

UNA NUEVA INTERPRETACIÓN DEL MODELO PHYSARUM PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO EN EQUILIBRIO DE USUARIO

A NEW INTERPRETATION OF THE PHYSARUM MODEL FOR THE USER EQUILIBRIUM TRAFFIC ASSIGNMENT

Víctor H. Cortínez^{a,b,c} y Patricia N. Dominguez^{a,b}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, e-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, e-mail: pdoming@uns.edu.ar*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras clave: Asignación de tráfico, modelo Physarum, principio de Wardrop, tiempos de viaje.

Resumen. En los últimos años se ha desarrollado el modelo denominado Physarum para resolver diferentes problemas de optimización de interés científico y tecnológico. El algoritmo se basa en la estrategia de aprovisionamiento del moho Physarum polycephalum, que consiste en la generación de túbulos siguiendo la ruta más corta hacia las fuentes de alimentación. La modelación matemática de tal comportamiento se ha aplicado recientemente al problema de asignación de tráfico de equilibrio de usuario siguiendo la formulación de Beckmann. En este trabajo se presenta una reinterpretación del modelo Physarum aplicado al problema de asignación. Se demuestra que es posible obtener una comprensión más profunda de la metodología si se la asocia a la formulación de asignación basada en tiempos de viaje. Esto permite generalizar la aplicación del algoritmo a otros problemas de tráfico no considerados anteriormente, incluyendo formulaciones continuas bidimensionales.

Keywords: Traffic assignment, Physarum model, Wardrop principle, travel times.

Abstract. Physarum model has been developed in the last years to solve different optimization problems of technical and scientific interest. The algorithm is based on the foraging strategy of the Physarum polycephalum mold, consisting in the generation of protoplasmic tubes following the shortest routes to the feeding sources. Mathematical modeling of such behavior has been applied to the user equilibrium traffic assignment according to the Beckmann formulation. This paper presents a reinterpretation of the Physarum solution to the assignment problem. As shown, a deeper understanding of the methodology may be reached when the traffic assignment problem is formulated in terms of travel times. The new interpretation simplifies the application of the algorithm to generalized traffic assignment problems, including continuum two-dimensional formulation.

1 INTRODUCCIÓN

Las ciudades, en constante crecimiento, requieren modificaciones frecuentes de la red de transporte. Consecuentemente, es de enorme importancia la predicción del patrón de tráfico generado por tales cambios, lo cual permite evaluar su efectividad. Para tal fin se utilizan modelos matemáticos capaces de proporcionar los valores de los flujos vehiculares esperados en cada tramo de la red y los tiempos de viaje entre distintos puntos de la ciudad a partir de una matriz de viajes origen-destino y de las características viales. Este problema se denomina “asignación de tráfico” y puede formularse asumiendo condiciones de equilibrio a partir del primer principio de Wardrop (Sheffi, 1984). Éste establece que el comportamiento social de los conductores al seleccionar su camino hacia un destino es la intención de minimizar su propio tiempo de viaje (al menos esto es así para viajes realizados en forma frecuente). Este principio conduce a un problema de optimización equivalente desarrollado por Beckmann et al. (Sheffi, 1984). Considerando que éste es un problema computacional de grandes dimensiones se ha realizado una labor de investigación importante tendiente al desarrollo de métodos de solución con el objetivo de disminuir el costo computacional. El más popular de ellos es el método de Frank-Wolfe (FW) (Dominguez et al., 2009). Si bien es muy simple de utilizar, en ocasiones requiere un tiempo computacional excesivo para lograr la convergencia. Para mejorar su eficiencia se han desarrollado modificaciones tales como los algoritmos de Frank-Wolfe conjugado (CFW) y Frank-Wolfe biconjugado (BFW). Otros conceptos interesantes fueron presentados en los algoritmos presentados por Lotito (2006) y Xu et al. (2008) entre otros.

En los últimos años se ha desarrollado el modelo denominado Physarum para resolver diferentes problemas de optimización de interés científico y tecnológico. El algoritmo se basa en la estrategia de aprovisionamiento del moho Physarum polycephalum, que consiste en la generación de túbulos siguiendo la ruta más corta hacia las fuentes de alimentación.

