

MINIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF) POR FERRAMENTAS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA ESTRUTURAL MULTIESCALA

MINIMIZATION OF THE FREQUENCY RESPONSE FUNCTION (FRF) BY MULTISCALE STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION

**João B. D. Moreira, Ederval S. Lisboa, Gustavo C. Rodrigues, Fernanda B. Link e
Walter J. P. Casas**

*DEMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 435, Porto Alegre - RS
90050-170, Brasil, baptista.moreira@ufrgs.br, <https://www.ufrgs.br/demec/>*

Palavras-chave: BESO, FRF, Homogenização.

Resumo. Este trabalho apresenta a otimização da resposta dinâmica de estruturas sujeitas a excitações harmônicas no domínio da frequência através do método de otimização estrutural evolucionário bidirecional (BESO), para a minimização da resposta estrutural, determinando simultaneamente tanto a topologia ideal da estrutura quanto da microestrutura do material. O acoplamento entre as escalas é feito a partir do cálculo do tensor constitutivo equivalente aplicando o método da homogenização. Para diferentes condições de contorno e frequências de excitação o método se mostrou capaz de minimizar a função objetivo e convergir para uma topologia otimizada.

Keywords: BESO, FRF, Homogenization.

Abstract. This work presents the optimization of the dynamical response of structures subjected to harmonic excitations in the frequency domain through the Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method. Both the topology of the structure and the material microstructure are simultaneously determined. The two scales are coupled by the calculation of the equivalent constitutive tensor via the homogenization method. This approach showed to be successful in minimizing the objective function and converging for an optimal topology for different boundary conditions and excitation frequencies.

1 INTRODUÇÃO

Otimização Topológica é um procedimento com muitas perspectivas de aplicação em engenharia, em especial em áreas que demandam componentes de alto desempenho como a indústria automotiva, aeronáutica e aeroespacial. Dentre diversos objetivos possíveis, a otimização do desempenho dinâmico da estrutura é especialmente significativa, dado os efeitos possivelmente desastrosos associados a estruturas sujeitas a excitações próximas de suas frequências ressonantes. Exemplos de aplicação de otimização topológica para otimização com relação às frequências naturais em produtos da área automotiva podem ser encontrados em [Boonpan e Bureerat \(2012\)](#) e [Li et al. \(2015\)](#). [Zhu et al. \(2016\)](#) realizam uma revisão de aplicações da otimização topológica na indústria aeronáutica, além de elencar aplicações potenciais na área. O campo de pesquisa em otimização topológica tem sido extremamente ativo desde as contribuições pioneiras de [Bendsøe e Kikuchi \(1988\)](#), e [Bendsøe \(1989\)](#), tanto no projeto de estruturas quanto de materiais artificiais através da manipulação da topologia microestrutural. Ainda assim, estudos que considerem a otimização simultânea tanto da estrutura quanto do material de que é composta não são tão abundantes ([Zuo et al., 2013](#)). Com base nessas considerações, almeja-se aplicar otimização topológica multiescala a minimização da resposta de um certo sistema no domínio da frequência. Através dessa abordagem, é possível a obter simultaneamente tanto a topologia ideal da estrutura quanto a microestrutura do material, e consequentemente, as propriedades mecânicas mais adequadas a uma certa escolha de material compósito ou celular.

2 OTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA NA FREQUÊNCIA

O sistema multiescala considerado consiste numa macroescala onde a estrutura e as condições de contorno são definidas, e numa microescala onde a microestrutura dos materiais utilizados é descrita, conforme a Fig. 1.

