

INESTABILIDAD DE ENTRAMADOS: UNA OPCIÓN ALTERNATIVA DE CÁLCULO

FRAMEWORKS INSTABILITY: AN ALTERNATIVE CALCULATION OPTION

Héctor D. Martín^a, Marcelo T. Piován^b, Claudio N. Maggi^a, Nicolás Martín Gutbrod^a y
Marcos N. Peresón^a

^a*Grupo de Diseño Mecánico, GRUDIM, Facultad Regional Reconquista de la UTN. Calle 44 n° 1000, Reconquista, Santa Fe, Argentina, hmartin@frrq.utn.edu.ar.*

^b*Facultad Regional Bahía Blanca – UTN. 11 de abril 461 (8000) Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina.*

Palabras clave: Cargas críticas, Series de Potencias, pórticos.

Resumen. En el presente trabajo se aborda el problema de segundo orden de entramados planos, realizándose un estudio indirecto de la inestabilidad estructural, mediante el empleo de series de potencias. Cuando el estado de cargas, al menos teóricamente, se aproxima por debajo del valor crítico, la presente teoría dará lugar a deformaciones más allá de las admisibles. En la resolución se parte de plantear las ecuaciones diferenciales en los desplazamientos axial y transversal, que rigen el equilibrio de cada elemento recto junto con las condiciones de vinculación a tierra y de continuidad en cada nodo (3 de tipo geométrico y 3 de equilibrio local), donde los efectos flexo-axiales se acoplan. Vale aclarar que en lugar de trabajar con ecuaciones diferenciales no lineales, se efectúa un proceso iterativo, donde en cada paso se mantienen constantes los esfuerzos axiales que produce la linealización del proceso. Tras pocas iteraciones y relativamente poco tiempo de cálculo, la solución se completa. Tres ejemplos confirmarán lo expuesto.

Keywords: Critical loads, Power Series, Frameworks

Abstract. In the present work the second order problem of flat frameworks is addressed, making an indirect study of the structural instability, using powers series. When the load state, at least theoretically, approaches below the critical value, the present theory will give rise to deformations beyond the admissible ones. The resolution is based on the differential equations in the axial and transverse displacements, which govern the equilibrium of each straight element together with the conditions of connection to ground and continuity in each node (3 of geometric type and 3 of local equilibrium), where the flexo-axial effects are coupled. It is worth clarifying that instead of working with non-linear differential equations, an iterative process is carried out, where in each step the axial forces produced by the linearization of the process are maintained constant. After few iterations and relatively little calculation time, the solution is completed. Three examples will confirm the above.

1 INTRODUCCIÓN

Las series de potencias se utilizan desde hace mucho tiempo en la resolución de ecuaciones diferenciales, por lo que no es única su aplicación a entramados. A continuación se realiza una breve recopilación de algunos trabajos, referentes a la utilización de esta solución en problemas especiales de la ingeniería estructural. Se comentan a continuación algunos trabajos en sobre inestabilidad en entramados. En una publicación (Flipich et. al 2003) se utilizan las series de potencias enteras para abordar el problema del pandeo de pórticos planos, llegando a conocer las cargas críticas para las cuales se inestabiliza el sistema, o bien cuando el equilibrio estable se transforma en inestable. Se presenta una solución en serie de potencias por medio de un algoritmo sistemático de recurrencia (Filipich - Bambill 2004), que permite analizar la inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados. Se muestra la ventaja de simular con precisión arbitraria la forma modal trascendente de cada tramo, aún con variación continua de sección. Estos mismos autores, en el año 2005, extienden el uso de las series de potencias en una dimensión, a través de un método variacional directo, con la utilización de series de potencias en 2 dimensiones. Se resuelven problemas planos de inestabilidad del equilibrio (abolladura), donde a los dominios planos rectangulares cargados, se les agrega refuerzos parciales arbitrarios que incrementan la carga crítica.

