

## ESTUDIO NUMÉRICO Y EXPERIMENTAL SOBRE LA FRICCIÓN EN UN PÉNDULO PARAMÉTRICO

### NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF FRICTION IN A PARAMETRIC PENDULUM

Franco E. Dotti<sup>a,b</sup>, Florencia Reguera<sup>c</sup>, Mauricio Sosa<sup>a</sup>, Sebastián P. Machado<sup>a,b</sup> y Sebastián Domini<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, CONICET, Argentina*

<sup>c</sup>*Universidad Nacional del Sur, Departamento de Ingeniería, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina*

**Palabras clave:** péndulo paramétrico, fricción, dinámica, identificación de parámetros.

**Resumen.** Es conocido que un error en la modelación de la fricción puede conducir a predicciones irreales del comportamiento de un sistema mecánico. Este artículo se enfoca en la cuantificación de la fricción en un péndulo paramétrico. Se realizan simulaciones numéricas a partir de un modelo que tiene en cuenta la fricción viscosa asociada a la resistencia del aire y la fricción seca inherente al sistema mecánico. Luego, experimentación mediante, se evalúa el desempeño del modelo, estableciendo su alcance y falencias. Se muestra que el modelo de fricción presentado replica mejor los experimentos que los modelos más comúnmente utilizados, los cuales consideran únicamente un término de fricción viscosa lineal. También se indica que dichos modelos lineales pueden predecir erróneamente la existencia de ciertos atractores rotatorios, influyendo drásticamente en las predicciones sobre la dinámica del sistema.

**Keywords:** parametric pendulum, friction, dynamics, parameter identification.

**Abstract.** It is known that an error in modeling friction can lead to unrealistic predictions of the behavior of a mechanical system. This article focuses on the quantification of friction in a parametric pendulum. Numerical simulations are performed with a model which regards viscous friction related to air resistance and dry friction inherent to the mechanical system. Then, via experimentation, the performance of the model is evaluated, establishing its scope and limitations. It is shown that the friction model presented replicate the experiments better than the most commonly used models, which consider only a linear viscous friction term. In fact, linear models can erroneously predict the existence of certain rotating attractors, drastically influencing predictions about system dynamics.

## 1 INTRODUCCIÓN

La fricción es una variable importante en el diseño de sistemas mecánicos debido a su estrecha relación con el consumo de energía y, en consecuencia, con la eficiencia del sistema. A la hora de considerar la fricción en modelos del péndulo paramétrico, es común asumir una única fuerza de fricción viscosa como linealmente proporcional a la velocidad tangencial de la masa del péndulo. Particularmente, esta práctica común se observa en simulaciones que consideran el péndulo paramétrico como recolector de energía ambiental (Najdecka et al., 2015; Dotti et al., 2015; Reguera et al., 2016). En estudios experimentales, la constante de proporcionalidad en cuestión se estima a partir de un ensayo de decaimiento, asumiendo que la amplitud del movimiento disminuye de manera exponencial (Squire, 1986). Este modelo es atractivo pues cuenta con simplicidad matemática y práctica, pero lo cierto es que puede conducir a errores en la modelación si se emplea indiscriminadamente, sin ninguna comprobación previa. Desde hace décadas, se ha planteado que un solo término lineal de fricción viscosa puede no representar con precisión el comportamiento de los péndulos reales (Leven et al., 1985; Nelson y Olsson, 1986). Esto ocurre principalmente porque un péndulo real involucra superficies deslizantes o rodantes, como rodamientos a bolas, donde la fricción seca o de Coulomb no puede ser omitida (Squire, 1986). Además, si el movimiento del péndulo ocurre a un alto número de Reynolds, la fricción viscosa puede incluir un término cuadrático (Squire, 1986; Nelson y Olsson, 1986) o, inclusive, puede ser puramente cuadrático (Miller, 1974).

En este trabajo se propone un modelo matemático más completo del péndulo paramétrico siguiendo estas ideas antiguas pero consistentes. Se asume que el eje de rotación está montado en rodamientos a bolas para tener en cuenta la fricción seca. Esta es una situación realista para todo sistema mecánico, ya que los rodamientos de bolas muestran un buen equilibrio entre costo, mantenimiento y fricción (SKF Group, 2013; Wardle, 2015). Además, también se tienen en cuenta los términos de fricción viscosa lineal y cuadrática. El modelo es testeado experimentalmente considerando un movimiento recíprocante como excitación paramétrica. Este movimiento se puede encontrar en una amplia gama de máquinas industriales, donde se usa un sistema biela-manivela para convertir el movimiento circular en un movimiento lineal o viceversa. Sin embargo, el modelo aquí presentado puede ser útil para cualquier otra excitación de naturaleza armónica o estocástica.

