

MEDIDAS DE INFORMACIÓN BASADAS EN COEFICIENTES WAVELET DISCRETOS NO DECIMADOS APLICADAS A LA SEGMENTACIÓN DE TEXTURAS EN IMÁGENES SATELITALES

INFORMATION MEASURES BASED ON UNDECIMATED DISCRETE WAVELET TRANSFORM COEFFICIENTS APPLIED TO TEXTURES SEGMENTATION IN SATELLITE IMAGES

Victor M. San Martín^{a,b,c} y Alejandra Figliola^{a,b}

^aConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Godoy Cruz 2290, 1425 CABA,
Argentina, <https://www.conicet.gov.ar/>

^bInstituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmineto, Juan María Gutiérrez
1150, 1613 Los Polvorines, Pcia de Bs. As., Argentina, <https://www.ungs.edu.ar/idh/idh>

^cFacultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa, Uruguay 151,
6300 Santa Rosa, La Pampa, <http://www.exactas.unlpam.edu.ar/>

Palabras clave: Texturas, imágenes, sensores remotos, entropía de Shannon, UDWT.

Resumen. Con el objetivo de segmentar texturas presentes en datos de sensores remotos, se construyeron dos distribuciones de probabilidad a partir de coeficientes de la transformada wavelet discreta no decimada (UDWT por sus siglas en inglés). La primera considera los distintos coeficientes de detalle (horizontal, vertical y diagonal) en diferentes escalas, con la intención de captar variaciones de intensidad en distintas direcciones y niveles de resolución. La segunda utiliza los máximos en cada escala de los coeficientes obtenidos en diferentes rotaciones de la imagen analizada. Estas distribuciones son calculadas para cada píxel y analizadas con la entropía de Shannon. Se prueba su desempeño aplicándolas a imágenes sintéticas y, más tarde, se las utiliza para analizar datos de sensores remotos ópticos y de radar de apertura sintética (SAR).

Keywords: Textures, images, remote sensing, Shannon entropy, UDWT.

Abstract. In order to segment textures present in remote sensing data, two probability distributions were constructed from coefficients of undecimated discrete wavelet transform (UDWT). The first one considers the different coefficients of detail (vertical, horizontal and diagonal) in several scales, with the intention of capturing intensity variations in different directions and levels of resolution. The second one uses the maxima in each scale of the coefficients obtained in different rotations of the analyzed image. These distributions are calculated for each pixel and analyzed with Shannon entropy. Their performance is tested by applying them to synthetic images and, later, they are used to analyze data from optical and synthetic aperture radar (SAR) sensors.

1. INTRODUCCIÓN

La segmentación es un paso de preprocesamiento de gran importancia para el análisis de imágenes de sensores remotos, ya que permite identificar estructuras, mapear coberturas de suelo, distinguir regiones con características particulares, etc. Esto brinda información que puede ser utilizada en diferentes tareas como detección de cambios, monitoreo ambiental, agricultura, forestación, planeamiento urbano, entre otros. Existen dos enfoques básicos para la segmentación de una imagen; uno centrado en la búsqueda de regiones de píxeles homogéneos respecto de alguna propiedad, y otro orientado a la detección de los bordes o discontinuidades entre estas regiones. La detección de bordes cuenta con métodos clásicos como los propuestos por Canny (Canny, 1986), Sobel (Sobel, 1970), Prewitt (Prewitt, 1970), entre otros, y sigue siendo intensamente estudiada hasta nuestros días. Los lectores interesados en este tema pueden consultar el artículo de revisión de G. Papari y N. Petkov (Papari y Petkov, 2011) y sus referencias. La segmentación basada en regiones también ha sido fuertemente investigada, dando lugar a una innumerable cantidad de algoritmos. Las técnicas clásicas involucran el uso de umbrales (Oliva y Cuevas, 2017), el crecimiento, separación y fusión de regiones, y aquellos basados en cuencas morfológicas (Gonzalez y Woods, 2008; Pratt, 2013).