En los últimos años se han presentado varias investigaciones en el cálculo de pórticos utilizando diversos métodos. Se realiza continuación una breve recopilación de los mismos. Hay un trabajo (Zhang H. et. al 2011) que estudia el fenómeno de pandeo utilizando el método de elementos de cuadratura en entramados planos. Este método comienza con la aproximación de los integrandos en la formulación variacional de un problema. No se fijan ni los nodos ni el número de nodos en un elemento en cuadratura, se ajustan de acuerdo a la necesidad de convergencia. Se muestra que el método propuesto es adecuado para el análisis de pandeo de estructuras planas con secciones transversales variables o constantes. En otro estudio (Lee K. et.al 2011) se presenta el análisis de post pandeo en un pórtico espacial semi-rígido elasto-plástico con rotación finita. Los elementos son de secciones transversales simétricas y con uniones semirrígidas. Se considera el efecto de las fuerzas axiales sobre el momento flector y el pandeo lateral. Se tienen en cuenta las ecuaciones eulerianas para una viga-columna con rotación finita. Los efectos de inclinación, se adoptan para un sistema elástico y luego son extendidos a un sistema inelástico con el concepto de bisagra de plástico. Se realizan análisis de pandeo no lineal y pandeo elasto-plástico para el pórtico espacial, a los fines de demostrar el potencial del método desarrollado en términos de precisión y eficiencia. Existe un trabajo (Rezaiee-Pajand M., et. al 2015) en el que los autores analizan el pandeo de pórticos de acero con miembros cónicos y conexiones flexibles. El método se basa en encontrar las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales gobernantes para la estabilidad de un pórtico con elementos de sección doble T. Para varios casos particulares, comúnmente utilizados, se estudian las influencias de diferentes variables. Entre ellas: el factor de forma, la relación de conicidad, la relación de luz, la flexibilidad de las conexiones, las restricciones elásticas de rotación y traslación en la carga crítica, además del correspondiente coeficiente de longitud efectiva equivalente.

Cuando una estructura con esfuerzos axiales es analizada con teoría de segundo orden, significa que se plantea el equilibrio en su posición deformada. El problema es no lineal (Bleich, F., 1952). Las restantes hipótesis del análisis lineal se mantienen: linealidad mecánica y cinemática. Se recuerda que, y con el propósito de aclarar el desarrollo, la teoría de segundo orden constituye la búsqueda de esfuerzos, desplazamientos y deformaciones. En tanto el estudio lineal de la inestabilidad del equilibrio propiamente dicho consiste en un problema

clásico de autovalores. Por lo tanto, la teoría de segundo orden debe considerarse como un estudio indirecto de la inestabilidad estructural. En efecto, cuando el estado de cargas, al menos teóricamente, se aproxima por debajo, al crítico, la presente teoría dará lugar a deformaciones más allá de las admisibles. Como es sabido, la pieza se flexiona (comúnmente, se pandea o se comba) mucho antes del estado crítico.

En la resolución se parte de plantear las ecuaciones diferenciales en los desplazamientos axial y transversal, que rigen el equilibrio de cada elemento recto junto con las condiciones de vinculación a tierra y de continuidad en cada nodo (3 de tipo geométrico y 3 de equilibrio local), donde los efectos flexo-axiales se acoplan.

Vale añadir una aclaración adicional. En lugar de trabajar con ecuaciones diferenciales no lineales, ya que el esfuerzo axial de cada barra depende de la derivada del desplazamiento axial y que multiplica a la derivada segunda del desplazamiento transversal, se efectúa un proceso iterativo, donde en cada paso se mantienen constantes los esfuerzos axiales que produce la linealización del proceso. Tras pocas iteraciones, los esfuerzos normales en pasos sucesivos no se modifican (el error aceptado se fija) y la solución se completa.

Cabe consignar que la consideración de los esfuerzos axiales, dentro de la ecuación diferencial del desplazamiento flexional, pueden dar lugar a que se tengan desplazamientos estructurales significativos, que una teoría de primer orden no detectaría.