Los parámetros de fricción se identifican resolviendo un problema de optimización. La identificación se basa en la minimización del error medio entre los datos experimentales y los cálculos numéricos de la posición angular del péndulo. Esta técnica es similar a la utilizada por Lenci et al. (2015).

## 2 MODELO MATEMÁTICO

La ecuación diferencial gobernante del péndulo paramétrico se obtiene a partir de la ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos de un grado de libertad, y está dada por

$$ml^2\theta'' + T_v + T_C + ml(y'' + g)\sin\theta = 0, \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa del péndulo,  $l$  es la distancia entre el centro de gravedad y el eje del péndulo,  $g$  es la gravedad,  $y$  es el desplazamiento vertical del eje,  $\theta$  es el ángulo medido desde la posición de reposo y  $T_v$  y  $T_C$  son el torque de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La operación  $(\bullet)'$  denota la derivada con respecto al tiempo  $\tau$ .

La Figura 1 muestra un péndulo esquemático sometido a una excitación recíprocante, donde la biela  $L$  convierte en lineal el movimiento circular de la manivela  $r$ , la cual gira a una

velocidad angular constante  $\Omega$ . Así, el movimiento vertical lineal del eje del péndulo está dado por

$$y = r(1 - \cos \Omega \tau) + L(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \Omega \tau}), \quad (2)$$

donde  $\lambda = r/L$ .

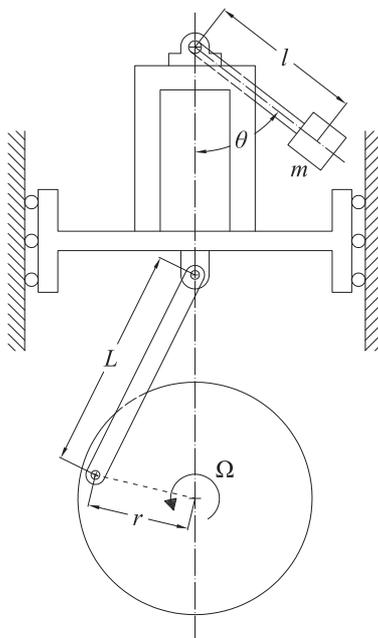


Figura 1: Esquema del sistema excitador-péndulo.

A fin de determinar el torque de fricción viscosa,  $T_v$ , previamente debe definirse la fuerza de arrastre. Se propone que dicha fuerza contenga términos lineal y cuadrático de la velocidad (Nelson y Olsson, 1986), es decir  $F_v = aV^2 + bV$ , donde  $V$  la magnitud de la velocidad tangencial de la masa del péndulo y  $a$  y  $b$  son constantes. Siendo  $V = l\theta'$  y  $T_v = lF_v$ , el torque de fricción se expresa como

$$T_v = al^3 (\theta')^2 \operatorname{sgn} \theta' + bl^2 \theta'. \quad (3)$$

La función signo ( $\operatorname{sgn}$ ) es necesaria ya que ambas componentes de fricción deben oponerse al movimiento.

Siguiendo consideraciones prácticas de fricción en rodamientos, el torque de fricción seca,  $T_C$ , se considera proporcional a la fuerza aplicada (Squire, 1986; SKF Group, 2013; Olsson et al., 1998). Por lo tanto

$$T_C = \mu r_b F_N \operatorname{sgn} \theta', \quad F_N = \left| ml (\theta')^2 + mg \cos \theta \right|, \quad (4)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción seca,  $r_b$  es el radio del orificio del rodamiento y  $F_N$  es la fuerza dinámica radial sobre los rodamientos debida al movimiento del péndulo. Como  $F_N$  es también la carga axial en la varilla del péndulo, la misma se calcula aplicando la mecánica elemental (Meriam y Kraige, 1986).

Ahora bien, considerando  $y(\tau)$  de la ecuación (2) como el desplazamiento impuesto al eje del péndulo y teniendo en cuenta los torques de fricción de (3-4), la ecuación de movimiento unidimensional (1) del sistema puede expresarse de la siguiente manera

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta}^2 \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \beta \dot{\theta} + M \left| \dot{\theta}^2 + \cos \theta \right| \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \left( R \cos \omega t + \lambda^3 R \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1^3} + \lambda R \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} + 1 \right) \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (5)$$

donde se realizaron las siguientes definiciones

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad t = \omega_0 \tau, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad R = \frac{r\omega^2}{l}, \quad \alpha = \frac{al}{m}, \quad \beta = \frac{b}{m\omega_0}, \quad M = \frac{\mu r_b}{l}, \quad (6)$$

$$\Lambda_1 = \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}, \quad \Lambda_2 = \cos^2 \omega t - \operatorname{sen}^2 \omega t, \quad \Lambda_3 = \cos^2 \omega t \cdot \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

