

DETECCIÓN DE MICRO MASAS BASADO EN LAS VIBRACIONES LIBRES DE MICRO VIGAS

MICRO MASSES DETECTION BASED ON FREE VIBRATIONS MICRO BEAMS

Graciela I. Guerrero^a, Daniel H. Felix^a y Diana V. Bambill^{a,b}

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
dhfelix@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, graisague@hotmail.es*

Palabras clave: micro viga, masa, frecuencia, teoría Modificada de la Tensión de Cupla

Resumen. El trabajo muestra cómo la existencia de micro masas adosadas a microvigas produce alteraciones en los valores de las frecuencias naturales. Estas micro estructuras son de uso frecuente en micro sensores. A su vez la capacidad de detectar cambios de masa en una microviga posibilita la implementación de varios tipos de sensores químicos y biológicos. El análisis se centra en los estudios de micro vigas Bernoulli-Euler cantiléver. Se realiza un estudio de las vibraciones libres de vigas a escala micrométrica, mediante una formulación variacional basada en el principio de la mínima energía. Para capturar efectos a pequeña escala se utiliza la teoría Modificada de la Tensión de Cupla. El método permite determinar la variación de los coeficientes de frecuencia ante la presencia de distintas masas ubicadas en diferentes posiciones. Las frecuencias naturales obtenidas se compararon con algunos resultados disponibles en la bibliografía y con los de la teoría de elasticidad clásica, que no considera el efecto de escala.

Key words: micro beam, mass, frequency, modified couple stress theory

Abstract. This work shows how the existence of micro masses attached to micro beams produces variations in the natural frequencies of the microbeam. These microstructures are often used in micro sensors. Inertial sensors are used in a variety of applications, including pressure sensors and accelerometers. In addition, the ability to detect mass changes in a microbeam allows the implementation of various types of chemical and biological sensors. This analysis focuses on Bernoulli-Euler Cantilever microbeam studies. A study of beam-free vibrations is carried out at a micrometric scale, using a variational formulation based on the principle of minimum energy. The modified couple stress theory is used to capture small-scale effects. The method allows determining the variation of the frequency coefficients in the presence of different masses located in different positions. The natural frequencies obtained were compared with some results available in the literature and with those of the classical elasticity theory, which does not consider the effect of scale.

1 INTRODUCCIÓN

En la escala micrométrica se utilizan diferentes dispositivos compuestos por microvigas, como por ejemplo los micro sensores de detención de masas. Se analiza la influencia de una o varias micro masas adosadas a una microviga en el cálculo de vibraciones libres. Se presenta una microviga cantiléver como se indica en la [Figura 1](#), de longitud L , área $A=bh$, con una micro masa M^* adosada a una distancia x_0 del empotramiento. Se aplica la Teoría Modificada de la Tensión de Cupla, (MCST) ([Yang et al., 2002](#)) a una microviga Bernoulli-Euler para capturar el efecto de escala y se utiliza el método de Ritz para plantear una solución aproximada para la elástica que describe el movimiento vibratorio.

En los últimos quince años se publicaron numerosos estudios sobre análisis de vibraciones libres en microvigas utilizando la MCST ([Park et al., 2006](#)), ([Asghari et al, 2010](#)), ([Ma te al., 2008](#)), ([Ghayesh et al., 2012](#)), ([Sahmani et al., 2013](#)). Entre ellos se destacan los de ([Kong et al., 2008, 2009](#)), allí se concluyó en que la diferencia de las frecuencias naturales halladas por la teoría clásica y aquellas que predice la MCST es significativa cuando las dimensiones de la viga son comparables con el parámetro de escala de longitud propia del material.

