

## MÉTODO EXACTO Y APROXIMADO PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO DE PÓRTICOS PLANOS EN PRESENCIA DE FALLAS

### EXACT AND APPROXIMATE APPROACHES FOR STATIC ANALYSIS OF CRACKED PLANE PORTAL FRAMES

Héctor Martín<sup>a</sup>, Maria A. De Rosa<sup>b</sup>, Maria Lipiello<sup>c</sup> y Nicolás Martín Gutbrod<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Diseño Mecánico (GRUDIM), Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional, Santa Fe, Argentina, hmartin@frrq.utn.edu.ar*

<sup>b</sup>*School of Engineering, Viale dell'Ateneo Lucano 10, 85100 Potenza, Italy*

<sup>c</sup>*Department of Structures for Engineering and Architecture, Forno Vecchio 36, 80134 Naples, Italy.*

**Palabras clave:** Series de Potencias, fallas, pórticos.

**Resumen.** En este trabajo se estudia el análisis estático de los pórticos en presencia de una o más fallas. Se han desarrollado numerosas teorías a lo largo de los años para representar adecuadamente la presencia de grietas. En particular, utilizando las relaciones de la mecánica de fractura, se ha calculado el rendimiento local de la región fracturada. En este estudio, la condición en los límites en el punto en que se encuentra la grieta se ha variado, introduciendo un resorte elástico de rotación. De esta manera la variación de rotación se calcula como la constante del resorte multiplicada por el momento en ese punto. El estudio se lleva a cabo, de manera exacta, planteando el sistema de ecuaciones diferenciales para los desplazamientos transversales y axiales del pórtico y buscando las incógnitas asociadas, en presencia de cargas distribuidas, fuerzas concentradas o pares, y en modo aproximado utilizando series de potencia. En todos los casos, se proporcionan diagramas de desplazamiento para las variaciones en la posición de las grietas y la relación entre la altura de la grieta y la altura de la viga. El método aproximado proporciona excelentes resultados en comparación con el método exacto.

**Keywords:** Power series, cracks, portal frame.

**Abstract.** The present paper focuses on the static analysis of the portal frames in presence of multicracks. Over the last decades, in the technical literature various methods were developed to model problems including cracks being the static behaviour of beams and columns more sensitive to the presence of these discontinuities. In particular, applying the fracture mechanics approach, the local yield of the fractured region has been calculated, where each crack is replaced by a corresponding linear rotational spring, connecting two adjacent elastic parts. In this way, the rotation is proportional to bending moment in the crack section. In this paper, the static behavior of the cracked frames is investigated and in order to obtain the deflection pattern of the system the exact and approximate approaches are employed. Applying the exact approach for each column and beam of the frame and in the presence of distributed loads and concentrated forces and moments, the associated unknowns are found by solving the equilibrium equations. Also, in the approximate procedure the power series are applied. In all cases, the displacement diagrams are provided for different cracks position and height ratios between beam and crack. The approximate method provides excellent results in comparison with the exact method.

## 1 INTRODUCCIÓN

El rendimiento de las estructuras, así como su comportamiento estático y dinámico, están muy influenciados por la presencia de grietas, que pueden provocar diferentes tipos y niveles de falla. Una grieta representa físicamente una reducción local de la sección, que corresponde a un aumento de la flexibilidad local o, análogamente, a una reducción de la rigidez local. En los elementos estructurales, las grietas interrumpen la continuidad del ensamblaje, pudiendo alterar las propiedades geométricas de vigas y columnas. El efecto de las grietas ha sido objeto de importantes investigaciones científicas, debido a su relevancia práctica en el comportamiento estático y dinámico de los elementos estructurales, como vigas, marcos, etc. La literatura es muy rica sobre el efecto de la ubicación y profundidad de las grietas. Se han desarrollado enfoques teóricos y experimentales, en presencia de una y varias grietas con diferentes condiciones de contorno. Además, la influencia de las grietas han sido objeto de muchas investigaciones en características dinámicas como las frecuencias naturales o los modos de vibración de las estructuras.