En (5), el punto superíndice indica derivación con respecto al tiempo adimensional  $t$ . Las magnitudes  $\omega$ ,  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $M$  son parámetros adimensionales asociados a la frecuencia de forzamiento, la amplitud de forzamiento, la fricción viscosa cuadrática, la fricción viscosa lineal y la fricción seca, respectivamente. Dependiendo de la configuración de estos cinco parámetros junto con  $\lambda$  y la elección de las condiciones iniciales  $\theta_0$  and  $\dot{\theta}_0$ , se obtienen diferentes soluciones estables de (5), en correspondencia a las diferentes respuestas del sistema físico. Las respuestas más comunes son la posición de reposo, las oscilaciones, las rotaciones y el movimiento caótico (Clifford y Bishop, 1995; Dotti et al., 2015).

### 3 CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL

El dispositivo experimental consta de un péndulo montado en su propia estructura portante y de un excitador mecánico (Figura 2). El excitador funciona a partir de un mecanismo biela-manivela y le impone al sistema pendular un movimiento vertical. El movimiento de rotación del excitador es producido por un motorreductor eléctrico de 0.75 HP. El excitador permite quince posibilidades de forzamiento, combinando sus cinco velocidades  $\Omega$ :  $5.15 \text{ s}^{-1}$ ,  $7.48 \text{ s}^{-1}$ ,  $9.64 \text{ s}^{-1}$ ,  $12.08 \text{ s}^{-1}$  y  $14.80 \text{ s}^{-1}$ , con sus tres carreras  $r$ : 205 mm, 106.5 mm y 72.5 mm. La biela del excitador tiene una longitud fija  $L = 575 \text{ mm}$ .

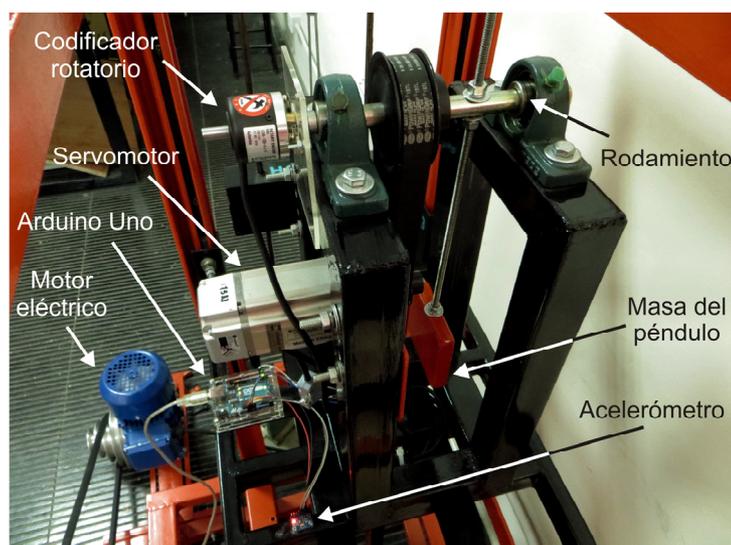


Figura 2: Dispositivo experimental, montado sobre un excitador mecánico en el laboratorio del GIMAP.

Los límites prácticos de longitud de la varilla del péndulo son  $140 \text{ mm} < l < 270 \text{ mm}$ . Así, la frecuencia natural  $\omega_0$  puede variar entre 6.028 y 7.596 Hz. La varilla se halla unida rígidamente a un eje que, a su vez está soportado por dos rodamientos de bolas P203 al bastidor de soporte ( $r_b = 12.25 \text{ mm}$ ). El eje también tiene un acoplamiento de poleas y correa

dentada con un servomotor, capaz de proporcionar un par de control al péndulo (no utilizado en el presente estudio). Pueden utilizarse dos masas intercambiables de 0.745 Kg y 1.460 Kg. Las dimensiones son similares a las del dispositivo experimental de Najdecka et al. (2015), correspondiente a un modelo a escala de recolector de energía undimotriz.

Cada experimento se inicia manualmente por el operador. Una vez que el péndulo está en movimiento, se enciende el excitador mecánico y el tiempo inicial se establece en correspondencia con el primer pico positivo de la aceleración impuesta. Esto asegura que no se produce un cambio de fase con respecto a (2). Las condiciones iniciales  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$  son medidas por el sistema de adquisición de datos, por lo que sus valores son conocidos aunque no se pueden imponer exactamente *a priori*.

La adquisición de datos se realiza utilizando componentes de bajo costo. La medición de la posición angular corresponde a un codificador incremental Autonics E40H8-1024-6L5 (resolución de  $0.35^\circ$ ) adosado al eje pivot del péndulo. Por su parte, la velocidad angular se obtiene por derivación. La aceleración lineal impuesta al péndulo se mide mediante un acelerómetro InvenSense MPU-6050 situado en la mesa del excitador. Las señales de ambos sensores son recogidas por una tarjeta Arduino y enviadas a una computadora dedicada.

