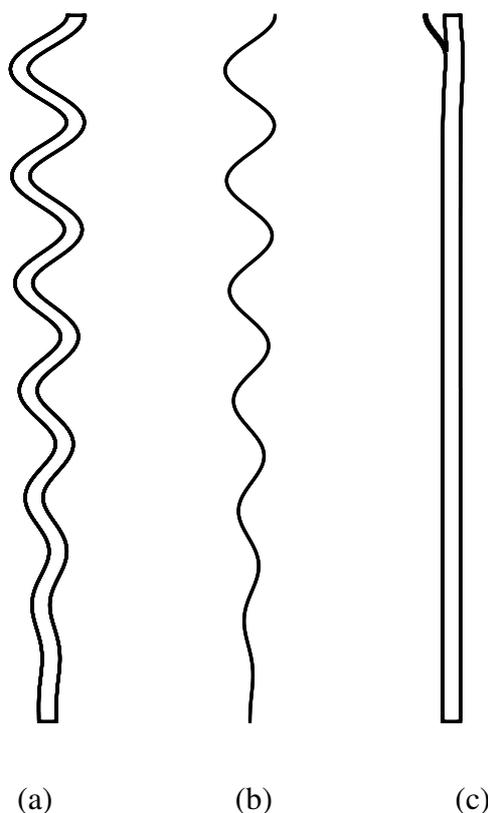


Figura 11: Modos de pandeo (a) Q4, (b) V2 (c) Q4 con una delaminación de $L/20$

- Para vigas con discontinuidades en la sección:
 - permite representar la discontinuidad en el desplazamiento en el plano (no en la dirección transversal),
 - pierde la capacidad de representar correctamente la deformación axial en todo la sección, por lo que la precisión en la obtención de la tensiones de corte por integración y la rigidez flexional disminuye.
 - la medida de deformación $\eta = \gamma - \psi$ es dominante, conduce a estados uniformes de deformación transversal y tensiones de corte discontinuas, y el modelo resulta más rígido que lo correcto.
- Para vigas con un cambio abrupto de las propiedades de la sección (viga parcialmente dañada):
 - una aproximación “no conforme” conduce a un comportamiento inconsistente
 - las aproximaciones conformes introducen una restricción importante por lo que el comportamiento resulta más rígido
 - los tensiones axiales no se determinan correctamente en la zona de la discontinuidad por lo que no puede obtenerse una aproximación razonable para las tensiones de corte
 - no es posible aproximar la concentración de tensiones que se produce en una discontinuidad

- Pandeo de láminas

- los modelos con elementos de viga/lámina convergen rápidamente y conducen a muy buenos resultados
- para secciones parcialmente dañadas no es posible predecir que los resultados serán correctos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET, de la SeCyT-UNC, del CIUNSa y del FONCyT (PICT-2015 (ECOCONST)).

REFERENCIAS

- Barut A., Madenci E., y Tessler A. C^0 -continuous triangular plate element for laminated composite and sandwich plates using the {2,2} - Refined Zigzag Theory. *Composite Structures*, 106:835–853, 2013.
- Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56:298–308, 2003.
- Di Sciuva M., Gherlone M., Iurlaro M., y Tessler A. A class of higher-order C^0 composite and sandwich beam elements based on the Refined Zigzag theory. *Composite Structures*, 132:784–803, 2015.
- Eijo A., Oñate E., y Oller S. A four-noded quadrilateral element for composite laminated plates/shells using the refined zigzag theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95:631–660, 2013a.
- Eijo A., Oñate E., y Oller S. A numerical model of delamination in composite laminated beams using the lrz beam element based on the refined zigzag theory. *Composite Structures*, 104:270–280, 2013b.
- Eijo A., Oñate E., y Oller S. Delamination in laminated plates using the 4-noded quadrilateral qlrz plate element based on the refined zigzag theory. *Composite Structures*, 108:456–471, 2014.
- Flores F. Two-dimensional shell element for nonlinear analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 48(11S):S30–S35, 1995.
- Flores F. Implementation of the refined zigzag theory in shell elements with large displacements and rotations. *Composite Structures*, 118:560–570, 2014.
- Flores F., Nallim L., y Oller S. Formulation of solid-shell finite elements with large displacements considering different transverse shear strains approximations. *Finite Elements in Analysis and Design*, 130:39–52, 2017.
- Gherlone M., Tessler A., y M. D.S. C^0 beam element based on the refined zigzag theory for multilayered composite and sandwich laminates. *Composite Structures*, 93:2882–2894, 2011.
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., y Tessler. Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. *Composite Structures*, 106:777–792, 2013.
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., y Tessler A. The (3,2)-Mixed Refined Zigzag Theory for generally laminated beams: Theoretical development and C^0 finite element formulation. *Solids and Structures*, 73–74:1–19, 2015.
- Nallim L., Oller S., Oñate E. O., y F. F. A hierarchical finite element for composite laminated beams using a refined zigzag theory. *Composite Structures*, 163:168–184, 2017.

- Oñate E., Eijo A., y Oller S. Simple and accurate two-noded beam element for composite laminated beams using a refined zigzag theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216:362–382, 2012.
- Simo J. y Fox D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part I: Formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:267–304, 1989.
- Tessler A. Refined zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich beams derived from Reissner's mixed variational principle. *Meccanica*, 50:2621–2648, 2015.
- Tessler A., Di Sciuva M., y Gherlone M. A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5:341–367, 2010.
- Tessler A., Di Sciuva M., y Gherlone M. A homogeneous limit methodology and refinements of computationally efficient zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich plates. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27:208–229, 2011.
- Versino D., Gherlone M., y M. D.S. Four-node shell element for doubly curved multilayered composites based on the the Refined Zigzag Theory. *Composites Structures*, 11B:392–402, 2014.
- Versino D., Gherlone M., Mattone M., Di Sciuva M., y Tessler A. C^0 triangular elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayered composite and sandwich plates. *Composites Part B, Engineering*, 44B:218–230, 2013.