En las últimas décadas, se han adoptado diferentes enfoques analíticos y numéricos para realizar cálculos precisos de los campos de deformación y tensión en estructuras agrietadas, agujereadas o con muescas. Entre estos enfoques están las teorías clásicas de la mecánica de fracturas, el método de elementos finitos, el método de elementos finitos extendidos y el método sin malla.

Respecto a este tema, en el estado del arte, existe un trabajo de revisión de Alijani et al. (2018). En este artículo, los autores informan una revisión coherente pero concisa de la mayor cantidad posible de estas publicaciones, y los principales temas tratados son el modelado y la simulación de pandeo, doblado, vigas agrietadas vibrantes. Además, los autores han investigado el comportamiento estático de las vigas de Euler-Bernoulli agrietadas que descansan sobre una base elástica mediante la implementación de enfoques analíticos, aproximados y numéricos. Uno de los primeros estudios sobre detección de grietas es el de Adams et al. (1979). En su artículo, los autores combinaron la sensibilidad y el método de elementos finitos para determinar la ubicación y la profundidad de la grieta. Yogesh y Katekar (2014) han utilizado un método experimental para estudiar la vibración de una viga en voladizo, con una sola grieta transversal abierta, para diferentes profundidades de la falla y diferentes ubicaciones de la fisura.

Agarwalla y Parhi (2013) han utilizado los métodos experimentales y de elementos finitos para analizar los parámetros modales de la viga en voladizo agrietada. Pratibha et al. (2016) han comparado las tres primeras frecuencias naturales de una viga en voladizo agrietada con otra sin grietas. Barad H. K. et al. (2013) han presentado un método para la detección de grietas en una viga cantilever basado en las mediciones de frecuencias. Elshamy et al. (2018) han investigado la detección de grietas de viga en voladizo por su frecuencia natural, utilizando análisis de elementos finitos y experimentales. La investigación se divide en dos fases. Primero se realiza experimentalmente midiendo la frecuencia natural de una muestra con diferentes anchos y espesores y cambiando el material de la muestra para evaluar los efectos de las dimensiones y del material de la muestra en la reducción de frecuencia natural. La segunda fase es validar los resultados obtenidos de la primera fase.

Muchos investigadores en diferentes análisis han empleado la relación entre la profundidad de la grieta y la rigidez del resorte rotacional. Por ejemplo, Irwin y Kies (1954) han simulado discontinuidades utilizando el modelo de resorte discreto. Palmeri y Cicirello (2011) han investigado el análisis estático de multi grietas en vigas Euler-Bernoulli y Timoshenko utilizando la relación entre la profundidad de la grieta y la rigidez de un resorte rotacional.

Después, aplicando la teoría de viga Timoshenko, Caddemi et al. (2013) propusieron un enfoque novedoso para el análisis dinámico de estructuras aporticadas con una distribución arbitraria de singularidades. En otro artículo de investigación, Caddemi et al. (2013) derivaron la matriz de rigidez de estabilidad en la columna Euler-Bernoulli para el análisis de pandeo de entramados con multigrieta. Varios investigadores han estudiado la vibración libre de una viga agrietada con condiciones de contorno clásico. Por ejemplo, Ali Cagri Batihan et al. (2016) han analizado las vibraciones transversales de vigas agrietadas con secciones transversales rectangulares que descansan sobre un modelo de fundación de Pasternak y bases elásticas generalizadas. La grieta de borde abierto se representa como un resorte rotacional cuyo valor se obtiene mediante la mecánica de fractura y los resultados numéricos de la muestra que se han realizado, mostrando los efectos de la profundidad de la grieta, la ubicación de la grieta, el tipo de cimentación y los parámetros de fundación en las frecuencias naturales de la viga.