#### 4 IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE FRICCIÓN

Los parámetros físicos  $a$ ,  $b$  y  $\mu$  se determinan resolviendo un problema de optimización, el cual consiste en minimizar la diferencia entre historias temporales numéricas y experimentales de  $\theta$  (Lenci et al., 2015). Además de  $a$ ,  $b$  y  $\mu$ , las condiciones iniciales  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$  también son incluidas como variables del problema de optimización. Se considera la siguiente función error

$$E_\theta \left( a, b, \mu, (\theta_{0,j}, \dot{\theta}_{0,j})_{j=1}^N \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_j} \left| \hat{\theta}_{j,k} - \theta_j(t_k) \right|, \quad (7)$$

donde  $\hat{\theta}_{j,k}$  es una medición individual de la posición angular, correspondiente a la historia temporal  $j$  medida en el tiempo  $t_k$ .  $N$  es el total de historias temporales consideradas, por lo que  $(t_{n_j}, \hat{\theta}_{j,n_j})$  es la última medición individual de la historia temporal  $j$ . Cada historia temporal simulada  $\theta_j(t)$  se obtiene de una función numérica resolviendo (5) para un conjunto dado de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\mu$ .

Resulta fundamental alcanzar el mismo estado estacionario en la simulación que en el experimento y por lo tanto tal condición se impone como restricción del problema. Para ello, se evalúa un número de respuesta,  $n_r$ : si el estado estacionario simulado coincide con el experimental, entonces  $n_r = 1$ ; caso contrario,  $n_r = 0$ . Así, se resuelve el siguiente problema de optimización, donde la función objetivo  $f_{\text{obj}}$  es una versión penalizada  $E_\theta$ ,

$$\min \left\{ f_{\text{obj}} \left( a, b, \mu, (\theta_{0,j}, \dot{\theta}_{0,j})_{j=1}^N \right) = \begin{cases} E_\theta, & \text{if } n_r = 1 \\ \kappa E_\theta, & \text{if } n_r = 0 \end{cases} \right\}. \quad (8)$$

El factor de penalización  $\kappa$  es un número grande elegido arbitrariamente. Hallar el mínimo de la función objetivo  $f_{\text{obj}}$  implica resolver un problema de optimización con  $3 + 2N$  variables. Las historias temporales consideradas en el problema de optimización incluyen tanto el estado transitorio como el estacionario. No obstante, se impone que al menos el estacionario corresponda a una respuesta periódica. Dada su impredecibilidad, las respuestas estacionarias caóticas no son utilizadas.

La necesidad de identificar  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$  responde a la fuerte influencia del estado inicial en la

dinámica del péndulo paramétrico. Si la cuenca de atracción del sistema se halla fractalizada, lo cual es común en este caso, puede suceder que una pequeña variación en las condiciones iniciales conduzca a estados estacionarios topológicamente diferentes (Thompson y Stewart, 2003; Dotti et al., 2015). Por tratarse de geometría fractal, la magnitud de esta variación puede ser (en teoría) infinitamente pequeña. Dado que la resolución del encoder utilizado es de  $0.35^\circ$ , la cuantificación de dicho cambio es imposible desde el punto de vista práctico. Por supuesto, la medición experimental es una respuesta que *existe*. Por lo tanto, en un radio acotado del estado inicial medido, debe hallarse un set de condiciones iniciales que permita simular la respuesta experimental. Ese set es desconocido, y por lo tanto debe ser identificado.

Una vez resuelto el problema de optimización (8), la validación con una nueva historia temporal experimental no es directa debido, nuevamente, a la dependencia de las condiciones iniciales. Para cada experimento, fijando los valores óptimos de  $a$ ,  $b$ ,  $\mu$ , empleando las condiciones iniciales medidas y luego resolviendo (5), se debería obtener una simulación que replique los experimentos. Sin embargo, esto puede no ocurrir debido a la sensibilidad mencionada. No obstante, la validación consistirá en encontrar un conjunto adecuado de condiciones iniciales en las cercanías al conjunto medido. Por ello, en cada validación con una nueva historia temporal, el problema de (8) es resuelto nuevamente, ahora con  $a$ ,  $b$  y  $\mu$  fijos y  $N = 1$ . Esto reduce el número de variables a dos:  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$ , y genera un campo de búsqueda pequeño, conformando un problema de rápida resolución.

## 5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En primer término se determinan  $a$ ,  $b$  y  $\mu$  del sistema real. El problema de (8) se resuelve empleando experimentos cuyas respuestas estacionarias son rotacionales. Estas rotaciones a veces presentan transitorios caóticos, que son tenidos en cuenta en la resolución. Para la validación, también son consideradas respuestas oscilatorias y de reposo. Se emplea un total de 14 experimentos con una excitación dada por  $r = 72.5$  mm and  $\Omega = 1.54$  Hz, la cual es una favorable para la obtención de rotaciones. A fin de que los experimentos sean equivalentes, se realizan bajo las mismas condiciones de temperatura y lubricación, dado que dichos factores influyen en la cuantificación de la fricción.