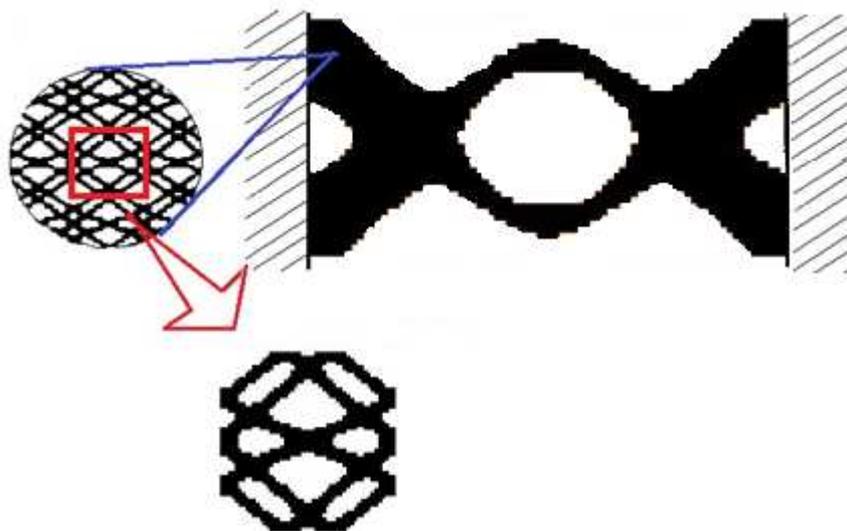


Figura 1: Sistema multiescala.

O objetivo da otimização é minimizar a amplitude da resposta em frequência para um determinado grau de liberdade. Dois domínios são definidos e discretizados em malhas de elementos finitos. No domínio macroestrutural, um único material é distribuído em uma certa região de forma a definir a estrutura. Na microestrutura, novamente há regiões vazias e ocupadas por

material definindo a topologia de um certo elemento de volume representativo (EVR). Aplicando o método da homogenização, as propriedades materiais e a geometria da microestrutura definem o tensor constitutivo do material usado na macroestrutura. O problema de otimização topológica pode ser definido como segue:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{X}^{MA}, \mathbf{X}^{MI}}{\text{minimize}} && U_k \\ & \text{sujeito a} && V_f^{MA} - \sum_{i=1}^{N^{MA}} V_i X_i^{MA}, \\ & && V_f^{MI} - \sum_{i=1}^{N^{MI}} V_i X_i^{MI}, \\ & && (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (1)$$

As variáveis de projeto \mathbf{X}^{MA} , \mathbf{X}^{MI} são binárias, tal que para suas i -ésimas componentes, $X_i^{MA} = 1$ ou $X_i^{MA} = 0$, o mesmo valendo para o vetor \mathbf{X}^{MI} . Caso seja igual a 1, há material presente no espaço correspondente ao i -ésimo elemento finito da malha, caso seja igual a zero, essa região é vazia. N^{MA} é o número de elementos presente na malha que descreve a macroestrutura, N^{MI} apresenta a mesma informação para a microestrutura. V_i é o volume ocupado por esse elemento, e V_f^{MA} , V_f^{MI} determinam as frações volumétricas dos domínios macro e microestrutural ocupados por material. A equação de estado $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}$ descreve um sistema sujeito a excitações harmônicas, sendo \mathbf{K} e \mathbf{M} as matrizes globais de rigidez e massa, respectivamente. ω é a frequência de excitação a qual o sistema está submetido, \mathbf{U} é o vetor das amplitudes de deslocamento, U_k é o grau de liberdade a ser minimizado, e \mathbf{F} é o vetor amplitude da força de excitação harmônica sendo aplicada.

3 MODELO MATERIAL E ANÁLISE DAS SENSIBILIDADES

3.1 Modelo material

De forma a guiar o processo evolucionário, é necessário da informação dos gradientes com relação às variáveis de projeto. As variáveis de projeto, por sua vez, são integradas através do modelo de interpolação material utilizado pelo método SIMP (Bendsoe, 2003) como segue.

Para a densidade ρ na macroescala, vale que:

$$\rho(X_i^{MA}) = X_i^{MA} \rho^{MA}, \quad (2)$$

$$\rho^{MA} = \sum_{i=1}^{N^{MI}} V_i \rho^{MI}(X_i^{MI}). \quad (3)$$

Aqui, ρ^{MA} é a densidade equivalente do material na macroescala, e $\rho^{MA}(X_i^{MA})$ é seu valor no espaço ocupado pelo i -ésimo elemento. ρ^{MI} é a densidade do material na microestrutura, $\rho^{MI}(X_i^{MI})$, dependente de haver material ($X_i^{MI} = 1$) ou não ($X_i^{MI} = 0$) no espaço associado. Na microescala:

$$\rho^{MI}(X_i^{MI}) = X_i^{MI} \rho_0 \quad (4)$$

sendo ρ_0 simplesmente a massa específica do material sendo utilizado. Similarmente, na microescala o tensor constitutivo \mathbf{D}^{MI} fica:

$$\mathbf{D}^{MI}(X_i^{MI}) = (X_i^{MI})^p \mathbf{D}_0 \quad (5)$$

sendo \mathbf{D}_0 o tensor constitutivo do material isotrópico presente na microestrutura, e p o chamado coeficiente de penalização. Para a macroestrutura vale da mesma forma que:

$$\mathbf{D}^{MA}(X_i^{MA}) = (X_i^{MA})^p \mathbf{D}^H \quad (6)$$

A ligação entre as propriedades materiais nas duas escalas é realizada através do cálculo do tensor constitutivo homogenizado \mathbf{D}^H conforme as equações:

$$\mathbf{D}^H = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^{N^{MI}} \int_{Y_i} \mathbf{D}^{MI} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}) dY, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{N^{MI}} \int_{Y_i} \mathbf{b}^T \mathbf{D}_i^{MI} \mathbf{b} dY \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N^{MI}} \int_{Y_i} \mathbf{b}^T \mathbf{D}_i^{MI} dY. \quad (8)$$

Aqui, $|Y|$ é o volume do domínio Y_i correspondente ao EVR, \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{b} é a matriz de deformações. \mathbf{u} é o vetor de deslocamento na microestrutura obtido ao resolver a equação (8). As propriedades constitutivas aparecem na equação de estado através das matrizes globais de massa e rigidez conforme:

$$\mathbf{K} = \sum_i^{N^{MA}} K_i = \sum_i^{N^{MA}} \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_i^{MA} \mathbf{B} d\Omega, \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \sum_i^{N^{MA}} M_i = \sum_i^{N^{MA}} \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T \rho_i^{MA} \mathbf{N} d\Omega \quad (10)$$

Ω_i é o domínio correspondente ao espaço ocupado pelo i -ésimo elemento, \mathbf{N} é a matriz das funções de forma e \mathbf{N} a matriz das deformações na macroescala.

3.2 Análise das sensibilidades

A sensibilidade da função objetivo com respeito às variáveis de projeto \mathbf{X}^{MA} e \mathbf{X}^{MI} pode ser obtida a partir da diferenciação da equação de estado contendo o vetor \mathbf{U} das amplitudes:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (11)$$

Para uma variável de projeto geral \mathbf{X} , a sensibilidade é achada como:

$$\frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{X}} = -(\mathbf{U}^L)^T \frac{\partial (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} \quad (12)$$

O vetor amplitude \mathbf{U}^L é a solução da equação:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}^L = \mathbf{L} \quad (13)$$

Onde \mathbf{L} é um vetor com todas as componentes nulas, a exceção daquelas correspondentes ao k -ésimo grau de liberdade pertinente a U_k . Para essas componentes o valor é unitário.

Especializando \mathbf{X} para as variáveis de projeto correspondentes a macro e microescala \mathbf{X}^{MA} e \mathbf{X}^{MI} , respectivamente, obtém-se as expressões:

$$\alpha_i^{MA} = -\frac{\partial U_k}{\partial X_i^{MA}} = (\mathbf{U}_i^L)^T (p(X_i^{MA})^{p-1} \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M}_i) \mathbf{U}_i, \quad (14)$$

$$\alpha_i^{MI} = \frac{p(X_i^{MA})^{p-1}}{|Y|} \sum_{i=1}^{N^{MI}} (X_i^{MA})^p (\mathbf{U}_i^L)^T \left\{ \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \left[\int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u})^T \mathbf{D}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}) dY \right] \mathbf{B} d\Omega \right\} \mathbf{U}_i \quad (15)$$

A expressão (14) apresenta a sensibilidade com relação à variável de projeto macroestrutural, enquanto a expressão (15) se refere à sensibilidade para a variável de projeto que descreve a topologia microestrutural.

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A resposta do sistema é calculada e o processo de homogenização é feito utilizando o método dos elementos finitos. Os domínios são bi-dimensionais, e a malha é constituída de elementos retangulares com 4 nós de 2 graus de liberdade cada, sendo assumido regime de tensões planas. Nessas condições, é sabido que o algoritmo de otimização topológica conforme descrito possui diferentes instabilidades numéricas associadas (Sigmund e Petersson, 1998), e alternativas para atenuá-las, como o esquema de filtragem, de suavização dos valores da sensibilidade no tempo são descritos a seguir, assim como o próprio algoritmo de atualização das variáveis de projeto:

4.1 Filtragem das sensibilidades

Tanto na macro quanto na microescala, as sensibilidades são suavizadas de forma a definir um tamanho característico mínimo e controlar o chamado padrão tabuleiro de xadrez, onde surgem elementos finitos conectados somente pelos seus nós. Conforme comentado por Xia et al. (2018), a filtragem passando pelos valores nodais pode ser dispensada, e o cálculo das sensibilidades elementares filtradas é feito conforme:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} w_{ij} \alpha_j}{\sum_{j=1}^{N_i} w_{ij}} \quad (16)$$

$\hat{\alpha}_i$ corresponde à sensibilidade filtrada da i -ésima componente do vetor de projeto (α_i não filtrada), N_i é o número de elementos a uma distância menor que r_{min} do elemento cuja sensibilidade está sendo filtrada. Os pesos w_{ij} , por sua vez, são função da distância r entre o i -ésimo e j -ésimo elemento. Mais especificamente:

$$w_{ij} = \max(0, r_{min} - r) \quad (17)$$

4.2 Média temporal e convergência

A medida que a otimização é realizada, a estrutura evolui de um palpite inicial para uma solução final. Ao longo desse processo, elementos estruturais surgem e desaparecem, o que pode levar a repentinas variações no valor da função objetivo, e conseqüente divergência do processo evolutivo. De forma a mitigar essa possibilidade, toma-se a média entre a sensibilidade da i -ésima iteração presente e da iteração passada:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_{i-1}) \quad (18)$$

A atualização das variáveis é repetida até que a variação do valor da função objetivo seja menor que um certo valor prescrito τ . Para esse trabalho leva-se em conta o valor da média aritmética das dez últimas iterações. Para a q -ésima iteração:

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} (U_k^{q-i+1} - U_k^{q-N-i+1})}{\sum_{i=1}^{10} U_k^{q-i+1}} \quad (19)$$

Quando esse valor é menor que τ e as restrições de volume são satisfeitas, o algoritmo para e o resultado é tomado como a solução final.

4.3 Atualização das variáveis de projeto

Para um problema com duas escalas, as sensibilidades são tratadas separadamente. A metodologia BESO consiste em partir de uma estrutura inicial, geralmente o domínio totalmente ocupado por material, e removê-lo ou adicioná-lo de forma a minimizar ou maximizar a função objetivo a cada iteração. A quantidade de material mudada a cada iteração é definida pelo parâmetro ER , de forma que a fração volumétrica na i -ésima iteração fica:

$$V^i = V^{i-1}(1 \pm ER) \quad (20)$$

Após a restrição volumétrica ser satisfeita, o processo evolucionário continua sem mudar o volume até a variação da função objetivo ser menor que a tolerância τ pré-estabelecida.

Além disso, o parâmetro AR_{max} é utilizado para controlar a quantidade de material que pode ser adicionado a regiões vazias em cada iteração. Remoção ou adição de grandes quantidades de material numa única iteração podem causar o rompimento abrupto de muitos membros estruturais, potencialmente levando à degeneração da estrutura(ou da microestrutura). A figura 2 mostra um fluxograma do procedimento de otimização.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

O processo de otimização para a minimização da resposta no domínio da frequência consiste em determinar a distribuição de materiais obedecendo a restrições volumétricas de forma a minimizar a magnitude da k -ésima componente da resposta de uma estrutura sujeita a excitação por uma certa força harmônica. Trabalha-se com forças harmônicas aplicadas numa faixa de frequências. Considera-se a média aritmética de um certo número de frequências pontuais dentro dessa faixa durante o cálculo das sensibilidades e da função objetivo. A modelagem de elementos finitos é realizada utilizando elementos bilineares de 4 nós com lado unitário. Finalmente, o material utilizado possui módulo de Young $E = 210\text{Gpa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e massa específica $\rho = 7800\text{kg/m}^3$.

5.1 Projeto material

Denomina-se projeto material a otimização topológica da microestrutura de um certo material. Para a análise multiescala, projeta-se a microestrutura do material que constitui uma estrutura sujeita a determinadas condições de contorno.