Un desafío de particular dificultad es la segmentación de una imagen a partir de las diferentes texturas presentes. Para esto se han planteado muchos enfoques, como *Markov Random Fields* (Medvedeva et al., 2018), geometría fractal y multifractal (Chaudhuri y Sarkar, 1995; Xia et al., 2006; San Martin y Figliola, 2017), redes neuronales (Cimpoi et al., 2015; Duan et al., 2017), por citar algunos. Entre las distintas perspectivas existentes, una muy interesante es la de la transformada wavelet y los coeficientes wavelet leaders. En este contexto, los artículos de Pustelnik et al. (Pustelnik et al., 2013, 2016) han mostrado la eficiencia de las estimaciones de Hölder local a través de wavelet leaders junto con métodos de denoising basados en optimización convexa para la segmentación de texturas con comportamientos de escala bien marcados.

La transformada wavelet discreta (DWT) (Mallat, 2008; Walnut, 2013) resulta computacionalmente muy eficiente en comparación con la transformada continua debido a su implementación basada en bancos de filtros. No obstante, tiene el inconveniente de no ser invariante frente a traslaciones, lo que puede ocasionar problemas tanto en el análisis de las imágenes como en su reconstrucción luego de modificar los coeficientes. Esto ha sido mencionado en diversas publicaciones, especialmente en aquellas abocadas al estudio de imágenes médicas (Zhang et al., 2016; Wang et al., 2016), donde esa característica puede desembocar en un diagnóstico erróneo. Para resolver este problema, usualmente se emplea la transformada wavelet discreta no decimada (UDWT) que, si bien es redundante, es invariante traslacional, reduciendo así artefactos propios de la DWT.

La principal contribución de este trabajo es la presentación y análisis de dos nuevos métodos para la segmentación de texturas en imágenes de sensores remotos. Estos métodos usan la entropía de Shannon para describir distribuciones de probabilidad locales construidas a partir de coeficientes UDWT. Se obtienen valores de esta medida de información para cada punto de las imágenes, posibilitando la segmentación de texturas a través de la aplicación de umbrales. En primera instancia se estudia el desempeño de los métodos analizando imágenes sintéticas. Luego, se procede a aplicarlos a datos reales procedentes de dos tipos de sensores remotos distintos. Por un lado, se analizan datos ópticos procedentes del Programa Nacional de Imágenes Agrícolas (NAIP) del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos (USDA), descargadas del servicio web de USGS¹. Por otro, se estudian imágenes de radar de apertura sintética

¹<https://earthexplorer.usgs.gov/>

(SAR) del sensor ALOS PALSAR (EORC, JAXA, 2008), obtenidas a través del sitio web de la Instalación de Satélite de Alaska (ASF)².

El artículo se encuentra estructurado del siguiente modo: En la sección 2 se revisan los conceptos matemáticos básicos que se utilizan para estudiar las diferentes imágenes. La sección 3 está dedicada a describir las distribuciones propuestas. En la sección 4 se muestran los resultados de aplicar los métodos presentados a imágenes de distinta naturaleza. Por último, en la sección 5 se resumen las conclusiones del trabajo, haciendo énfasis en las bondades y limitaciones de cada una de las distribuciones propuestas.

2. HERRAMIENTAS TEÓRICAS

En esta sección se realiza una revisión de las nociones matemáticas involucradas en las metodologías propuestas. Se definen brevemente los coeficientes UDWT y la entropía de información y se presenta un método de eliminación de ruido aplicado a modo de posprocesamiento de la entropía, que permite recuperar regiones constantes con bordes marcados.

2.1. Transformada wavelet discreta no decimada

La UDWT puede realizarse de manera eficiente a través del llamado algoritmo *à trous* o con huecos (Holschneider et al., 1990; Shensa, 1992). Este algoritmo supone que la señal de entrada está formada por los coeficientes de aproximación de una señal subyacente a una escala arbitraria. Partiendo de coeficientes de aproximación $\{\tilde{c}_j[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en la escala j , es posible obtener los coeficientes de aproximación y de detalle en la escala $j + 1$ sin decimar, $\{\tilde{c}_{j+1}[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\tilde{w}_{j+1}[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ respectivamente, a través de las convoluciones (Starck et al., 2015)