La función objetivo  $f_{\text{obj}}$  es minimizada con respecto a los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\mu$  y a las condiciones iniciales. Dada la existencia de múltiples mínimos locales, se emplea la técnica de optimización global Evolución Diferencial (DE/rand/1/bin) (Storn y Price, 1997). Luego, para una generación  $G$ , se define el vector de parámetros como

$$\mathbf{x}_G^{(p)} = \left\{ a^{(p)}, b^{(p)}, \mu^{(p)}, \left( \theta_{0,j}^{(p)}, \dot{\theta}_{0,j}^{(p)} \right)_{j=1}^N \right\}, \quad (9)$$

donde  $1 \leq p \leq N_p$ , siendo  $N_p$  el tamaño de la población. Como la mayoría de los métodos heurísticos, DE tiene parámetros de control que afectan su convergencia. Éstos son: la constante de cruce  $C_R$ , el factor de escala  $F$  y  $N_p$ . Hallar un conjunto de parámetros adecuado suele resultar difícil por ser dependientes del problema. Para el problema en cuestión, se encontró que  $C_R = 0.9$ ,  $F = 0.8$  y  $N_p \geq 10$  ( $3 + 2N$ ) producen una buena convergencia. Para su elección, se emplearon tácticas de prueba y error siguiendo consejos de la literatura (Peñañuri et al., 2016; Storn, 1996). El espacio de búsqueda se define como:  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $0 < \mu < 0.25$ . Para el espacio de búsqueda de  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$ , se asume como simplificación que varían en  $\pm 0.1$  del valor medido, lo cual asegura que se hallen dentro del rango del error cometido en la medición. La convergencia del método DE se verifica evaluando la aptitud entre el mejor y el peor individuo de la población, deteniendo el cálculo cuando esta diferencia es menor a 0.001.

Cálculo	Configuración experimental					Datos DE		Resultados óptimos			
	$m$ (Kg)	$l$ (mm)	$R$	$\omega$	$N$	$N_p$	$G$	$a$ ( $\alpha$ )	$b$ ( $\beta$ )	$\mu$ ( $M$ )	$f_{obj}$
#1	1.46	265	0.657	1.585	3	80	3001	0.000 (0.000)	0.525 (0.059)	0.157 (0.007)	124.73
#2	0.745	260	0.687	1.57	4	100	3031	0.001 (0.000)	0.473 (0.103)	0.145 (0.008)	2108.37
#3	0.745	260	0.687	1.57	8	180	1439	0.003 (0.001)	0.622 (0.136)	0.126 (0.006)	3948.37
#4	1.46	265	0.657	1.585	7	160	1730	0.002 (0.000)	0.509 (0.057)	0.135 (0.006)	3237.61
	0.745	260	0.687	1.57				0.002 (0.001)	0.509 (0.111)	0.135 (0.006)	

Tabla 1: Resultados de los cálculos de optimización para determinar los parámetros físicos  $a$ ,  $b$  y  $\mu$ .

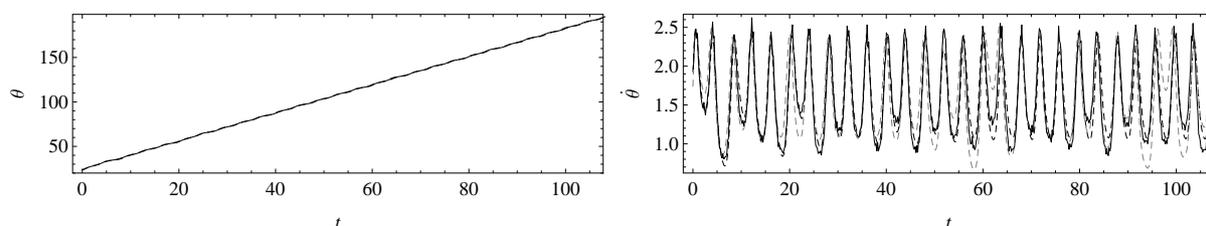


Figura 3: Historias temporales de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .  $R = 0.696$ ,  $\omega = 1.580$ ,  $\lambda = 0.126$ . (—): Experimental. (---): Simulación A,  $a = 0$ ,  $b = 0.5$ ,  $\mu = 0.15$ . (---): Simulación B,  $a = 0$ ,  $b = 0.3$ ,  $\mu = 0$ .