La modelación matemática de tal comportamiento se ha aplicado eficientemente a la determinación del camino más corto en redes, a la reducción de costos en redes de transporte y comunicaciones terrestres, y muy recientemente al problema de asignación de tráfico de equilibrio de usuario siguiendo la formulación de Beckmann (Zang, 2018; Xu et al., 2018). En tales trabajos se ha mostrado que el enfoque Physarum puede tener una eficiencia mayor que diversos enfoques conocidos tales como FW, CFW y BFW

En este trabajo se presenta una reinterpretación del modelo Physarum aplicado al problema de asignación. Se demuestra que es posible obtener una comprensión más profunda de la metodología si se la asocia a la formulación de asignación basada en tiempos de viaje (Cortínez y Dominguez, 2017). Esto permite generalizar la aplicación del algoritmo a otros problemas de tráfico no considerados anteriormente e inclusive a modelos continuos espacialmente (Sasaki et al., 1990; Cortínez y Dominguez, 2013, 2017).

2 ENFOQUE PHYSARUM PARA EQUILIBRIO DE USUARIO

El Physarum polycephalum es un amebode unicelular que forma una red dendrítica de estructuras tubulares en busca de alimentos. Tiene la habilidad de encontrar el camino más corto hacia las fuentes de alimento en base a su mecanismo de forrajeo. Éste consiste en transformar los tubos protoplásmicos con retroalimentación positiva de las tasas de flujo de nutrientes. Esto es, altas tasas de flujo provocan que los tubos se engrosen.

Un modelo matemático para la búsqueda del camino más corto del Physarum fue desarrollado por Tero et al. (2007). Se basa en una expresión para el flujo Q_{ij} en un tubo protoplásmico $i-j$ en términos de la diferencia de presión p_i , siguiendo la forma de la ley de

Poiseuille:

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j) \quad (1)$$

donde D_{ij} es la conductividad del tubo i - j y L_{ij} su longitud. Utilizando tal expresión en conjunto con la ley de conservación de la masa, es posible obtener las presiones en los nodos de la red de tubos y, luego, el flujo en cada uno de ellos.

Tal sistema está acoplado a una ley de evolución de la conductividad de los tubos de la siguiente forma:

$$\frac{dD_{ij}}{dt} = f(|Q_{ij}|) - \alpha D_{ij} \quad (2)$$

Como fue demostrado por [Tero et al. \(2007\)](#), este algoritmo converge al camino más corto cuando $f = |Q_{ij}|$, $\alpha = 1$ y se considera la versión en diferencias finitas de (2) de la siguiente manera (asumiendo que $Q_{ij} > 0$):

$$D_{ij}^{n+1} = \frac{D_{ij}^n + Q_{ij}^{n+1}}{2} \quad (3)$$

[Zhang y Mahadevan \(2018\)](#) y [Xu et al. \(2018\)](#) han adaptado este algoritmo para la solución del problema del equilibrio de usuario. Para ello lo han reformulado para la consideración de tubos dirigidos (típicos de una red de transporte urbano) y han considerado la longitud de los mismos como una medida del tiempo de viaje en el tramo correspondiente. El problema de equilibrio de usuario requiere también actualizar el tiempo de recorrido del tramo, lo que se realiza según la siguiente expresión.

$$L_{ij}^{n+1} = \frac{L_{ij}^n + t_a^{n+1}(Q_{ij}^{n+1})}{2} \quad (4)$$

Para el análisis de una red en particular, el algoritmo Physarum fue empleado efectuando un recorrido iterativo de orígenes. Es decir, en cada iteración se consideró el subproblema de un origen y múltiples destinos (por supuesto, es equivalente considerar múltiples orígenes y un solo destino). Los autores previamente mencionados han demostrado que si el algoritmo converge, los flujos de cada tubo coinciden con los de la solución del problema de EU según la formulación de Beckmann. En las referencias mencionadas, la presión fue utilizada como una variable ficticia, sin significación real en el problema de tráfico. Esto puede dificultar la aplicación a problemas de asignación generalizados.