2 ECUACIONES GOBERNANTES DEL PROBLEMA

El pórtico se encuentra en un sistema de coordenadas de referencia X-Y como se muestra en la Figura 1-a, con la siguiente nomenclatura: nb es la cantidad total de barras; nn es el número total de nodos; j es el subíndice que denota la barra ($j = 1, 2, \dots, nb$); i es el subíndice que denota el nodo ($i = 1, 2, \dots, nn$). Las características de cada barra j son las siguientes: a_j es la longitud, E_j es módulo de Young; F_j es el área; J_j es el momento de inercia; α_j es el ángulo entre la barra j y el eje de abscisas; $\alpha_{j,k}$ es el ángulo entre la barra j y la barra k . El sistema de coordenadas globales es X-Y y la coordenada local de la barra j es x_j .

Para el estudio energético se considera que cada punto, tendrá un desplazamiento transversal $v_j(x_j)$ y un desplazamiento axial $u_j(x_j)$, como se muestra en la Figura 1-b. En los lugares donde existen esfuerzos concentrados es necesario crear un nodo i . Estos esfuerzos son: H_i (horizontal), V_i (vertical) y μ_i (momento aplicado), considerándolos positivos como se indica en la Figura 1-a. Además, $q_j(x)$ es la carga transversal distribuida es la que se encuentra en la barra j .

Para todo este desarrollo se admite que la carga axial distribuida es nula. Eventualmente, en el caso de necesitar considerarlas, es necesario subdividir el tramo y colocar cargas nodales equivalentes.

Al realizar un estudio energético del entramado, se consideran las siguientes:

a) La energía U de deformación (1), que tiene en cuenta los aportes flexional (debido al momento) y axial (debido al esfuerzo normal) para cada barra j :

$$U = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{nb} \left[\int_0^{a_j} \frac{M^2(x_j)}{E_j J_j} dx_j + \int_0^{a_j} \frac{N^2(x_j)}{E_j F_j} dx_j \right] \right) \quad (1)$$

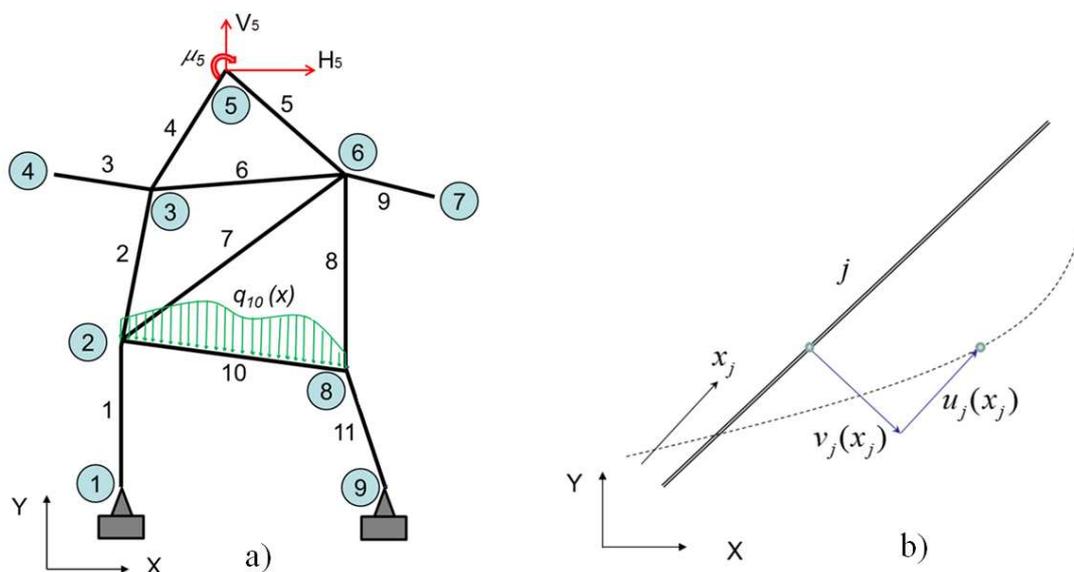


Figura 1: a) esquema general de un entramado con cargas concentradas en el nodo 5, transversales distribuidas en la barra 10, b) desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j .