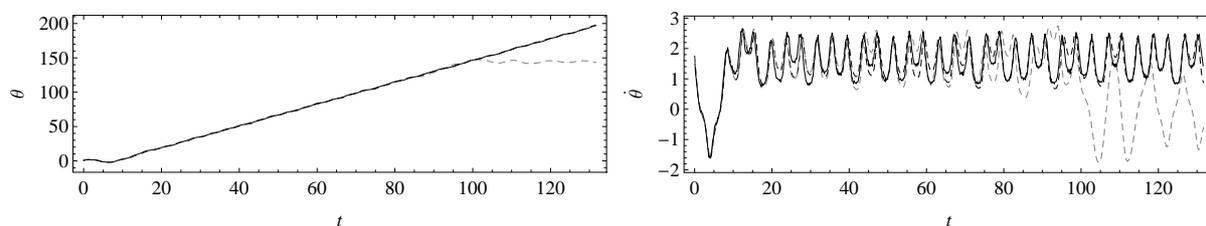


Figura 4: Historias temporales de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .  $R = 0.694$ ,  $\omega = 1.592$ ,  $\lambda = 0.126$ . (—): Experimental. (---): Simulación A,  $a = 0$ ,  $b = 0.5$ ,  $\mu = 0.15$ . (---): Simulación B,  $a = 0$ ,  $b = 0.3$ ,  $\mu = 0$ .

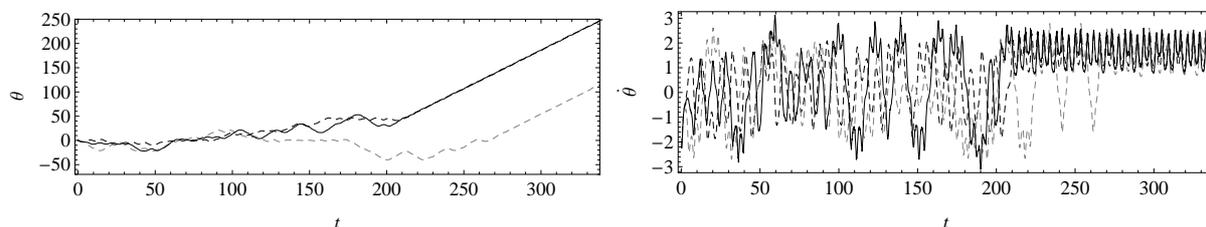


Figura 5: Historias temporales de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .  $R = 0.700$ ,  $\omega = 1.585$ ,  $\lambda = 0.126$ . (—): Experimental. (---): Simulación A,  $a = 0$ ,  $b = 0.5$ ,  $\mu = 0.15$ . (---): Simulación B,  $a = 0$ ,  $b = 0.3$ ,  $\mu = 0$ .

La [Tabla 1](#) muestra los resultados de cuatro cálculos de optimización representativos. Ciertamente, la primera observación que surge es que la fricción viscosa resulta lineal, ya que para todas las soluciones óptimas  $a \cong 0$ . Este resultado confirma la hipótesis de [Horton et al. \(2008\)](#), la cual establece que la disipación en un péndulo paramétrico se puede representar

con precisión considerando la fricción seca y sólo una componente de la fricción viscosa. Una explicación posible a tal comportamiento se obtiene a partir de la mecánica de fluidos, donde la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad para un flujo laminar y a la velocidad al cuadrado para un flujo turbulento (Falkovich, 2011). En el caso del péndulo paramétrico, la transición laminar-turbulenta comienza con un número de Reynolds del orden de  $5 \times 10^5$  (Elder, 1960). En los experimentos realizados aquí el número de Reynolds es menor a  $1.5 \times 10^4$  y, por lo tanto, el flujo es laminar. Así, resulta razonable  $a \cong 0$ . Sin embargo, no puede decirse que la componente cuadrática de la velocidad no influye en absoluto en la fricción, dado que el término de la fricción seca en (5) incluye un término cuadrático de la velocidad. En este punto la discusión permanece abierta (Squire, 1986).