3 FORMULACIÓN DEL EQUILIBRIO DE USUARIO UTILIZANDO TIEMPOS DE VIAJE

El efecto de la congestión de tráfico urbano, es decir, de la cantidad de vehículos circulando por una arteria a , puede medirse a través del tiempo necesario t_a para transitar la misma (por ejemplo, una cuadra). Se determina empíricamente que, en general, este tiempo aumenta conforme lo hace el flujo horario de vehículos por tal tramo \bar{g}_a (veh/h). La expresión analítica correspondiente tiene la siguiente forma general ([Cortínez y Dominguez, 2017](#)):

$$t_a = F(\bar{g}_a) \tag{5}$$

Ésta corresponde a una función creciente tal como la que se muestra en la [Figura 1a](#). En la literatura suele denominarse función de costo a tal expresión. Existen diferentes fórmulas empíricas para expresar (5) explícitamente, tal como la conocida fórmula BPR ([Cortínez y Domínguez, 2013](#)).

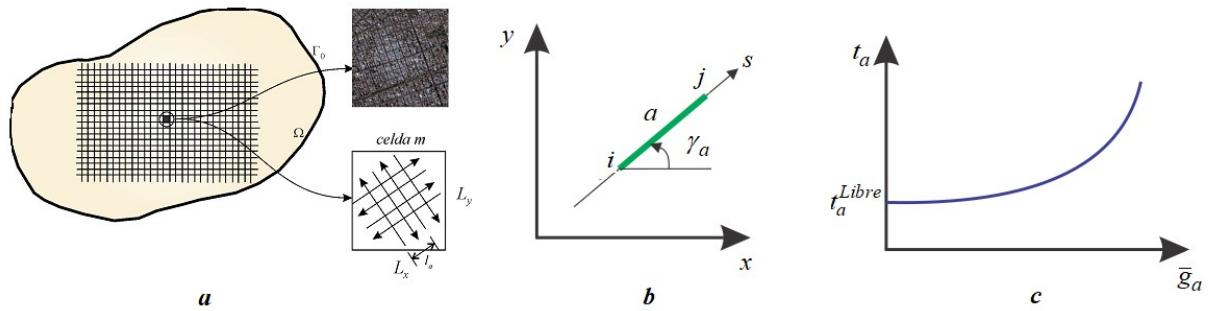


Figura 1: a) división de la ciudad en celdas y calles en una de ellas, b) Esquema de un tramo genérico de la red de transporte, c) Tiempo de circulación en función del flujo vehicular (función de costo).

Es posible invertir la expresión (5) para obtener el flujo horario en el tramo en función del tiempo de circulación, es decir:

$$\bar{g}_a = G(t_a) \tag{6}$$

Tiene sentido individualizar dentro de este flujo aquel que se dirige hacia un destino particular d . Esto quiere decir que el flujo total será la suma de aquel que corresponde a los vehículos dirigiéndose hacia el centro d , g_a^d y los que se dirigen hacia otros destinos g_{Ra}^d . A éstos últimos se los denominará flujos residuales con respecto al centro d . De esta manera se tiene:

$$g_a^d = G(t_a) - g_{Ra}^d \tag{7}$$

El primer principio de Wardrop ([Sheffi, 1984](#)), también denominado “Equilibrio de usuario” (EU) establece que la trayectoria elegida por un conductor en una red congestionada, en condiciones de equilibrio, es tal que su tiempo de viaje hasta el punto de destino será mínimo. Esto también puede interpretarse como que el tiempo total de viaje entre un punto dado y el punto de destino por cualquier camino realmente utilizado será el mismo (y el mínimo posible). Luego, es posible formular tal principio postulando que el tiempo de viaje desde un punto (x,y) de la red de transporte hacia el destino d será solamente función de la localización del usuario y no de la trayectoria empleada, es decir, es una función potencial.