## 2 MODELO DE LA GRIETA

En la literatura, muchos estudios han modelado la grieta reemplazándola con un resorte rotatorio interno que conecta dos secciones rectas. El valor de la rigidez se obtuvo mediante el uso de la teoría de la fractura, incluida la deformación de la viga. En particular, Yokoyama et al. (1998) derivan dos relaciones entre el factor de intensidad de la tensión y la rigidez rotacional, descuidando los efectos de corte así como las cargas axiales y torsionales. Los factores de intensidad de tensión se expresan como:

$$K_I = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_M(\xi) \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 0.6 \quad \xi = \frac{a}{h} \quad (1)$$

$$K_I = \frac{3.99 M}{bh \sqrt{h} \sqrt{(1-\xi)^3}} \quad \text{para } 0.6 < \xi \leq 1 \quad (2)$$

$$F_M = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{2}} \frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi \xi}{2}\right)^4}{\cos \frac{\pi \xi}{2}} \quad (3)$$

Para ambas relaciones vale:

$$\frac{1}{k_r} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_I}{M}\right)^2 da \quad (4)$$

Siendo  $b$  la base y  $h$  la altura total de la sección recta,  $a$  es la altura de la grieta,  $E$  es el módulo de Young. La relación (4) representa la transferibilidad rotacional inversa de la rigidez  $k_r$ , función de la geometría y del tipo de material de la sección recta en la grieta, procedimiento que se encuentra explicado por Alijani A. et al (2018).

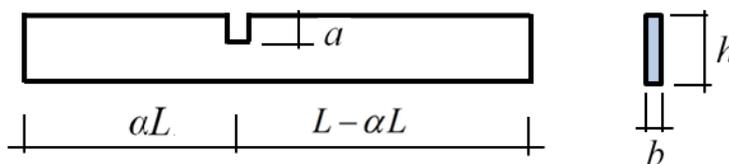


Figura 1: Detalle de la grieta.

La condición en los límites en presencia de la grieta solo cambiará las expresiones de las rotaciones relativas. Como en la grieta se crea una discontinuidad, en referencia a la Figura 1 se tiene:

$$\phi_2(0) - \phi_1(\alpha L) + \psi v_1''(\alpha L) = 0 \tag{5}$$

Con  $\psi = EI_0/k_r$ , siendo  $z$  la abscisa con origen en el extremo izquierdo,  $\phi_1(z)$  la rotación del primer tramo y  $\phi_2(z)$  la rotación del segundo tramo,  $v_1(z)$  el desplazamiento del primer tramo,  $I_0$  el momento de inercia de la sección recta rectangular de altura  $h$  y  $L_1$  el valor de la abscisa en la que se encuentra la grieta.

### 3 MÉTODO DE RESOLUCIÓN EXACTA

Considerando el pórtico de la Figura 2 con sección rectangular de base  $b$  y altura  $h$ , con módulo de Young  $E$ , con una grieta transversal ubicada en una posición arbitraria  $\alpha L$  desde el extremo B de la viga transversal, siendo  $0 < \alpha < 1$ . Las dos columnas tienen diferentes longitudes  $H_1$  y  $H_2$ . Utilizando la teoría exacta de Euler Bernoulli, se estudian los diagramas de desplazamiento de la viga BD de la estructura en presencia de carga constante  $p$ .

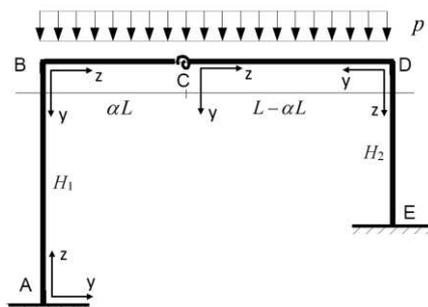


Figura 2: a) Pórtico en estudio con grieta en el punto con convención de signos

De la teoría de Euler Bernoulli para cada barra puede escribir las ecuaciones diferenciales (6) para las columnas AB y DE, y (7) para las barras BC y CD:

$$EI v''''(z) = 0 \quad EI u''(z) = 0 \tag{6}$$

$$EI v''''(z) = p \quad EI u''(z) = 0 \tag{7}$$

Siendo  $v(z)$  y  $u(z)$  las funciones correspondientes a los desplazamientos transversal y axial de las barras, como se indica en la Figura 3 para el caso de la barra  $j$ .