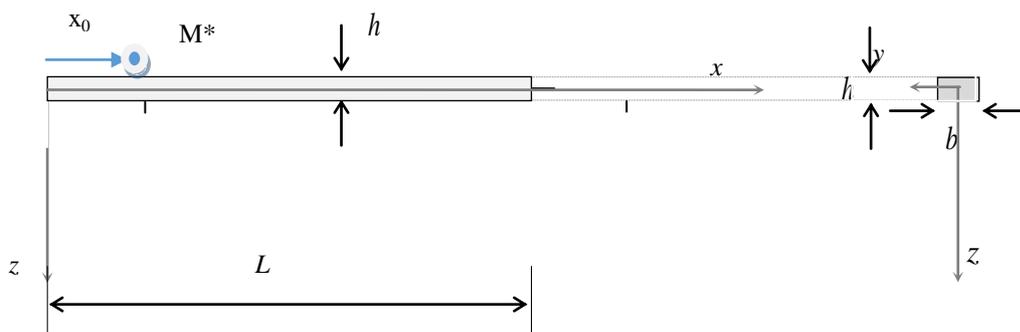


Figura 1: Microviga cantiléver con micro masa adosada.

2 TEORÍA MODIFICADA DE LA TENSIÓN DE CUPLA (MCST)

El análisis micro elástico de una viga se hace necesario cuando sus dimensiones se miden en micrómetros. La MCST permite capturar el efecto de escala porque describe un comportamiento más real del material que modifica entre otras cosas su rigidez a la flexión. Esta teoría para describir la energía interna de la microviga, incorpora un término además del clásico, que tiene en cuenta el efecto de una micro rotación independiente generando tensiones de cupla. Dicho término adiciona una constante de longitud de escala l_2 y por lo tanto además de las constantes de ([Lamé, 1866](#)) aparece en la expresión de la energía interna una nueva constante, en la relación constitutiva de orden superior. ([Yang et al., 2002](#)) propusieron un modelo no local en el cual el tensor de tensión de cupla es simétrico.

2.1 Formulación

Para un material elástico lineal isótropo, ocupando un dominio en el espacio de tres dimensiones V , se plantea la energía interna de deformación U de una microviga, de acuerdo a la MCST ([Akgöz y Civalek, 2013](#)), que consta de dos términos, el primero que corresponde a la teoría clásica y el segundo debido a las tensiones de orden superior.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij}^{(S)} \chi_{ij}^{(S)}) dV. \quad (1)$$

siendo

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} && \text{Tensor de Tensiones Clásico} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) && \text{Tensor de Deformaciones Clásico} \\ m_{ij}^{(S)} &= 2l_2^2 \mu \chi_{ij}^{(S)} && \text{Tensor de Tensiones de Cupla Desviador Simétrico} \\ \chi_{ij}^{(S)} &= \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) && \text{Tensor de Curvatura Simétrico} \\ \theta_i &= \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} && \text{Vector de rotación} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} && \text{Primera constante de Lamé} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} && \text{Segunda constante de Lamé o módulo de elasticidad transversal} \end{aligned}$$

V es el volumen de la microviga, E el módulo de elasticidad longitudinal, ν coeficiente de Poisson, δ_{ij} delta de Kronecker, e_{ijk} tensor de Levi-Civita, l_2 constante de longitud de escala del material. El campo de desplazamientos es el siguiente:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = u(x,t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} && \text{corrimiento axial según el eje } x \\ u_2(x,t) = v(x,t) &= 0 && \text{corrimiento según el eje } y \\ u_3(x,t) = w(x,t) &= w && \text{corrimiento transversal según el eje } z \\ \Theta_2(x,t) &= \theta_2 && \text{microrotación independiente según el eje } y \end{aligned} \quad (2)$$

3 CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES

Para calcular las frecuencias naturales se minimiza la energía total π del sistema microviga-micro masa, expresada por la ecuación (3), suma de la energía interna propia de la microviga U y la energía cinética T .

$$\pi = U + T. \quad (3)$$

3.1 Energía interna de deformación de la microviga

Se obtienen las componentes no nulas de los tensores que intervienen en el cálculo de la energía interna U . Del tensor de deformaciones clásico se obtiene:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

del tensor de tensiones clásico:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sigma_{11} = -(\lambda + 2\mu) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\lambda z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

del vector rotación:

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \Rightarrow \theta_i = \left[0, -\frac{\partial w}{\partial x}, 0 \right] \quad (6)$$

del tensor de curvatura simétrico:

$$\chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \chi_{12}^{(s)} = \chi_{21}^{(s)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

del tensor de cupla desviador y simétrico:

$$m_{ij}^{(s)} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^{(s)} \Rightarrow m_{12}^{(s)} = m_{21}^{(s)} = -\mu l_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