b) La energía G aportada por el efecto de segundo orden se muestra en la expresión (2) y corresponde a los esfuerzos axiales N_j en las barras, los que se suponen constantes en cada iteración (N_j de compresión es positivo), vale:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nb} N_j \int_0^{a_j} (v_j'(x_j))^2 dx_j \quad (2)$$

c) La energía S es la debida a los esfuerzos puntuales aplicados en el nodo i . En esta expresión (3), el subíndice j se refiere a la barra j sobre la cual se proyectan los esfuerzos horizontal H_i y vertical V_i , siendo α el ángulo entre la barra y el sistema global de coordenadas, C_α y S_α son los valores de coseno y seno de α correspondientemente.

$$S = \sum_{i=1}^m \left\{ H_i [C_\alpha u_j(x_j) + S_\alpha v_j(x_j)] + V_i [S_\alpha u_j(x_j) - C_\alpha v_j(x_j)] + \mu_i v_j'(x_j) \right\} \quad (3)$$

d) La energía T , expresada en (4), es la debida a las cargas transversales $q_j(x)$, a lo largo de cada barra j del entramado:

$$T = \sum_{j=1}^{nb} \left(\int_0^{a_j} q_j(x_j) v_j(x_j) dx_j \right) \quad (4)$$

e) La energía total W del conjunto estructural, correspondiente a los aportes de todas las energías anteriores:

$$W = U - G - S - T \quad (5)$$

Debiéndose cumplir que:

$$\delta(U - G - S - T) = 0 \quad (6)$$

Reemplazando las expresiones (1 a 4) en la (5), y luego aplicando (6), resultan las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y se indica a continuación:

$$E_j J_j v_j''''(x_j) + N_j v_j''(x_j) = q_j(x_j) \quad E_j F_j u_j''(x_j) = 0 \quad (7)$$

Para la solución de las ecuaciones diferenciales (7), se propone pasar a coordenadas adimensionales, utilizando el siguiente cambio de variables:

$$0 \leq x_j \leq a_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x_j}{a_j} \leq 1 \quad \xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad (8)$$

De esta manera las ecuaciones que gobiernan el problema resultan ser:

$$\boxed{v_j''''(\xi_j) - \frac{q_j(\xi_j)}{J_{4,j}} + \frac{N_j v_j''(\xi_j)}{a_j^2 J_{4,j}} = 0} \quad \boxed{u_j''(\xi_j) = 0} \quad (9)$$

Desde aquí en adelante la comilla, indicada en (9), se refiere a la derivada respecto de la nueva variable definida en (8), además:

$$J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{a_j^4} \quad (10)$$

Se utiliza un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, con las siguientes expresiones (Filipich C. P et al 2003 y Filipich C.P et al 2004):

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (11)$$

Luego de derivar y reemplazar en las ecuaciones diferenciales (9), se deben igualar los coeficientes de la misma potencia en ambos desarrollos. Las expresiones para la recurrencia que se obtienen son las siguientes:

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i} - \frac{N_j}{a_j^2} \varphi_{2,i} A_{j,i+2}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = 0 \quad (12)$$

Siendo $\varphi_{k,i} = (i+k)!/k!$. Como puede apreciarse en las ecuaciones (12), se vinculan los coeficientes $A_{j,i+4}$ con los $A_{j,i}$ lo que resulta que en cada barra solo hay 6 incógnitas, a saber: $A_{j,0}$, $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, $A_{j,3}$, $B_{j,0}$ y $B_{j,1}$. Luego se plantea en cada nodo, a los fines de resolver el entramado, condiciones de compatibilidad geométricas y de equilibrio, que relacionan los coeficientes de una de las barras con las otras que arriban al mismo nodo.

3 PROGRAMA DE CÁLCULO CON TEORÍA DE SEGUNDO ORDEN

Para un estado de carga definido, como se ha dicho, se trata de un problema no lineal, llevado a una iteración de un problema lineal, considerando los esfuerzos axiales constantes en cada iteración. En el programa elaborado, primero se calcula la estática para un estado inicial de cargas, ingresando una subrutina que almacena los valores de los esfuerzos normales obtenidos al calcular el entramado. Se inicia el proceso con valores arbitrarios de los esfuerzos axiales en las barras. Esto es lo que se utiliza como semilla del estado de carga fijado.