Nesse trabalho considera-se uma viga biengastada sujeita a uma força distribuída parabólica harmônica de 11kN/m na região central, e zero em seus extremos. A faixa de atuação dessa força é no intervalo de 0Hz a 100Hz , discretizado em 10 pontos equidistantes dentro dessa faixa. A região superficial onde a carga atua, de 0.1m de espessura, é definida como fixa durante a otimização (ver figura 3). Deseja-se minimizar o seu deslocamento vertical através da

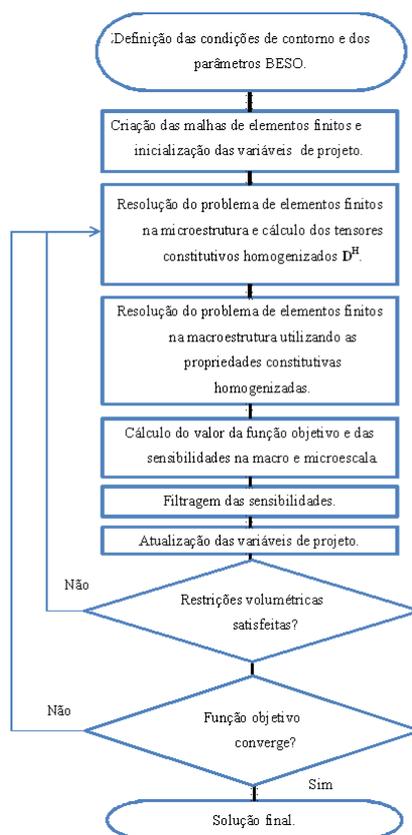


Figura 2: Sistema multiescala.

redistribuição de material guiada pelo processo de otimização topológica BESO. O domínio macroestrutural é discretizado por uma malha de 60×20 elementos. Considera-se que 60% do volume da macroestrutura fixa é ocupado por um único material com estrutura associada, e os 40% restantes são espaço vazio. Essa configuração é usada de forma a possibilitar a comparação dos resultados desse trabalho com aqueles obtidos por Vicente et al. (2016). O elemento de volume representativo da microestrutura é modelado através de uma malha de 100×100 elementos. A microestrutura é celular, sendo composto somente por material e por espaços vazios. Os parâmetros BESO utilizados são: taxa evolucionária $ER = 2\%$, taxa de adição máxima $AR_{max} = 2\%$, fração volumétrica $V_f^{MI} = 50\%$, raio de filtragem $r_{min}^{MI} = 0.12$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0.1\%$. Na Figura 3 é mostrada a comparação entre os resultados.

É possível observar que tanto a topologia microestrutural obtida quanto a matriz constitutiva homogenizada estão de acordo com o trabalho referenciado, enquanto o valor da função objetivo apresenta uma discrepância de 20% no valor da função objetivo. Como o material considerado é o mesmo, a diferença necessariamente vem da resolução da equação de estado (11), o que pode estar relacionado tanto à abordagem de discretização quanto ao comportamento contínuo da estrutura com relação à frequência de excitação.

5.2 Projeto Multiescala concorrente

Otimização topológica concorrente multiescala consiste na otimização simultânea tanto da macroestrutura quanto da microestrutura do material utilizado. As microestruturas consideradas são celulares, enquanto o domínio na macroestrutura é composto por material ou espaços vazios.