Las soluciones son del tipo:

$$\begin{aligned}
v_{AB} &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3; & u_{AB} &= b_0 + b_1 z; \\
v_{BC} &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \frac{P}{24EI} z^4; & u_{BC} &= d_0 + d_1 z; \\
v_{CD} &= g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \frac{P}{24EI} z^4; & u_{CD} &= h_0 + h_1 z; \\
v_{DE} &= e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3; & u_{DE} &= f_0 + f_1 z;
\end{aligned} \tag{8}$$

Si se considera  $\phi = -v'(z)$ , las condiciones de borde en los extremos A y E vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
u_{AB}(0) &= 0; & v_{AB}(0) &= 0; & \phi_{AB}(0) &= 0; \\
u_{DE}(H_2) &= 0; & v_{DE}(H_2) &= 0; & \phi_{DE}(H_2) &= 0;
\end{aligned} \tag{9}$$

Las condiciones de continuidad geométricas y estáticas en el nodo B son:

$$\begin{aligned}
v_{AB}(H_1) - u_{BC}(0) &= 0; & u_{AB}(H_1) + v_{BC}(0) &= 0; \\
\phi_{AB}(H_1) - \phi_{BC}(0) &= 0; & -t_{AB}(H_1) + n_{BC}(0) &= 0; \\
n_{AB}(H_1) + t_{BC}(0) &= 0; & -m_{AB}(H_1) + m_{BC}(0) &= 0;
\end{aligned} \tag{10}$$

Las condiciones de continuidad geométricas y estáticas en el nodo C son:

$$\begin{aligned}
-v_{CD}(0) + v_{BC}(\alpha L) &= 0; & -u_{CD}(0) + u_{BC}(\alpha L) &= 0; \\
\phi_{CD}(0) - \phi_{BC}(\alpha L) + \Psi v''_{BC} &= 0; & -t_{CD}(0) + t_{BC}(\alpha L) &= 0; \\
-n_{CD}(0) + n_{BC}(\alpha L) &= 0; & -m_{CD}(0) + m_{BC}(\alpha L) &= 0;
\end{aligned} \tag{11}$$

Y estas condiciones de continuidad en el nodo D son:

$$\begin{aligned}
v_{CD}(L - \alpha L) + u_{DE}(0) &= 0; & u_{CD}(L - \alpha L) + v_{DE}(0) &= 0; \\
\phi_{CD}(L - \alpha L) - \phi_{DE}(0) &= 0; & -t_{CD}(L - \alpha L) + n_{DE}(0) &= 0; \\
-n_{CD}(L - \alpha L) + t_{DE}(0) &= 0; & -m_{CD}(L - \alpha L) + m_{DE}(0) &= 0;
\end{aligned} \tag{12}$$

se han tenido en cuenta las siguientes relaciones:

$$m = -EI v''(z); \quad t = -EI v'''(z); \quad n = EA w'(z) \tag{13}$$

#### 4 RESOLUCIÓN UTILIZANDO SERIES DE POTENCIAS

En esta sección se utilizan desarrollos de series de potencias de los desplazamientos axiales y transversales de cada barra a los fines de resolver el pórtico. Se obtienen los diagramas de los esfuerzos y las funciones de desplazamientos axiales y transversales de cada barra (Timoshenko, S.P. -1934; Martín y Filipich, 2012; Martín et al. 2013; Martín, 2014; Martín et al. 2014; Martín et al. 2015).

El método tiene la ventaja que solo es necesaria la continuidad geométrica y estática en cada nodo. El número total de incógnitas es muy bajo y, en general, depende de la cantidad de vínculos a tierra y del número de barras que llegan a los nodos. Para el estudio energético se considera en cada barra  $j$  (de longitud  $l_j$ ) un sistema de coordenadas local  $z_j$  en donde cada punto, tendrá un desplazamiento transversal  $v_j(z_j)$  y un desplazamiento axial  $u_j(z_j)$ , como se

muestra en la Figura 3, para una barra con módulo de elasticidad  $E_j$ , momento de inercia  $J_j$  y área  $F_j$ .