En cada iteración, se toman los esfuerzos normales de todas las barras hallados en la pasada anterior. Esos esfuerzos normales son los N_j con los que se vuelve a correr el

programa, teniendo en cuenta las expresiones halladas para la recurrencia en (12). Con un estado de cargas, se realiza la iteración hasta que se estabilizan los esfuerzos normales en las barras. En ese momento es posible concluir que se ha encontrado la solución elástica utilizando la teoría de segundo orden con series de potencias para ese estado de cargas. El diagrama de flujo se muestra en la Figura 2.

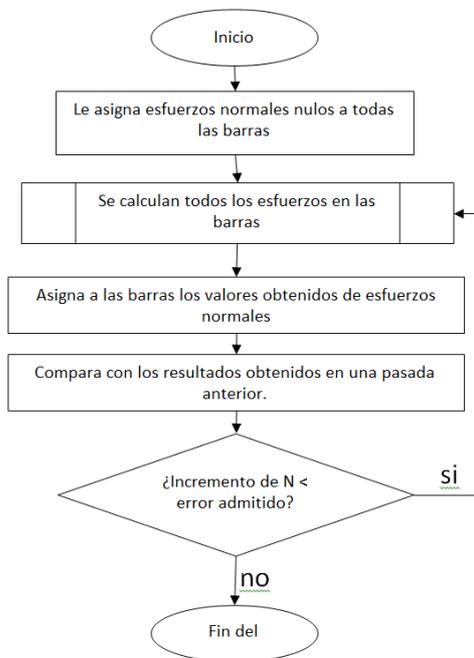


Figura 2: Diagrama de flujo para el cálculo utilizando teoría de segundo orden.

Si el propósito es acercarse a un estado más próximo al que provoca la inestabilidad del equilibrio o estado crítico, es necesario comenzar a incrementar el valor de todas las cargas externas al entramado multiplicándolas por algún factor previamente ingresado (fac) mayor a uno ($fac > 1$). Con fines de controlar lo que sucede con las elásticas, es necesario almacenar en un vector, el valor del desplazamiento en algún punto del entramado (denominado punto D), para cada cambio en los valores de las cargas. Se continúa con este proceso, chequeando el aumento en el valor del desplazamiento en ese punto D del entramado. En el momento en que estos desplazamientos superan las tolerancias preacordadas, es señal que el proceso se está por terminar, ya que muy próximo se encuentran los valores críticos. Es posible continuar el acercamiento a este estado de inestabilidad, disminuyendo el factor que incrementa las cargas, y continuar con el proceso iterativo. El proceso indicado puede o no ser convergente, en función de las características geométricas y mecánicas del pórtico, como así también de la magnitud del estado inicial de cargas escogidas o de los valores de incremento de carga elegidos. Cuando se superan las cargas críticas, el proceso es divergente.

4 EJEMPLOS

A continuación se muestran tres ejemplos simples a los cuales es posible arribar a su estado crítico mediante desarrollos teóricos. Se comparan los resultados con los que se obtienen al utilizar las series de potencias, indicando encada caso el error respecto al valor teórico y la cantidad de incógnitas del problema al utilizar series de potencias.

4.1 Caso 1

Se considera la columna de la Figura 3-a, de longitud $a_1 = 6 \text{ m}$ y en la parte superior un voladizo con largo $a_2 = 0,5 \text{ m}$, módulo de elasticidad de las dos barras $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y momento de inercia $J = 0,0036 \text{ m}^4$.