Reemplazando en la ecuación (1) de la energía interna propia de la microviga se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2m_{12}^{(s)} \chi_{12}^{(s)}) dV \quad (9)$$

Expresada en función de los corrimientos la ecuación (9) es:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L ((\lambda + 2\mu)I + \mu l_2^2 A) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L J \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (10)$$

con $dV = dA \times dx$; e $I_y = \int_A z^2 dA$, momento de inercia con respecto al eje baricéntrico y J se define como la constante de rigidez a la flexión de la microviga, que puede expresarse en función de las constantes elásticas de Lamé, λ y μ , Timoshenko and Goodier, (1970), o de las constantes ingenieriles E y ν . Para una sección rectangular se expresa como:

$$J = (\lambda + 2\mu)I + \mu A l_2^2 = \frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(12I/h^2)l_2^2}{2(1+\nu)} \quad (11)$$

donde $R = \frac{J}{EI} = \left[\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \left(\frac{l_2}{h} \right)^2 \frac{6}{(1+\nu)} \right]$ es un número que depende de las constantes de

longitud de escala l_2 , del coeficiente de Poisson ν y de la altura h de la microviga, es decir depende de características físicas del material y geométricas de la viga. Se observa que si el valor de l_2 es despreciable y se puede considerar nulo, J se reduce a la rigidez a flexión de una viga clásica.

3.2 Energía cinética

La energía cinética se asume como la de una viga clásica y en este caso particular en que actúa una masa M^* sobre la micro viga considerada, se evalúa la influencia de la misma sobre los coeficientes de frecuencia al actuar en diferentes posiciones a lo largo de la microviga. La energía de deformación propia de la microviga no se ve influenciada ya que M^* es una masa rígida que se apoya sobre la microviga, y por lo tanto no incrementa su masa propia. Si se considera una masa M^* en posición x_0 $[0, L]$, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M^* \left(\frac{\partial w(x_0,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (12)$$

donde ρ es densidad del material por unidad de longitud y t es la variable tiempo.

3.3 Energía total

Reemplazando en la ecuación (3) por las ecuaciones (10) y (12) se obtiene la expresión de la energía total del sistema:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EIR \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M^* \left(\frac{\partial w(x_0,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (13)$$

Asumiendo un movimiento armónico se propone una solución para describir el desplazamiento transversal de la microviga para cualquier sección y en cualquier instante de tiempo t , de la forma

$$w(x,t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (14)$$

donde $W(x)$ es una función nodal que representa la amplitud del desplazamiento transversal y ω es la frecuencia circular natural de vibración transversal en radianes por segundo. Reemplazando en la ecuación (13) se obtiene:

$$\pi = \frac{e^{i2\omega t}}{2} \left(\int_0^L EIR \left(\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^L \rho A (i\omega)^2 W(x)^2 dx + M^* (i\omega)^2 W(x_0)^2 \right) \quad (15)$$

El sistema de ecuaciones que permiten hallar los autovalores del problema a partir del principio de mínima energía, está dado por:

$$\delta\pi = 0 \quad (16)$$

Se resuelve mediante el método de Ritz.

4 MÉTODO DE RITZ

Se asume una elástica $W(x)$ como se indica en la ecuación (14), que se adimensionaliza, de modo que:

$$x = \bar{x}L$$

$$W(x) = \bar{W}(\bar{x})L \square \sum_{k=1}^n C_k \bar{W}_k(\bar{x})L \quad (17)$$