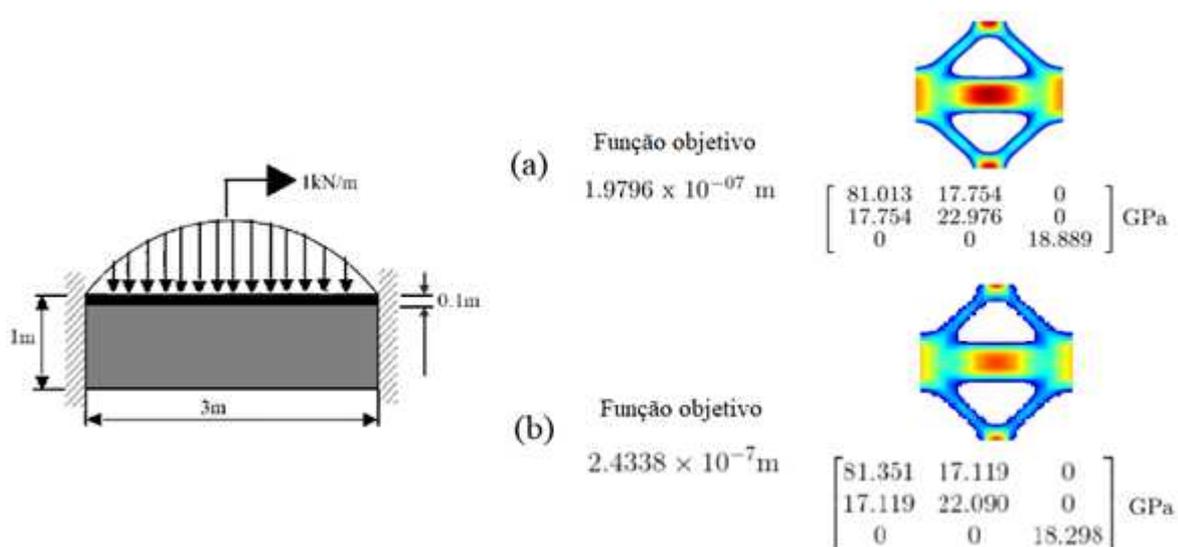


Figura 3: Projeto material. Estrutura considerada e resultados a) da literatura e b) obtidos nesse trabalho.

A validação para o algoritmo multiescala é realizada através de um modelo tipicamente usado para benchmarking em otimização topológica (Sigmund e Maute, 2013), uma viga engastada no formato da letra L com uma carga harmônica de 1kN aplicada à sua extremidade, conforme a figura 4.

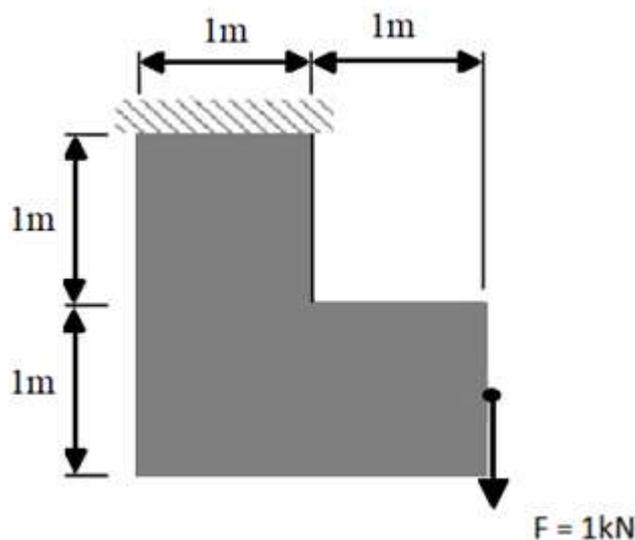


Figura 4: Viga em L engastada.

O objetivo nesse exemplo é minimizar o deslocamento vertical do mesmo ponto onde a força age, sendo considerado que a excitação atua no intervalo de frequências de 20Hz a 40Hz. Novamente 10 frequências pontuais equidistantes dentro dessa faixa são utilizadas no cálculo da sensibilidade e da equação de estado. Na escala macroestrutural, um único material, ocupando inicialmente 100% do domínio de projeto, é distribuído até que a fração volumétrica macroescalar V_f^{MA} atinga 45%, sendo o espaço restante vazio. A fração volumétrica microestrutural é

mantida em 40% durante todo o processo de otimização. As malhas para a aplicação do método de elementos finitos foram de 30 mil elementos na macroestrutura, e de 60x60 na microestrutura. Os parâmetros BESO de otimização utilizados são: taxas evolucionárias $ER^{MA} = 1\%$, $ER^{MI} = 1\%$, taxas de adição máxima $AR_{max}^{MA} = 2\%$, $AR_{max}^{MI} = 2\%$, fração volumétrica na macroestrutura $V_f^{MA} = 45\%$, fração volumétrica na microestrutura $V_f^{MI} = 40\%$, raios de filtragem $r_{min}^{MA} = 0.12m$, $r_{min}^{MI} = 0.04$, fator de penalidade $p=3$ e tolerância $\tau = 0.01\%$.