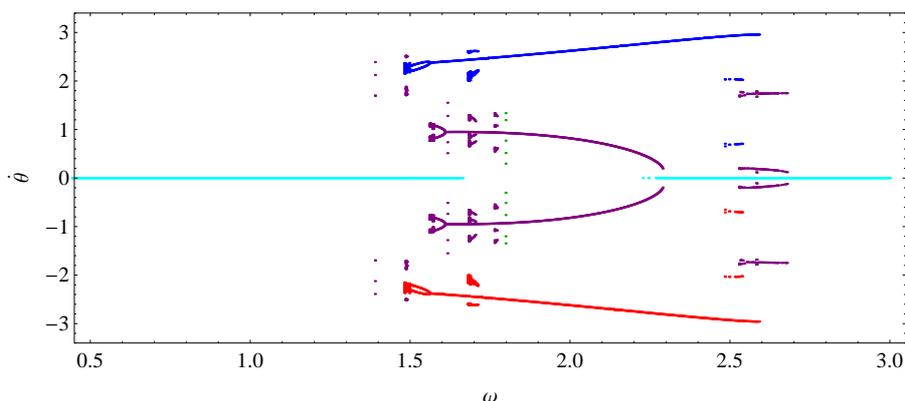


Figura 6: Diagrama de bifurcación de  $\dot{\theta}$ .  $R = 0.700$ ,  $\lambda = 0.126$ .  $a = 0$  ( $\alpha = 0$ ),  $b = 0.5$  ( $\beta = 0.109$ ),  $\mu = 0.15$  ( $M = 0.007$ ). (•): rotación horaria, (•): rotación antihoraria, (•): reposo, (•): oscilación, (•): caos.

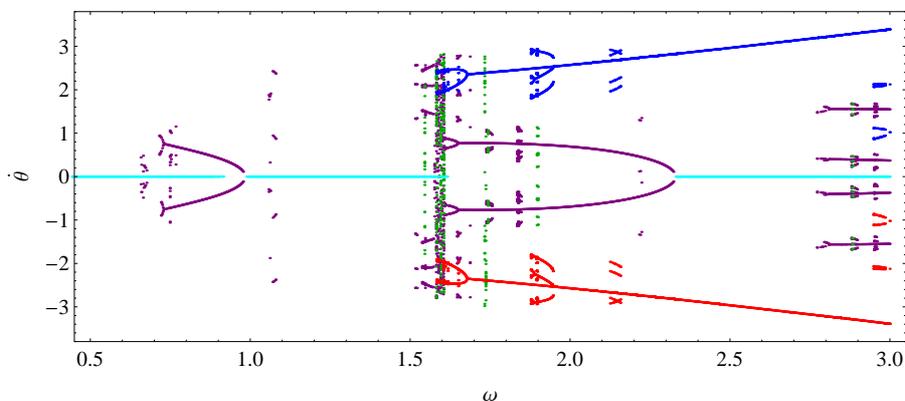


Figura 7: Diagrama de bifurcación de  $\dot{\theta}$ .  $R = 0.700$ ,  $\lambda = 0.126$ .  $a = 0$  ( $\alpha = 0$ ),  $b = 0.3$  ( $\beta = 0.066$ ),  $\mu = 0$  ( $M = 0$ ). (•): rotación horaria, (•): rotación antihoraria, (•): reposo, (•): oscilación, (•): caos.

Los valores óptimos de  $b$  y  $\mu$  no difieren significativamente entre los distintos cálculos:  $b \in [0.473, 0.622]$  y  $\mu \in [0.135, 0.157]$ . Por lo que se puede inferir un comportamiento cuasi constante, mostrando que las hipótesis de (3-4) son razonables. Luego de obtener  $a$ ,  $b$  y  $\mu$ , se valida el modelo mediante comparaciones con nuevos experimentos. Para ello, se establece  $a = 0$ ,  $b = 0.5$  y  $\mu = 0.15$  y se resuelve el problema (8) con  $N = 1$  para determinar los valores de  $\theta_0$  y  $\dot{\theta}_0$ . Luego, las historias temporales  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  se obtienen resolviendo (5). En el estudio comparativo también se incluyen simulaciones con  $a = 0$ ,  $b = 0.3$  y  $\mu = 0$ , donde  $b$  se estima por el método clásico de decremento logarítmico.

Las Figuras 3-5 son gráficas comparativas de algunas historias temporales. Las simulaciones se denominan “Simulación A” o “Simulación B” según se trate de parámetros

obtenidos mediante optimización o por decremento logarítmico, respectivamente. La **Figura 3** corresponde a una respuesta rotacional con un largo transitorio rotatorio multi-periódico. Ambas simulaciones reproducen bien el experimento, pero la Simulación B predice una rotación de período 2 a largo plazo, mientras que el experimento muestra una rotación de período 1 (esto fue verificado mediante un mapa de Poincaré, no mostrado aquí). En la **Figura 4**, se presenta una rotación con un corto transitorio oscilatorio. En este caso, la Simulación A produce una aproximación casi perfecta, mientras que Simulación B no puede representar los experimentos, prediciendo una respuesta oscilatoria. La **Figura 5** presenta una rotación con un transitorio caótico. Ambas simulaciones predicen las rotaciones estacionarias, pero la Simulación B predice erróneamente período 2 mientras que el experimento muestra una rotación de período 1. El estado transitorio no está bien modelado en ninguno de los dos casos, sin embargo la Simulación A predice su duración.