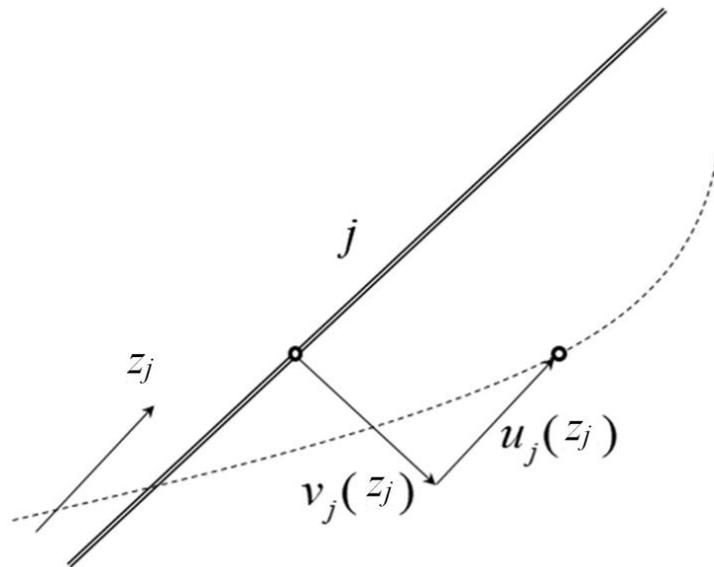


Figura 3: Desplazamientos y coordenadas locales de cada barra  $j$ .

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales (6) y (7), un cambio de coordenadas adimensionales, utilizando el siguiente cambio de variables:

$$0 \leq z_j \leq l_j \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{z_j}{l_j} \leq 1 \quad \zeta_j = \frac{z_j}{l_j} \quad (14)$$

Y un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, con las siguientes expresiones:

$$v_j(\zeta_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \zeta_j^i \quad u_j(\zeta_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \zeta_j^i \quad (15)$$

Luego de derivar y reemplazar en las ecuaciones diferenciales, se debe igualar los coeficientes de igual potencia en ambos desarrollos. Quedando las ecuaciones de recurrencia de la siguiente forma:

$$A_{j,i+4} = \frac{p_{j,i}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = -\frac{q_{j,i}}{F_{1,j} \varphi_{2,i}} \quad (16)$$

Siendo:

$$\varphi_{k,i} = \frac{(i+k)!}{k!} \quad F_{1,j} = \frac{E_j F_j}{l_j} \quad J_{4,j} = \frac{E_j J_j}{l_j^4} \quad (17)$$

En la cual, los coeficientes  $p_{i,j}$  y  $q_{i,j}$  corresponden al grado  $i$  en los desarrollos en series de potencia en la barra  $j$  de las cargas repartidas axial y transversal, respectivamente. Finalmente, a los fines de resolver el problema, se utilizan las condiciones de borde planteadas anteriormente (9) y las condiciones de continuidad geométricas y estáticas (10-12).

## 5 EJEMPLO

Considerando el pórtico de la Figura 2 con  $H_1 = 4$  m,  $L = 5$  m y  $H_2 = 3$  m con sección recta rectangular  $h = 0.4$  y  $b = 0.3$ , el módulo de Young  $E = 30 \cdot 10^9$  N/ m<sup>2</sup> y  $\nu = 0.3$ . Se aplica una carga distribuida transversal constante en toda la viga superior, con valor  $p = 250$  KN/m. Para el caso de la resolución con series de potencias,  $q_{i,j} = 0$  para todos los valores de  $i$  (grados de la potencia) y de  $j$  (número de la barra). En cambio, la carga axial es constante y corresponde a la barra 2, de esta manera que resulta ser  $p_{0,2} = 250$  KN/m. En la Tabla 1 se realiza una primera comparación numérica entre el método exacto y el aproximado de la serie de potencias, calculando el momento en el punto C con  $\alpha = 0.5$ , es decir, en el centro de la viga, ya que la relación varía  $\xi = a/h$ . Como los resultados son coincidentes, solo se ha colocado una columna. Como se puede observar con el aumento de  $\xi$  y, por lo tanto, de la altura de la sección fracturada, también aumenta el coeficiente  $1/k_r$  mientras que el momento en la sección C disminuye.