Multiplicando por L/EI ambos miembros y reemplazando en la ecuación (15) por la ecuación (17):

$$\pi \frac{L}{EI} = \frac{e^{i2\omega t}}{2} \left\{ \int_0^1 R \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 d\bar{x} - \Omega^2 \left(\int_0^1 \bar{W}^2 d\bar{x} - \frac{M^*}{\rho AL} (\bar{W}(\bar{x}_0))^2 \right) \right\} \quad (18)$$

es posible obtener la expresión del coeficiente de frecuencia natural Ω

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}} \quad (19)$$

Se minimiza la energía total con respecto a las constantes desconocidas que acompañan a la solución aproximada propuesta de manera que se debe cumplir:

$$\frac{\partial \pi}{\partial C_j} = 0 \quad (20)$$

Así se genera el sistema

$$[[\mathbf{K}] - \Omega^2 [\mathbf{M}]] = 0 \quad (21)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez y \mathbf{M} la matriz de masa cuyos coeficientes son:

$$k_{ij} = R \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{W}_i}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{W}_j}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} \quad (22)$$

$$m_{ij} = \int_0^1 \bar{W}_i \bar{W}_j d\bar{x} + \frac{M^*}{\rho AL} \bar{W}_i(\bar{x}_0) \bar{W}_j(\bar{x}_0)$$

5 CONDICIONES DE BORDE

Se adopta como elástica adimensional a:

$$\bar{W}(\bar{x}) \square \sum_{k=1}^n C_k (\bar{x})^{(k-1)} \bar{\psi}(\bar{x}) \quad (23)$$

con $\bar{\psi}(\bar{x})$ función de forma, polinomio de cuarto grado. Para calcular las constantes del polinomio que describe la elástica aproximada se aplican las siguientes condiciones de borde:

$$\left. \frac{\partial \bar{\psi}_1(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = 0 ; \quad \bar{\psi}_1(0) = 0 ; \quad \left. \frac{\partial \bar{\psi}_1^2(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right|_{\bar{x}=1} = 0 ; \quad \left. \frac{\partial \bar{\psi}_1^3(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3} \right|_{\bar{x}=1} = 0. \quad (24)$$

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

La [Tabla 1](#) muestra comparaciones de los valores de los coeficientes de frecuencia natural de casos disponibles en la literatura. En la [Tabla 1](#), se presentan en primer lugar los primeros seis coeficientes de frecuencia natural para una microviga sin masa adosada, considerando la aproximación, $(\lambda + 2\mu)I \square EI$, para parámetros de escala $l_2/h=0, 0.5, 1$ y 2 , utilizando la teoría modificada de tensión de cupla. Y en segundo lugar, los primeros seis coeficientes para viga con una masa adosada en $\bar{x}_0=1, M^*/(\rho AL)=1$, en la que no se considerara el efecto de escala (teoría clásica de la elasticidad) para un coeficiente de Poisson $\nu=0$.

La [Figura 2](#) se refiere al caso de la micro masa ubicada en la mitad de la luz, $\bar{x}_0=0,50$. Se observa que para esta posición de la micro masa, al ser coincidente con un punto nodal de las

frecuencias tercera y quinta, respectivamente, la variación del tamaño de la micro masa no produce cambio en los valores de Ci , es por ello que $C_3=C_5=1$.

$\frac{l_2}{h}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	
	$\frac{M^*}{\rho AL}=0$						
	$\nu=0.30$						
0	3.5160	22.0345	61.6972	120.9031	199.9427	302.3309	Presente trabajo
	3.5160	22.0345	61.6972	-	-	-	Akgöz et al. (2013)
	3.51601	-	-	-	-	-	Bambill et al. (2016)
0.5	5.1601	32.3378	90.5468	177.4373	293.4375	443.7056	Presente trabajo
	5.1601	32.3378	90.5468	-	-	-	Akgöz et al. (2013)
	5.16009	-	-	-	-	-	Bambill et al. (2016)
1	8.3318	52.2147	146.2027	286.5017	473.8024	716.4327	Presente trabajo
	8.3318	52.2147	146.2027	-	-	-	Akgöz et al. (2013)
	8.33182	-	-	-	-	-	Bambill et al. (2016)
2	15.5110	97.2057	272.1787	533.3669	882.0600	1333.7556	Presente trabajo
	15.5110	-	-	-	-	-	Bambill et al. (2016)
	$\frac{M^*}{\rho AL}=1$						
	$\nu=0$						
0	1.5573	16.2501	50.8958	105.1984	179.2941	274.26855	Presente trabajo
	1.5573	16.2501	50.8958	105.198	179.232	-	Maiz et al. (2006)
	1.5573	16.2501	50.8958	105.206	179.239	-	Rossit et al. (2001)

Tabla 1: Primeros seis coeficientes de frecuencia de una microviga cantiléver sin y con masa adosada para distintos parámetros de escala l_2/h , con $\lambda + 2\mu \ll EI$.