La solución teórica para el corrimiento transversal de la barra 1 es la siguiente:

$$v_1(x) = -\frac{m}{k^2} \operatorname{tg}(k a_1) \operatorname{sen}(k x) - \frac{m}{k^2} \cos(k x) + \frac{m}{k^2 \cos(k a_1)} \quad (13)$$

Donde:
$$m = \frac{P a_2}{E J} \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{P}{E J} \quad (14)$$

Cuando $ka_1 \rightarrow \pi/2$ entonces $v_1(x) \rightarrow \infty$ de allí es posible encontrar la carga crítica que resulta ser:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{(2 a_1)^2} = 5,18154 \times 10^7 \text{ N} \quad (15)$$

El correspondiente momento en la base aumenta considerablemente a medida que nos acercamos a este valor de carga, como se observa en la Figura 3-b, en el que se utilizó una carga suficientemente grande pero menor a la crítica, $P = 4.8756 \times 10^7 \text{ N}$. En la Figura 3-c, se muestra el incremento de la carga hasta aproximarse al valor que inestabiliza la estructura, en función del número de iteración en el programa. Para este ejemplo, la resolución con series de potencias se realiza con seis incógnitas. Si el proceso continúa, al superar la carga crítica comienzan los errores numéricos.

$$P = 5.17942 \times 10^7 \text{ N} < P_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{(2 a_1)^2} = 5,18154 \times 10^7 \text{ N} \quad (16)$$

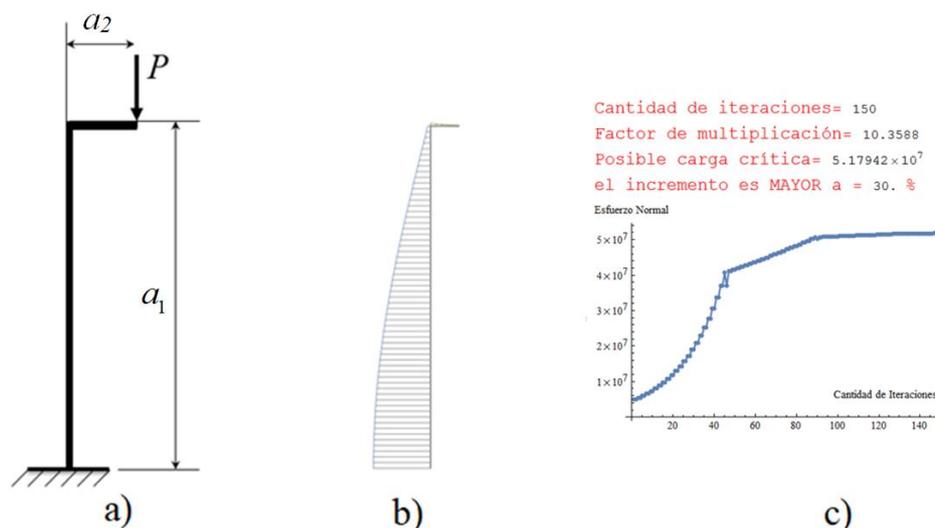


Figura 3: a) Esquema de la columna empotrada con carga en voladizo, b) diagrama de momentos obtenidos con series, c) valores de cargas en función de las iteraciones del programa.

4.2 Caso 2

Se trata de un pórtico biempotrado de tres barras con dos cargas puntuales, extraído de la bibliografía (Iyengar, N. G. R, 1988) que se observa en la Figura 4-a, en donde la longitud de las barras son: $a_1 = a_3 = 3 \text{ m}$, $a_2 = 4 \text{ m}$, el momento de inercia $J_1 = J_2 = J_3 = J = 0,0036 \text{ m}^4$ y el módulo de elasticidad $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. La ecuación trascendente es la siguiente:

$$\frac{k a_1}{\text{tg}(k a_1)} = -\frac{6 a_1 J_2}{a_2 J_1} \quad \text{con} \quad k^2 = P/E J_1 \quad (17)$$