Luego, el tiempo total de viaje hasta el destino d desde el punto (x,y) se expresa de la siguiente manera:

$$u^d = u^d(x, y) \tag{8}$$

siendo por definición $u^d(x_d, y_d) = 0$, donde x_d e y_d corresponden a las coordenadas del destino d .

En consecuencia, el tiempo de recorrido del tramo para un conductor dirigiéndose hacia un destino d será igual a la diferencia que adopta la correspondiente función potencial en los puntos inicial y final del mismo, i y j respectivamente (Figura 1), es decir:

$$t_a^d = u_i^d - u_j^d, \quad u_i^d > u_j^d \quad (9)$$

donde $u_i^d = u^d(x_i, y_i)$ y de igual manera para u_j^d . Debe observarse que t_a^d es la expresión del tiempo de circulación en el arco a calculado a partir de la función potencial correspondiente al destino d , sin embargo su valor será el mismo cualquiera sea el destino considerado.

Para formular el problema de asignación de tráfico debe considerarse, además de las relaciones previas, la ley de conservación de vehículos, es decir que la cantidad de vehículos entrando y saliendo de un nodo es una cantidad conservativa. Por lo tanto, es posible formular las siguientes ecuaciones de continuidad para cada uno de los nodos de la red.

$$\sum_{i=1}^{M_j} g_a^d \lambda_{ij} + d_j^d = 0 \quad j = 1, 2, \dots, Nn, \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (10)$$

donde d_j^d es la demanda de viajes en el nodo j con destino d (veh/h), M_j corresponde a la cantidad de nodos adyacentes al nodo j , Nn y Nd constituyen el número de nodos y el de destinos respectivamente. El indicador λ_{ij} vale 1 si el flujo va desde i hacia j (flujo entrante) y vale -1 si va en sentido contrario (flujo saliente). Cuando el tramo es unidireccional, con un sentido obligatorio de circulación se notará al mismo como $\bar{\lambda}_{ij}$. Finalmente, sustituyendo (9) en (7) y el resultado en (10) se obtienen las ecuaciones gobernantes del problema:

$$\Psi_j^d(u_i^n) + d_j^d = 0 \quad j = 1, 2, \dots, Nn, \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (11)$$

Si $j \equiv d$, la ecuación correspondiente en (11) debe sustituirse por $u_{j=d}^d = 0$. Debe observarse que en esta formulación el problema de equilibrio de usuario consiste en resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales cuyas incógnitas corresponden a los tiempos de viaje hacia cada destino en cada nodo de la red.

4 SOLUCIÓN ITERATIVA: ENFOQUE PHYSARUM

Existen diferentes maneras de resolver el sistema (11). De hecho se muestra en esta sección que el enfoque Physarum es una de ellas.

Si se multiplica y divide el primer término de (10) por t_a se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_i \frac{g_a^d}{t_a} t_a^d \lambda_{ij} + d_j^d = 0 \quad (12)$$

Debe observarse en (12) que obtenida la solución del problema debe verificarse que $t_a = t_a^d$. Sin embargo, puede ensayarse una solución iterativa aproximando g_a^d con un valor D_a^d y t_a con L_a^d , en cuyo caso, la expresión (12) puede reescribirse como:

$$\sum_i \xi_a^d \frac{D_a^d}{L_a^d} (u_i^d - u_j^d) + d_j^d = 0 \quad (13)$$

Éste, un sistema de ecuaciones lineales para cada destino d . El factor de corrección ξ_a^d que allí figura, se explica más abajo. Una vez resuelto el sistema (13), los flujos en cada tramo a dirigiéndose hacia d pueden ser expresados como (esto se comprende fácilmente comparando (13) con (10)):

$$g_a^d = \xi_a^d \frac{D_a^d}{L_a^d} (u_i^d - u_j^d) \quad (14)$$

Siguiendo la idea del modelo Physarum es posible actualizar la “conductividad” D_a^d de la siguiente manera:

$$D_a^{d,act} = \frac{D_a^d + g_a^d}{2} \quad (15)$$

Por otro lado, después de obtener los flujos totales \bar{g}_a^d y considerando (5) se actualiza el tiempo de recorrido del tramo a de acuerdo al modelo Physarum de la siguiente manera:

$$L_a^{d,act} = \frac{L_a^d + t_a^d(\bar{g}_a^d)}{2} \quad (16)$$

Los flujos g_a^d en la expresión (14) deben respetar el sentido obligatorio de los tramos unidireccionales y además que el tiempo de recorrido sea positivo de acuerdo a (9). Además debe procurarse que el tiempo de recorrido sea mayor o igual al tiempo de corrido a flujo libre t_a^{Libre} . Para asegurar esta consistencia, en el algoritmo iterativo anterior se ha introducido el factor ξ_a^d de la siguiente manera:

$$\xi_a^d = \begin{cases} 1 & \bar{\lambda}_{ij} (u_i^d - u_j^d) > t_a^{Libre} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (17)$$

Como puede observarse, desde este punto de vista, el modelo Physarum corresponde a resolver el EU de acuerdo a la formulación basada en tiempos de viaje (11). Aquí es clara la interpretación de las “presiones” del modelo Physarum como tiempos de viaje hacia diferentes destinos. Esto facilita la generalización de dicho algoritmo a otros problemas de asignación tales como demanda variable, multiclase, etc. En particular en la sección siguiente se adapta el modelo Physarum para resolver problemas de asignación mediante aproximaciones continuas bidimensionales.

5 FORMULACIÓN CONTINUA BIDIMENSIONAL DEL EQUILIBRIO DE USUARIO BASADA EN TIEMPOS DE VIAJE

El problema de equilibrio de usuario planteado involucra en general una gran cantidad de variables para modelar una ciudad completa, por tal motivo es de interés el desarrollo de metodologías que conduzcan a una reducción del número de incógnitas. Una idea propuesta en tal sentido es la formulación continua del equilibrio que fundamentalmente considera a las variables involucradas, en particular tiempos de viajes, como funciones continuas en el espacio bidimensional ocupado por la ciudad. Las ecuaciones resultantes pueden resolverse usando técnicas de elementos finitos donde la discretización puede ser más “gruesa” que la correspondiente a la red real de transporte.

Para obtener tal formulación (Cortínez y Dominguez 2013, 2017) es posible transformar el sistema (10) en una ecuación variacional aplicando el método de Galerkin. Operando se llega a la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} g_a^d \lambda_{ij} \delta u_j^d + \sum_{j=1}^N d_j^d \delta u_j^d = 0 \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (18)$$

donde δu_j denota variación virtual de u_j que verifica la restricción $\delta u_j^d(x_d, y_d) = 0$. Dividiendo la red densa de calles en M celdas como se muestra en la Figura 1a, es posible reescribir la expresión (18) de la siguiente manera:

$$\sum_{m=1}^M \left(- \sum_{a \in m} g_a^d \delta t_a^d + \sum_{j \in m} d_j^d \delta u_j^d \right) = 0 \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (19)$$

Aquí se han utilizado las definiciones de λ_{ij} y t_a^d (expresión (9)). Si se considera que u^d es una función continua de x e y , y además que la longitud del tramo l_a es pequeña frente a las dimensiones de la ciudad, puede expresarse aproximadamente:

$$t_a^d = u_i^d - u_j^d = -l_a \frac{\partial u^d}{\partial s} = -l_a \left(\frac{\partial u^d}{\partial x} \cos \gamma_a + \frac{\partial u^d}{\partial y} \sin \gamma_a \right) \quad (20)$$

Asumiendo que las longitudes que definen cada una de las celdas también son muy pequeñas frente a las dimensiones de la red completa, es posible transformar la expresión anterior en una integral de área. Aplicando cálculo variacional sobre la expresión resultante se obtiene el siguiente problema de contorno:

$$- \left(\frac{\partial f_x^d}{\partial x} + \frac{\partial f_y^d}{\partial y} \right) + q^d = 0, \quad f_x^d n_x + f_y^d n_y \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad u^d(x^d, y^d) = 0 \quad (21 \text{ a-c})$$

donde:

$$f_x^d = -K_{xx}^d \frac{\partial u^d}{\partial x} - K_{xy}^d \frac{\partial u^d}{\partial y}, \quad f_y^d = -K_{xy}^d \frac{\partial u^d}{\partial x} - K_{yy}^d \frac{\partial u^d}{\partial y} \quad (22)$$