La Figura 3 presenta gráficos similares para la masa ubicada en la posición a dos tercios del empotramiento de la viga, $\bar{x}_0=0,75$; y la Figura 4 muestra el efecto de la micro masa actuando directamente en el extremo libre de la viga cantiléver, $\bar{x}_0=1$.

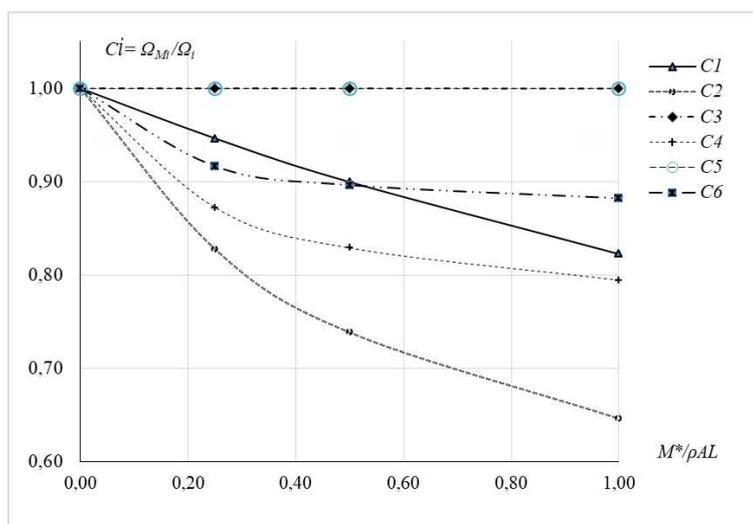


Figura 2: $Ci = \frac{\Omega_{Mi}}{\Omega_i}$ para microviga cantiléver, micro masa en $\bar{x}_0=0.5$, $l_2/h=1$. $J = EI \left(\frac{(1-\nu)+6(1-2\nu)(l_2/h)^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)$

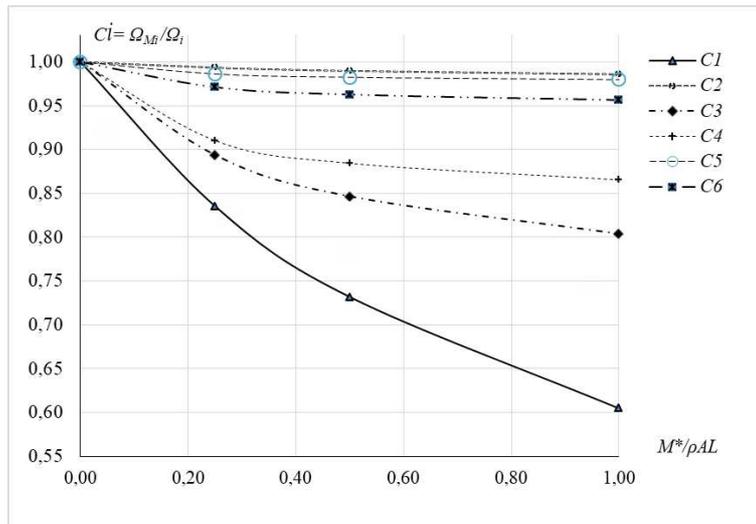


Figura 3: $Ci = \frac{\Omega_{Mi}}{\Omega_i}$ para microviga cantilévér, micro masa en $\bar{x}_0 = 0.75$. $l_2/h=1$. $J = EI \left(\frac{(1-\nu)+6(1-2\nu)(l_2/h)^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)$

6.1 Ejemplo numérico N° 2

El primer ejemplo consiste en una microviga cantilévér con tres micro masas de igual tamaño ubicadas, una en la mitad de la luz, otra a dos tercios del empotramiento y la tercera coincidente con el borde libre. Ver Figura 5. El valor del coeficiente de Poisson se adoptó en $\nu=0.30$.