y se satisface con $P_{cr} = 5.74478 \times 10^8 \text{ N}$

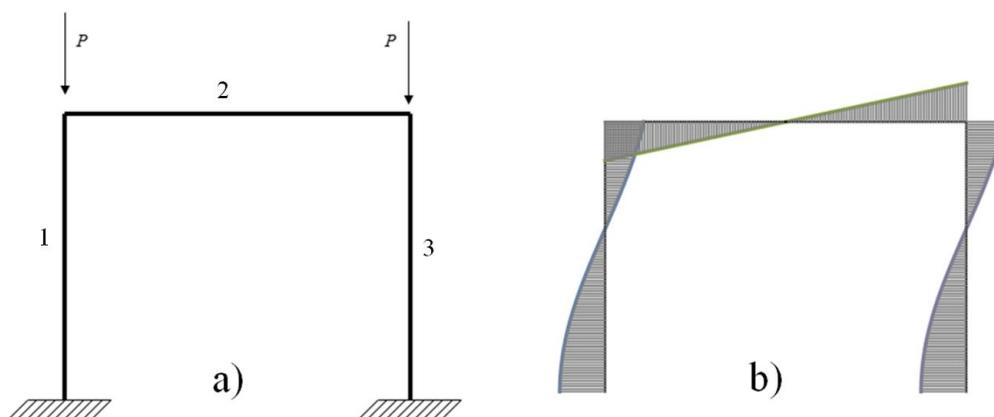


Figura 4 a) pórtico biempotrado de tres barras, con cargas puntuales, b) diagrama de momentos.

Al resolverlo con el cálculo iterativo utilizando series de potencias de grado 30, se le coloca una pequeña carga perturbadora horizontal en uno de los nodos superiores, de esta manera, pasados ciertos valores se llega a una carga $P = 5.69021 \times 10^8 \text{ N}$, 1% menor a la teórica, previa a provocar la divergencia, obteniéndose el diagrama de momento, que se muestran en la Figura 4-b. Se observa que el valor hallado es el que provoca la deformada no simétrica, debido a que se le ha agregado una perturbación horizontal. En este ejemplo, al utilizar series, la cantidad de incógnitas es solamente seis.

4.3 Caso 3

En el caso de un marco cerrado que también lo provee la literatura (Iyengar, N. G. R, 1988) como el de la Figura 5-a con las siguientes características geométricas y mecánicas: $a_j = 3 \text{ m}$, ($j = 1, 2 \text{ y } 3$), $J_j = J = 0,0036 \text{ m}^4$, $E_j = E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

En este caso, la raíz mínima de la ecuación trascendental da la carga crítica:

$$\frac{\text{tg } \lambda}{\lambda} = -\frac{a_1 J_2}{J_1 a_2} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{P}{E J_1}} \quad P_{crit} = 16.47 \text{ EJ}/a_1^2 \quad (18)$$

Con estos valores, la ecuación (18) se satisface con $P_{cr} = 1.38348 \times 10^9 \text{ N}$. Utilizando series se logra aproximarse, con 50 iteraciones, hasta el valor: $P = 1.3862 \times 10^9 \text{ N}$, con 0.2 % de error, como se puede observar en la Figura 5-b.

Para el caso que $a_1 = a_3 = 3 \text{ m}$ y $a_2 = a_4 = 4 \text{ m}$, la carga crítica es $P_{cr} = 8.29047 \times 10^8 \text{ N}$. Con series de potencias, colocando un pequeño momento en uno de los nodos superiores, como para provocar una deformada no simétrica, se controla el desplazamiento transversal en

el medio de una de las barras verticales y se llega a valores de $P = 8.166 \times 10^8 \text{ N}$, con un error cercano al 1.5%.

En la Figura 5-b se observa una gráfica de salida en el programa, elaborado utilizando series de potencias, con nueve incógnitas, en donde es posible indirectamente encontrar el valor de la carga crítica. La aproximación con este procedimiento es siempre por debajo al valor dado por la expresión teórica (18).