Los coeficientes de permeabilidad de la red de tráfico K_{ij}^d son funciones que dependen de la estructura de cada celda (orientación, sentido y longitud de calles) y de las propias funciones u^d (Cortínez y Dominguez 2013, 2017), mientras que q^d es la demanda de viajes por unidad de área hacia el destino d . Es posible simplificar las conductividades asumiendo condiciones isotrópicas de la red llegando a las siguientes expresiones (similares a las de la teoría de Sasaki et al., 1990):

$$K_{xx}^d = K_{yy}^d = K^d = \frac{|\mathbf{f}^d|}{c}, \quad K_{xy}^d = 0, \quad c = \alpha + \beta \sum_r |\mathbf{f}_r|^\gamma \quad (23 \text{ a-c})$$

donde c es el tiempo de viaje por unidad de longitud y α , β y γ dependen de la estructura de la red.

6 ENFOQUE PHYSARUM PARA LA FORMULACIÓN CONTINUA

Es posible utilizar el enfoque Physarum expuesto en la sección 4 a la formulación continua presentada en la sección 5. Si bien se puede aplicar al caso general anisótropo, se explica el enfoque utilizando la forma simplificada (23) (Sasaki et al., 1990):

$$\operatorname{div}(K^d \nabla u^d) + q^d = 0, \quad \mathbf{f}^d = -K^d \nabla u^d \quad (24 \text{ a,b})$$

$$D^{d,act} = \frac{D^d + |\mathbf{f}^d|}{2}, \quad L^{d,act} = \frac{L^d + c^{d,act}}{2}, \quad K^{d,act} = \frac{D^{d,act}}{L^{d,act}} \quad (25 \text{ a-c})$$

El enfoque Physarum corresponde a efectuar aproximaciones iniciales para $|\mathbf{f}^d|$ y entonces obtener K^d de acuerdo a (23) (a la aproximación corriente de c^d se la denomina L^d). Posteriormente se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales linealizadas (24) y sus correspondientes condiciones de borde. Con los u^d obtenidos se calculan $|\mathbf{f}^d|$ (24b) y se actualizan D^d (25a). Con los $|\mathbf{f}^d|$ calculados puede determinarse $c^{d,act}$ (23c), luego $L^{d,act}$ (25b) y finalmente el nuevo valor del coeficiente de permeabilidad actualizado $K^{d,act}$ (25c). El algoritmo se itera hasta lograr la convergencia.

7 EJEMPLOS NUMÉRICOS

A efectos de ilustrar numéricamente las posibilidades del enfoque analizado se considera una ciudad de 792 km^2 con demandas distribuidas hacia 2 centros de destino q^1 y q^2 . La forma de la ciudad y los puntos de destino se muestran en las Figuras 2 y 3. El problema de asignación de tráfico para la situación comentada se realiza mediante la formulación continua en su versión simplificada (24). Para definir el tiempo de recorrido por unidad de longitud se utilizan los coeficientes $\alpha = 0,0167$ que corresponde a una velocidad a flujo libre de 60 km/h , $\beta = 2,1 \times 10^{-6}$ y $\gamma = 1,2$. Se han contemplado dos casos particulares: a) demanda fija con

$$q^1 = 80 \text{ viajes/km}^2 \text{ y } q^2 = 60 \text{ viajes/km}^2 \text{ y b) demanda variable } q^1 = \frac{80e^{-5u_1}}{e^{-5u_1} + e^{-5u_2}} \text{ y}$$

$$q^2 = \frac{60e^{-5u_2}}{e^{-5u_1} + e^{-5u_2}} \text{ hacia los centros 1 y 2 respectivamente. El algoritmo seguido se}$$

corresponde con el enunciado en las ecuaciones (24-25). Para cada iteración el problema (24a) se resuelve con el método de elementos finitos. La convergencia se controla por los

indicadores $\left(\left(\int_A u^d dA \right)^{n+1} - \left(\int_A u^d dA \right)^n \right) / \left(\int_A u^d dA \right)^{n+1}$ para los tiempos de viaje y