En la Figura 6, se presenta graficada la relación Ω_{Mi} / Ω_i , en función del tamaño de las tres micro masas dadas por la relación: $M^*/\rho AL = 0, 0.25, 0.5$ y 1 . Se adopta un parámetro de escala $l_2/h=1$.

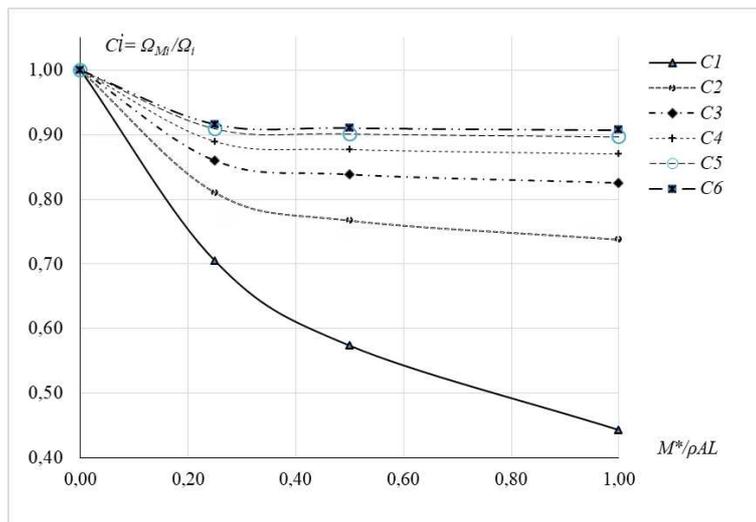


Figura 4: $Ci = \frac{\Omega_{Mi}}{\Omega_i}$ para microviga cantilévér, micro masa en $\bar{x}_0 = 1$. $l_2/h=1$. $J = EI \left(\frac{(1-\nu)+6(1-2\nu)(l_2/h)^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)$

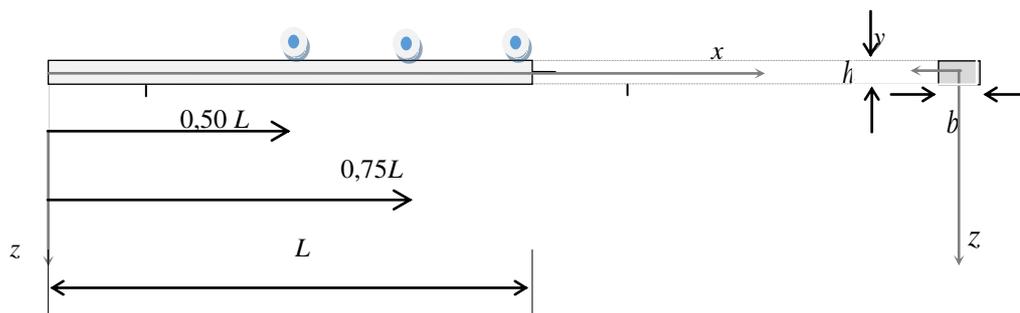


Figura 5: Microviga cantiléver con tres masas adosadas.

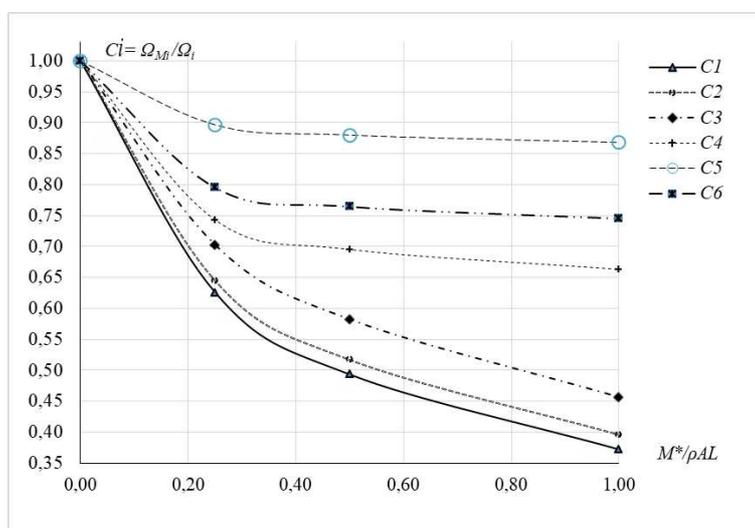


Figura 6: $Ci = \frac{\Omega_{Mi}}{\Omega_i}$ para microviga cantiléver con tres micro masas iguales ubicadas en $\bar{x}_{01} = 0,5$;

$$\bar{x}_{02} = 0,75 \text{ y } \bar{x}_{03} = 1. \quad l_2/h = 1. \quad J = EI \left(\frac{(1-\nu)+6(1-2\nu)(l_2/h)^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)$$