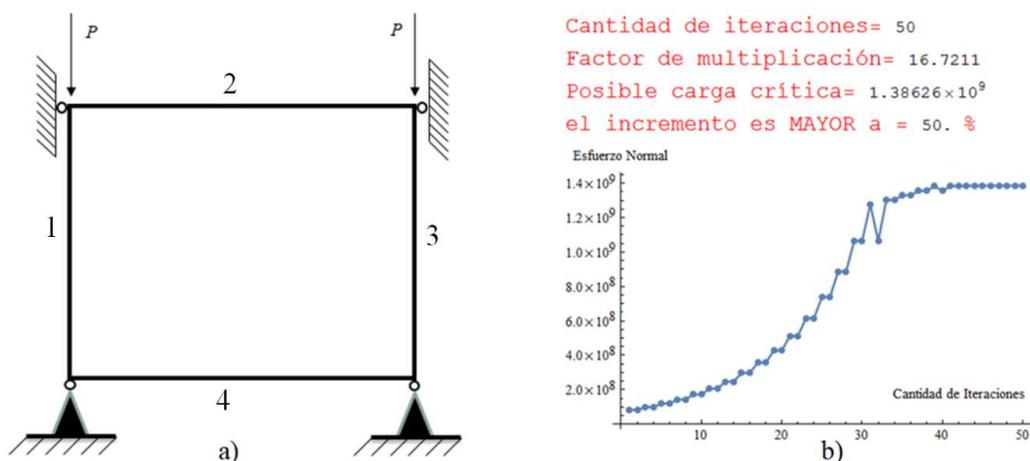


Figura 5 a) Marco cerrado, b) Gráfico donde se muestra de que manera, indirectamente, es posible encontrar el valor de la carga crítica.

5 CONCLUSIONES

Las soluciones están completamente basadas en el uso de series infinitas de potencias enteras y comparadas con soluciones analíticas exactas extraídas de la literatura. Las series infinitas, para ser aplicadas, deben ser truncadas. La exactitud de los resultados está supeditada al grado de la serie que se adopte, de manera que siempre está la posibilidad de mejorar los mismos, aumentando simplemente el número de términos de las series, y así lograr la precisión en dígitos requerida. Otra forma lograr mayor precisión es aumentando el número de iteraciones. En ambos casos, con esta metodología, se mejora la precisión sin aumentar el número de incógnitas. En los tres ejemplos aquí presentados, la precisión de los resultados logrados ha sido muy buena, comparadas con los valores teóricos resultan ser, a lo sumo, con errores del 1.5 %. Los mismos se han obtenido con una cantidad de términos que no ha superado el grado 30 en los polinomios de las series. La recurrencia que se plantea, logra una reducción notable en la cantidad de incógnitas al compararla con otros métodos, siendo ésta una ventaja importante del método propuesto.

REFERENCIAS

- Bleich, F. Buckling Strength of Metal Structures, *McGraw-Hill*, New York, 1952.
- Filipich C. P., Bambill E. A., Rosales M. B., Pandeo de pórticos planos. Uso sistemático de series de potencias, ENIEF 2003, *Mecánica computacional*, Vol. XXII, pág. 454-468. Bahía Blanca, noviembre de 2003.
- Filipich C. P., Bambill E. A., Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados uso sistemático de series de potencias. *Mecánica Computacional* Vol. XXIII. G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Editores) Bariloche, Argentina. Noviembre 2004.

- Filipich C. P., Bambill E. A., Rosales M. B., Pandeo de pórticos planos. Uso sistemático de series de potencias, ENIEF 2003, *Mecánica computacional*, Vol. XXII, pág. 454-468. Bahía Blanca, noviembre de 2003.
- Filipich C. P., Bambill E. A., Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados uso sistemático de series de potencias. *Mecánica Computacional* Vol. XXIII. G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Editores) Bariloche, Argentina. Noviembre 2004.
- Filipich C. P., Bambill E. A.. Estados planos de tensiones en dominios rectangulares con rigidizadores parciales utilizando series de potencias. *Mecánica Computacional* Vol. XXIV A. Larreteguy (Editor.). Buenos Aires, Argentina, Noviembre de 2005.
- Iyengar, N. G. R., *Structural Stability of Columns and Plates*, Ellis Horwood Limited, Inglaterra, 1988.
- Lee K. S. and Han S. E., Semi-rigid elasto-plastic post buckling analysis of a space frame with finite rotation, *Advanced Steel Construction* (2011), 7(3), 274-301.
- Rezaiee-Pajand M., Shahabian F. and Bambaeechee M., Buckling analysis of semi-rigid gabled frames, *Structural Engineering and Mechanics* (2015), 55(3), 605-638.
- Zhang H., Zhang R. and Yu H., Buckling analysis of planar frameworks using the quadrature element method, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* (2011). 11, 363-378.