$\left(\left(\int_A q^d dA \right)^{n+1} - \left(\int_A q^d dA \right)^n \right) / \left(\int_A q^d dA \right)^{n+1}$ para la demanda en el caso b). Cuatro iteraciones

son suficientes para alcanzar la convergencia, la que se obtiene en 6 segundos para la demanda fija y en 10 segundos para el caso de demanda variable. Es interesante aclarar que para el caso de demanda variable en cada iteración debe actualizarse la demanda de acuerdo a las funciones u^d obtenidas en el paso anterior.

En la **Figura 2a** se aprecian los resultados obtenidos para los tiempos de viaje desde cada punto de la ciudad hasta los correspondientes destinos para los casos a) y b). En la **Figura 2b** se muestran los valores de demanda para los mismos casos. Se puede apreciar la correspondencia entre los valores de demanda y de tiempos de viaje.

En la **Figura 3a** se muestra el diagrama vectorial de flujo vehicular hacia el centro 1 para el caso 1. Es de interés mencionar que también se ha calculado el problema a partir de un enfoque Newton-Raphson obteniendo resultados consistentes con los del enfoque Physarum con un tiempo ligeramente superior (**Figura 3b**). De hecho, para el presente ejemplo las dos metodologías han demostrado una convergencia muy rápida.

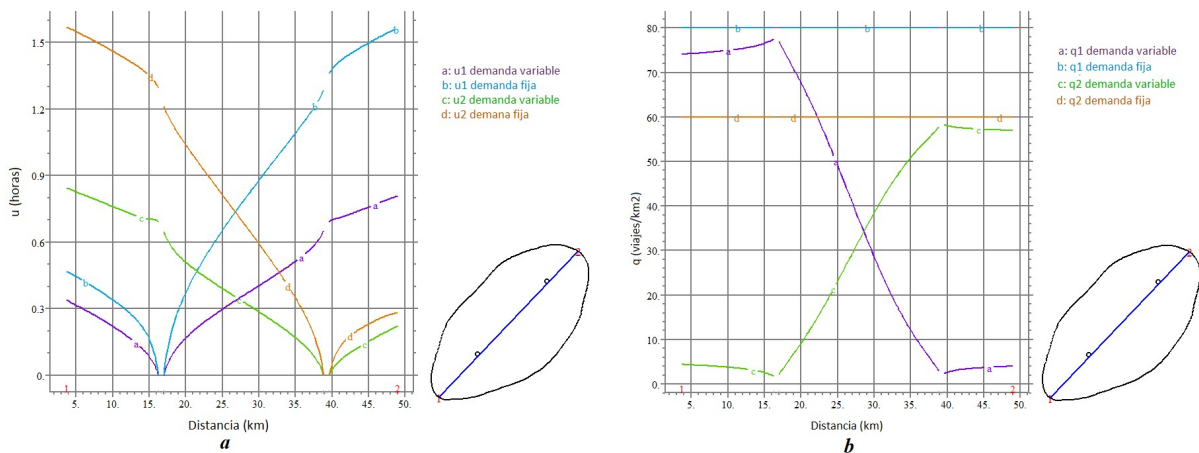


Figura 2: a) Tiempo de viaje hacia los destinos 1 y 2, b) demanda de viajes hacia ambos destinos