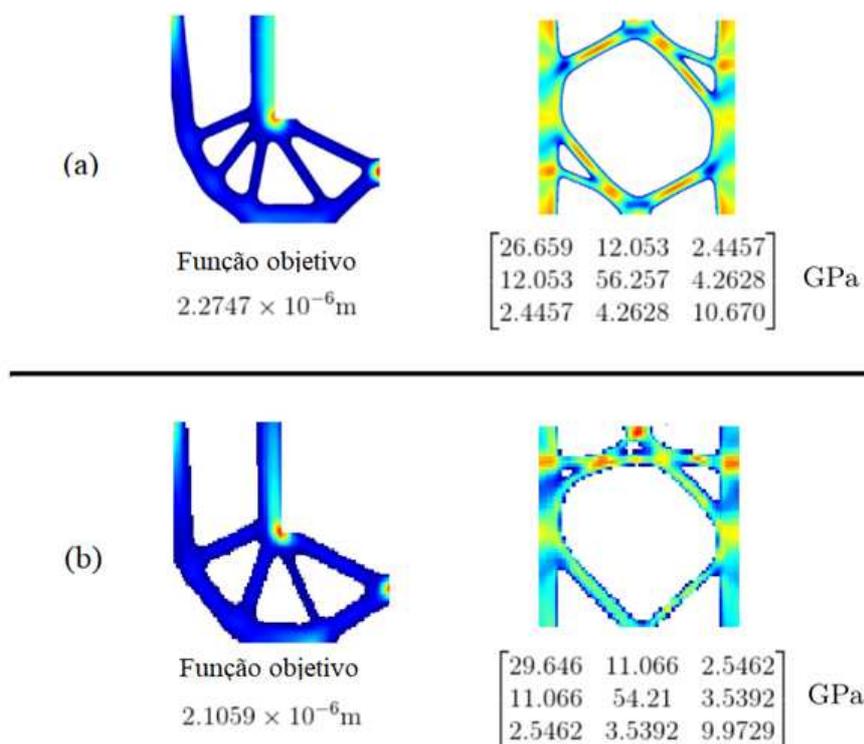


Figura 5: Estruturas, microestruturas e matrizes homogenizadas obtidas para o caso da viga em L (a) por Vicente et al. (2016) e (b) nesse trabalho. A macroestrutura em (a) é discretizada utilizando 235200 elementos, já a microestrutura, 160 mil elementos.

A comparação dos resultados é apresentada na Figura 5. O valor da função final é 7% menor que para o caso da literatura, além de apresentar 4 elementos estruturais ligando o canto vivo à parte “externa” da viga, em vez dos 5 presentes na referência. É razoável cogitar que essas discrepâncias possam ser explicadas pela discretização mais refinada do trabalho de Vicente et al. (2016), com uma malha de mais de 235 mil elementos para a macroestrutura. Essa mesma diferença de discretização ocorre para a microestrutura, embora haja maior concordância entre as topologias e matrizes constitutivas obtidas.

6 CONCLUSÕES

O objetivo do presente trabalho era a implementação computacional de um programa que realize otimização topológica multiescala através do método evolucionário bidirecional (BESO) aplicada a problemas elastodinâmicos, especificamente, a minimização da resposta estrutural no domínio da frequência. Em geral, a modelagem para ambos problemas se mostrou adequada, embora discrepâncias tenham aparecido, possivelmente devido a discretização grosseira ou erros numéricos devido a forma que a equação de estado foi calculada.

AGRADECIMIENTOS:

Os autores agradecem às agências brasileiras de fomento CNPq(bolsa 148895/2016-6) do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação a e CAPES(bolsa 3686) do Ministério de Educação.

REFERÊNCIAS

- Bendsoe M. Sigmund, topology optimization-theory, methods and applications. 2003.
- Bendsøe M.P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1(4):193–202, 1989.
- Bendsøe M.P. e Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71(2):197–224, 1988.
- Boonpan A. e Bureerat S. Multi-stage design of an automotive component. *International Journal of Vehicle Design*, 60(1/2):84–99, 2012.
- Li C., Kim I.Y., e Jeswiet J. Conceptual and detailed design of an automotive engine cradle by using topology, shape, and size optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(2):547–564, 2015.
- Sigmund O. e Maute K. Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(6):1031–1055, 2013.
- Sigmund O. e Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1):68–75, 1998.
- Vicente W., Zuo Z., Pavanello R., Calixto T., Picelli R., e Xie Y. Concurrent topology optimization for minimizing frequency responses of two-level hierarchical structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 301:116–136, 2016.
- Xia L., Xia Q., Huang X., e Xie Y.M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(2):437–478, 2018.
- Zhu J.H., Zhang W.H., e Xia L. Topology optimization in aircraft and aerospace structures design. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23(4):595–622, 2016.
- Zuo Z.H., Huang X., Rong J.H., e Xie Y.M. Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies. *Materials & Design*, 51:1023–1034, 2013.