Se obtuvieron grandes diferencias entre las simulaciones A y B al construir diagramas de bifurcación. En las gráficas de las **Figuras 6 y 7**, se varía  $\omega$  mientras el resto de los parámetros permanecen fijos. Se puede notar claramente que si sólo se considera la componente lineal de la fricción viscosa se predice una dinámica mucho más compleja. Desde el punto de vista de la recolección de energía, la estimación errónea de la existencia de rotaciones da como resultado un diseño inadecuado del recolector. Por ejemplo: a partir de los resultados de la **Figura 6**, podría diseñarse un recolector en el rango  $2.6 < \omega < 3.0$ ; sin embargo, la **Figura 7** muestra que en ese rango no es posible obtener rotaciones estables.

## 6 CONCLUSIONES

Siendo el péndulo paramétrico un sistema mecánico icónico, se realizó una caracterización de sus mecanismos de fricción y se indagó en la influencia de la misma en su comportamiento dinámico. Para realizar simulaciones numéricas, se utilizó un modelo que incluye una descripción realista de la fricción del péndulo. Se consideraron los términos lineal y cuadrático de la fricción viscosa, junto con el término de fricción seca. Los parámetros de fricción de un sistema real fueron identificados mediante un cálculo de optimización, utilizando como datos de entrada historias temporales de mediciones experimentales.

En el rango estacionario, las simulaciones predijeron con buena aproximación los experimentos. Los transitorios oscilatorios y rotacionales fueron modelados con bastante precisión. Por su parte, los transitorios caóticos sólo pudieron ser reproducidos de manera cualitativa, algo razonable dada la propia definición de caos.

Los resultados de esta investigación sugieren que, siempre y cuando el flujo de aire alrededor de las partes mecánicas resulte laminar, la disipación en un péndulo paramétrico real se puede representar con precisión considerando la fricción seca y una única componente lineal de la fricción viscosa. Para asegurar una modelación adecuada, es crucial considerar la influencia de la fricción seca o bien verificar que la misma puede ser despreciada. Si se omite erróneamente la fricción seca, puede predecirse una dinámica mucho más compleja, difícil de encontrar en los sistemas reales. Esto conduce a predicciones erróneas de las zonas de rotaciones, influyendo drásticamente en aplicaciones prácticas, como puede ser el empleo del péndulo como recolector de energía undimotriz o vibratoria.

## 7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del CONICET, la ANPCyT, de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UTN y del Departamento de Ingeniería de la UNS.

## REFERENCIAS

- Clifford, M.J. y Bishop, S.R., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, 201:191-196, 1995.
- Dotti, F.E., Reguera, F. y Machado, S.P., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> PANACM*, 1516-1529, Buenos Aires, Argentina, 2015.
- Elder, J.W., The flow past a plate of finite width. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(1):133-153, 1960.
- Falkovich, G., *Fluid mechanics: A short course for physicists*. Cambridge University Press, New York, 2011.
- Horton, B., Wiercigroch, M. y Xu, X., Transient tumbling chaos and damping identification for parametric pendulum. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 366:767-784, 2008.
- Lenci, S., Consolini, L. y Clementi, F., On the experimental determination of dynamical properties of laminated glass. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 7:27-43, 2015.
- Leven, R.W., Pompe, B., Wilke, C. y Koch, B.P., Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum. *Physica D*, 16:371-384, 1985.
- Meriam, J.L. y Kraige, L.G., *Engineering Mechanics Volume 2 – Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- Miller, B.J., More realistic treatment of the simple pendulum without difficult mathematics. *American Journal of Physics*, 42:286-303, 1974.
- Najdecka, A., Narayanan, S. y Wiercigroch, M., Rotary motion of the parametric and planar pendulum under stochastic wave excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 71:30-38, 2015.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M. y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43:7-14, 2012.
- Nelson, R.A. y Olsson, M.G., The pendulum – Rich dynamics from a simple system. *American Journal of Physics*, 54 (2):112-121, 1986.
- Peñuñuri, F., Cab, C., Carvente, O., Zambrano-Arjona, M. y Tapia, J., A study of the classical Differential Evolution control parameters. *Swarm and Evolutionary Computation*, 26:86-96, 2016.
- Price, K., Storn, R. y Lampinen, J., *Differential Evolution – a practical approach to global optimization*. Springer, Berlin, 2005.
- Reguera, F., Dotti, F.E., Machado, S.P., Rotation control of a parametrically excited pendulum by adjusting its length, *Mechanics Research Communications*, 72:74-80, 2016.
- SKF Group, *Rolling bearings catalogue*. Göteborg, Sweden, 2013.
- Squire, P.T., Pendulum damping, *American Journal of Physics*, 54 (11):984-991, 1986.
- Storn, R., On the usage of Differential Evolution for function optimization. *Proceedings of the NAFIPS*, 519-523, Berkeley, USA, 1996.
- Storn, R. y Price, K., Differential Evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341-359, 1997.
- Wardle, F., *Ultra-precision bearings*. Elsevier, Amsterdam, 2015.