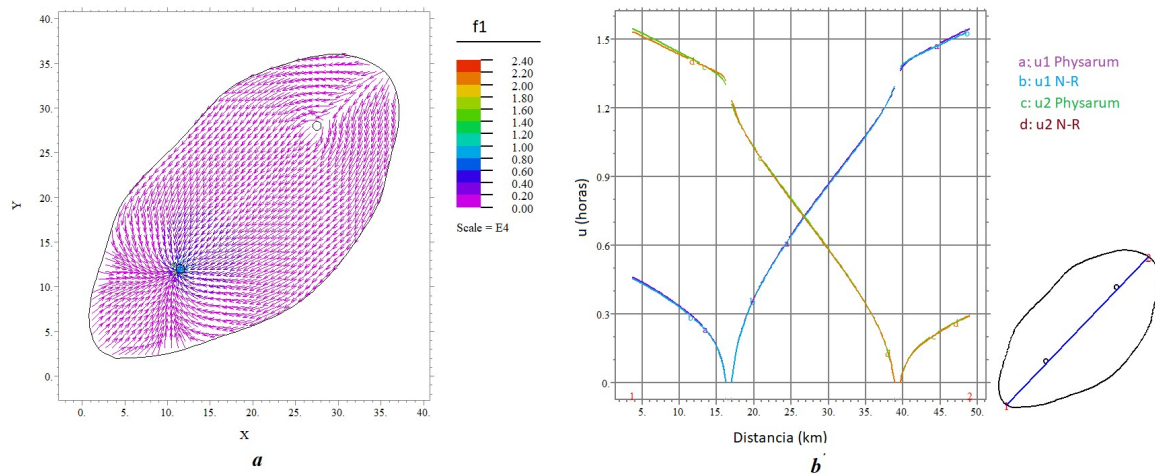


Figura 3: a) Diagrama vectorial de flujo hacia el centro 1 para el caso 1; b) comparación entre el enfoque de cálculo Physarum y el método de Newton-Raphson.

8 CONCLUSIONES

Se ha presentado una reinterpretación del algoritmo Physarum para resolver el problema de equilibrio de usuario. Se muestra que dicho modelo puede ser considerado como una forma de resolver de manera iterativa el sistema algebraico no lineal gobernante del problema de asignación de tráfico según la formulación en tiempos de viaje. La presente formulación muestra el verdadero sentido físico de las presiones hidrodinámicas ficticias empleadas en el enfoque Physarum clásico. Con esta interpretación la extensión del Physarum a problemas generalizados a problemas de equilibrio de usuario es directa. En particular se lo aplicó exitosamente en un problema planteado de acuerdo a una formulación continua bidimensional.

Si bien el enfoque Physarum ha demostrado buena eficiencia comparada con métodos clásicos tales como el FW, CFW y BFW queda por investigar si la eficiencia corresponde específicamente a dicho algoritmo o a la formulación del problema EU como un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de acuerdo a la formulación en tiempos de viaje. Esto se realizará en trabajos futuros.

REFERENCIAS

- Cortínez, V. H. y Dominguez, P. N. An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling* 50, 340-353, 2017.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P. N. Un modelo de difusión anisótropa para el estudio del tráfico urbano. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 29(1), 1-11, 2013.
- Dominguez, P. N.; Vidal, M. y Cortínez, V. H., Diseño óptimo de redes de transporte urbano considerando aspectos medioambientales. *Mecánica Computacional* Vol. XXVIII, 2599-2624, 2009.
- Lotito, P. Issues in the implementation of the DSD algorithm for the traffic assignment problem. *European Journal of the Operation Research* 175: 1577-1587, 2006.
- Sasaki, T., Iida, Y., Yang, H. User equilibrium traffic assignment by continuum approximation of network flow. *Actas del 11th International Symposium of Transportation and Traffic Theory*, Yokohama, Japan, pp. 233-252, 1990.
- Sheffi, Y., *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1984.
- Tero, A. Kobayashi, R. and Nakagaki, T. A mathematical model for adaptive transport network in path finding by true slime mold. *Journal of theoretical biology* 244, 553-564, 2007.
- Xu, M., Chen, A. and Gao, Z. An improved origin-based algorithm for solving the combined distribution and assignment problem. *European Journal of Operation Research* 188, 354-369, 2008.
- Xu, S, Jiang, W, Deng, X and Shou, Y. *A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem*. *Applied Mathematical Modelling* 55, 340-353, 2018.
- Zhang, X. A bio-inspired approach to traffic network equilibrium assignment problem. *IEEE Transactions on cybernetics*, 1304-1315, 2018.