7 CONCLUSIONES

Del análisis realizado se desprende:

Para todas las posiciones de la micro masa consideradas, a medida que aumenta el tamaño de la micro masa disminuye la relación $Ci = \Omega_{Mi} / \Omega_i$, que indica lo esperado, esto es la merma de la frecuencia a medida que aumenta la cantidad de micro masa adosada.

En todos los casos se cumple que a medida que aumenta la micro masa disminuye el coeficiente de frecuencia. En particular cuando la micro masa se ubica en la mitad de la luz, la relación C_1 , disminuye en forma proporcional; y la relación Ci coincide para el tercer y quinto coeficiente de frecuencia y además se cumple que $Ci = 1$, para estos dos casos se observa que $C_2 < C_4 < C_6 < C_5$.

Para la micro masa ubicada a tres cuartos de la luz, se cumple que $C_2 < C_4 < C_6 < C_5$. Para $\bar{x}_0 = 1$ la relación decrece ordenadamente, a menor coeficiente de frecuencia, menor valor de la relación Ci .

Para la micro masa ubicada en el extremo, se cumple que a mayor coeficiente de frecuencia

mayor valor de la relación C_i . Es decir $C_1 < C_2 < C_3 < C_4 < C_5 < C_6$.

En el caso de las tres masas iguales adosadas a la microviga, el comportamiento es similar al caso de una sola masa adosada en el extremo libre.

El comportamiento evidencia el efecto de escala como sucede para todas las vigas de escala microscópica.

8 AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería, a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC) así como al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) bajo cuyo auspicio se desarrolló el presente trabajo.

REFERENCIAS

- Akgöz, B., and Civalek, Ö., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory. *Composite Structures*, 98:314-322, 2013.
- Asghari, M., Ahmadian, M.T., Kahrobaiyan, M.H. and Rahaeifard, M., On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Materials & Design*, 31:2324-2329, 2010.
- Bambill, D.V., Guerrero, G.I. and Felix, D.H., Natural vibrations of micro beams with nonrigid supports. *Journal of Vibration and Control*, 1077546315627727, first published on January 29, 2016 doi:10.1177/1077546315627727.
- Ghayesh, M.H., Farokhi, H. and Amabili, M., Nonlinear dynamics of a microscale beam based on the modified couple stress theory. *Composites: Part B*, 50:318-324, 2013.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K., Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, 47:487-498, 2009.
- Kong S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K., The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams. *Int. J. Eng. Sci.*, 46:427-437, 2008.
- Lamé, G.L., Leçons sur la théorie mathématique de l'Élasticité. *Gauthier-Villars*. Paris, 1866.
- Ma, H.M., Gao, X.L. and Reddy, J.N., A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379-3391, 2008.
- Maiz, S., Influencia de la inercia rotacional de una masa sobre las vibraciones transversales libres de elementos estructurales considerando diversas condiciones de apoyo. *Tesis de Magister en Ingeniería*, 2006.
- Park, S. K. and Gao, X.L., Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16:2355-2359, 2006.
- Rossit, C.A. y Laura, P.A.A., Free vibrations of a cantilever beam with a spring-mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, 28:933-939, 2001.
- Sahmani, S., Ansari, R., Gholami, R. and Darvizeh, A., Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites: Part B*, 51:44-53, 2013.
- Timoshenko, S., and Goodier, J.N., Theory of elasticity. *McGraw-Hill*, New York, 1970.
- Yang, F., Chong, A.C.M., Lang, D.C.C. and Tong, P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 39:2731-2743. 2002.