$\xi = a/h$	M
0.125	396.93
0.25	387.2
0.375	369.61
0.5	339.33
0.6	299.89

Tabla 1: Valor del momento en el punto C al variar la relación  $\xi = a/h$ .

La Figura 3 muestra los diagramas de los desplazamientos en la viga transversal para tres valores de  $\xi = 0.125$ ,  $0.375$  y  $0.6$  cuando la grieta se coloca en el centro de la viga. Los desplazamientos en la sección C aumentan a medida que aumenta la altura de la sección recta afectada por la grieta.

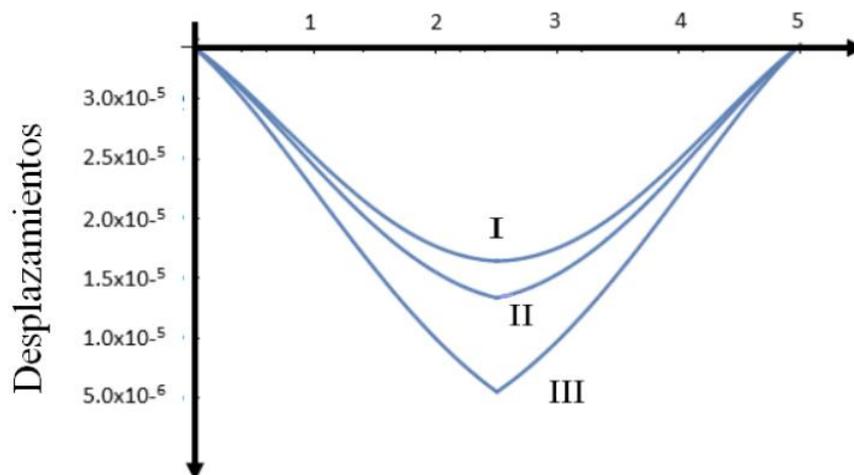


Figura 3: Desplazamientos transversales para  $\alpha = 0.5$  con I)  $\xi = 0.12$ , II)  $\xi = 0.375$  y III)  $\xi = 0.6$

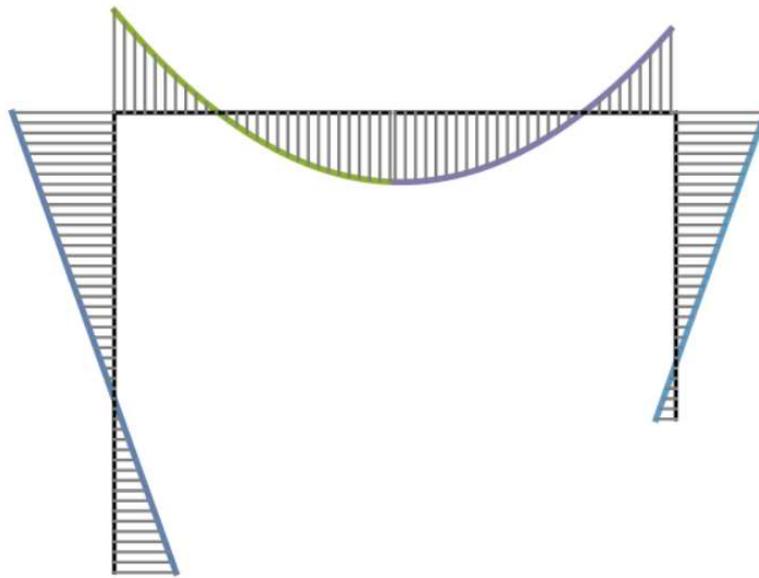


Figura 4: Diagrama de momentos obtenido con series de potencias para  $\alpha = 0.5$  con  $\zeta = 0.12$ .

En las Figuras 5(a-d) se ha variado la posición de la grieta en la viga transversal, ubicándola en las posiciones  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\alpha = 0.7$  y  $\alpha = 0.9$  para las respectivas figuras a, b, c y d. En cada una de estas gráficas se muestra como al cambiar la altura adimensional de la grieta ( $\zeta = 0.125$ ,  $\zeta = 0.375$  y  $\zeta = 0.6$ ) aumentan los desplazamientos transversales de la viga.

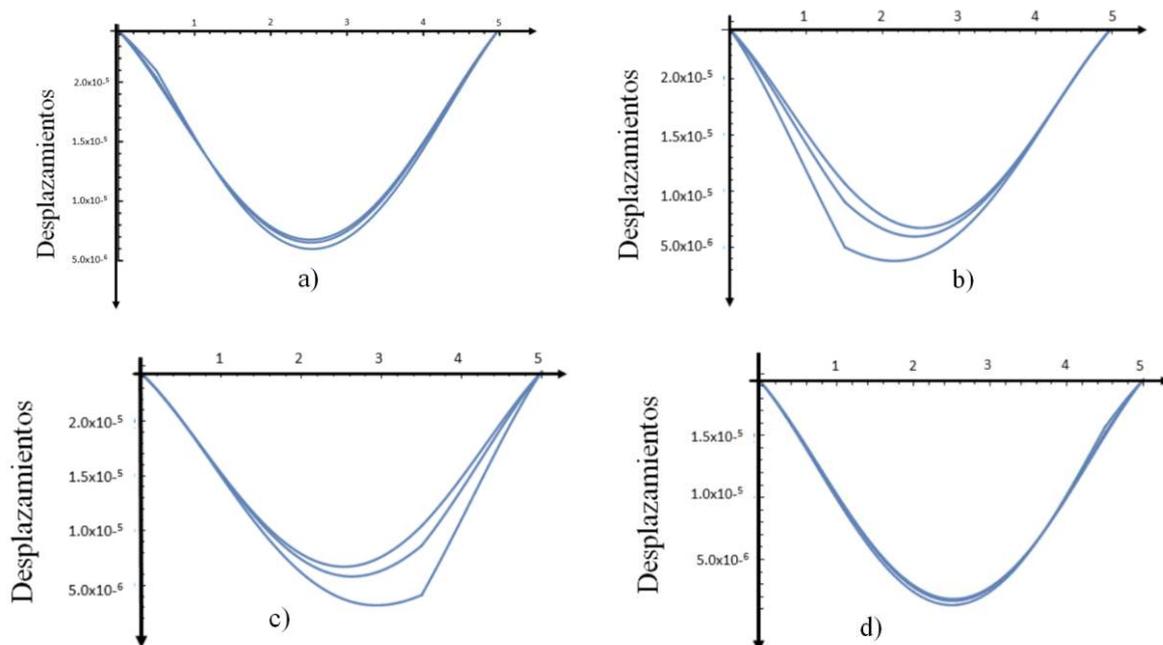


Figura 5: Desplazamientos transversales de la viga superior, con  $\zeta = 0.125$ ,  $\zeta = 0.375$  y  $\zeta = 0.6$  para diferentes posiciones de la grieta: a)  $\alpha = 0.1$ , b)  $\alpha = 0.3$ , c)  $\alpha = 0.7$  y d)  $\alpha = 0.9$ .

## 6 CONCLUSIONES

El objetivo del trabajo es analizar el comportamiento de un pórtico, sujeto a cargas aplicadas, cuando existe alguna grieta en una sección recta. En los métodos utilizados, se ha simplificado el esquema de estudio al introducir una rotación en la posición de la grieta, a los fines de simular la reducción de la sección. Como era de esperar en este tipo de estructuras, al aumentar el tamaño de la grieta se traduce en un aumento de los desplazamientos transversales de la viga. Al utilizar el método de series de potencias, se obtienen idénticos resultados con un número muy bajo de incógnitas totales del pórtico. Para el ejemplo que se muestra, con solamente 6 incógnitas se resuelve, sin importar el grado de la serie de potencia utilizado. Para verificar que el método aproximado de series de potencias puede dar buenos resultados, se procedió al cálculo de los desplazamientos utilizando la teoría de Euler-Bernoulli. En este trabajo se ha comprobado que el método aproximado proporciona resultados coincidentes con los exactos hasta el undécimo dígito decimal. La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales tiene su limitación en el número de incógnitas, de manera que no pueden estudiarse los marcos con una gran cantidad de pisos. En cambio no existe esta limitación si se utiliza el método de series de potencias.

## REFERENCIAS

- Adams RD, Cawley P., The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 14(2), 49–57 (1979).
- Agarwalla D. K., Parhi DR. Effect of Crack on Modal Parameters of a Cantilever Beam Subjected to Vibration. *Procedia Engineering* 51, 665 – 669 (2013).
- Alijani A., Mastan Abadi M, Darvizeh A., Abadi M. Kh. Theoretical approaches for bending analysis of founded Euler–Bernoulli cracked beams. *Archive of Applied Mechanics*. 88, 875-895 (2018).
- Barad H. K., Sharma D. S., Vyas V. Crack detection in cantilever beam by frequency based method. *Procedia Engineering* 51, 770 – 775 (2013).
- Batihán A. C., Fevzi S. K., Vibration Analysis of a Cracked Beam on an Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 16 (5), 1550006 (2016).
- Caddemi S. I., Calì F., Cannizzaro F., Rapicavoli D. A., Novel beam finite element with singularities for the dynamic analysis of discontinuous frames. *Archive of Applied Mechanics*. 83(10), 1451–1468 (2013).
- Caddemi S, Calì I. The exact stability stiffness matrix for the analysis of multi-cracked frame structures. *Computers and Structures*. 125, 137–144 (2013).
- Elshamy M., Crosby W. A., Elhadary M., Crack detection of cantilever beam by natural frequency tracking using experimental and finite element analysis. *Alexandria Engineering Journal* 57, 3755-3766 (2018).
- Irwin G. R., Kies J. A. Critical energy rate analysis of fracture strength. *J. Welding*. 33, 193–198 (1954).
- Martín, H. D. Resolución estática de entramados estructurales aplicando Series de Potencias. *III Jornadas de intercambio y difusión de los resultados de investigación de los doctorandos en ingeniería de la UTN*. Programa: Estructuras civiles. Facultad Regional Mendoza de la UTN. Noviembre de 2014.
- Martín H. D., Filipich, C. P., De Rosa M. A. y Maurizi M. J. Vibraciones naturales de entramados arbitrarios por medio de series de potencias. *IV CAIM 2014 - Cuarto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*. Resistencia, Chaco, del 2 al 5 de setiembre de 2014. ISBN 978 - 987 - 45571 - 0 - 0. Edit. Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del

Nordeste.

- Martín H. D. y Filipich, C. P. Estudio Dinámico de Entramados Planos utilizando Series de Potencias. *Primeras Jornadas del Programa Estructuras y Construcciones Civiles*. Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, 19 de octubre de 2012. ISBN: 978-987-1896-07-3.
- Martín H. D., Filipich, C. P. y Maurizi M. J. Estática y dinámica de entramados utilizando series de potencias. *Jornadas de Jóvenes Investigadores 2015*. Facultad Regional Venado Tuerto el 4 de noviembre 2015.
- Martín H. D., Filipich, C. P. y Maurizi M. J. Study of Natural Vibrations in Frames with Internal Articulated Bars, Using Series of Power. *International Conference on Mathematical Modelling and Applications (ICTMA 16)*. Universidade Regional de Blumenau - FURB, city of Blumenau, state of Santa Catarina, Brazil, from July 14 th to July 19 th, 2013.
- Palmeri A, Cicirello A. Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal of Solids and Structures*. 48, 2184–2195 (2011).
- Pratibha M. K., Vaishnav V., Dabhade G. Experimental investigation of crack detection of cantilever beam-FFT analyzer. *Journal of Mechanical and Civil Engineering. (IOSR-JMCE)* 13 (6), 12-17 (2016).
- Timoshenko, S.P. Theory of elasticity. *McGraw-Hill*. New York. (1934).
- Yogesh D. S., Katekar S. D. Vibration Analysis of Cantilever beam with Single Crack using Experimental Method. *International Journal of Engineering Research and Technology, (IJEST)* 3(5), (2014).
- Yokoyama T., Chen M. C., Vibration analysis of edge-cracked beams using a line-spring model. *Engineering Fracture Mechanics*. 59,403–409 (1998)