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{j+1}[l] &= (\hat{h}^{(j)} \star \tilde{c}_j)[l] = \sum_k h[k] \tilde{c}_j[l + 2^j k] \\ \tilde{w}_{j+1}[l] &= (\hat{g}^{(j)} \star \tilde{c}_j)[l] = \sum_k g[k] \tilde{c}_j[l + 2^j k]\end{aligned}\quad (1)$$

donde $\hat{h}[l] = h[-l]$ y

$$h^{(j)}[l] = \begin{cases} h[l] & \frac{l}{2^j} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Del mismo modo que para la DWT, es posible extender este método a dos dimensiones a través del producto tensorial,

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{j+1}[\underline{k}] &= (\hat{h}^{(j)} \hat{h}^{(j)} \star \tilde{c}_j)[\underline{k}] \\ \tilde{w}_{j+1}^{(1)}[\underline{k}] &= (\hat{g}^{(j)} \hat{h}^{(j)} \star \tilde{c}_j)[\underline{k}] \\ \tilde{w}_{j+1}^{(2)}[\underline{k}] &= (\hat{h}^{(j)} \hat{g}^{(j)} \star \tilde{c}_j)[\underline{k}] \\ \tilde{w}_{j+1}^{(3)}[\underline{k}] &= (\hat{g}^{(j)} \hat{g}^{(j)} \star \tilde{c}_j)[\underline{k}]\end{aligned}\quad (2)$$

con $\underline{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ y donde, por ejemplo, $hg \star c$ es la convolución de c primero a lo largo de las columnas por h y luego a lo largo de las filas por g . De este modo se obtienen los coeficientes de aproximación $\{\tilde{c}_{j+1}[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y coeficientes de detalle en las direcciones horizontal, vertical y diagonal, $\{\tilde{w}_{j+1}^{(i)}[k]\}_{k \in \mathbb{Z}, i=1,2,3}$.

²<https://vertex.daac.asf.alaska.edu/>

2.2. Medida de información

Una medida de información es una cantidad que permite caracterizar una distribución de probabilidades asociada a un sistema. Su función es cuantificar la incerteza presente en el estudio de procesos descritos probabilísticamente. Una medida de información debe ser nula cuando estamos en condiciones de predecir con certeza cuál de los posibles resultados tendrá lugar, es decir, cuando el conocimiento del proceso es de gran exactitud. Por otro lado, la medida debe maximizarse para el caso de mayor impredecibilidad de la salida del sistema, o, lo que es equivalente, cuando todos los posibles resultados sean equiprobables.

La primera propuesta, y quizá la más conocida de estas medidas, es la entropía definida por Shannon (Shannon, 1948). Si $P = \{p_i\}, i = 1, \dots, n$ es una distribución de probabilidades discreta, la entropía de Shannon se define como:

$$S[P] = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i). \quad (3)$$

Para la distribución $P = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$ la entropía de Shannon es $S[P] = 0$. Por otro lado, cuando la distribución es uniforme, $P_e = \{p_j = \frac{1}{n}, j = 1, \dots, n\}$, entonces tenemos que $S[P_e] = S_{max} = \ln(n)$.

2.3. TV denoising

Rudin et al. (Rudin et al., 1992) propusieron un método de eliminación de ruido para imágenes consistente en un problema de optimización que involucra un funcional no suave denominado variación total (TV). Este método favorece naturalmente los bordes bien definidos, eliminando las variaciones locales en regiones uniformes y dando como resultado una imagen restaurada con una naturaleza constante por trozos. Bajo el supuesto de que a regiones con diferentes texturas les corresponden distintos valores de entropía, esa característica es deseable. Por ello, aplicaremos este método a fin de obtener regiones constantes de entropía.

El objetivo es obtener un conjunto de valores de entropías normalizadas $S \in \mathcal{D} = [0, 1]$, asociadas a cada píxel de una imagen de dimensiones $N_1 \times N_2$. Para eso se plantea el siguiente problema de optimización:

$$S^{TV} = \arg \min_{S \in \mathcal{D}^{N_1 \times N_2}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} (\hat{S} - S)^2 + \lambda TV(S) \right\} \quad (4)$$

donde \hat{S} es la entropía estimada en cada píxel \underline{k} de la imagen a partir de una distribución de probabilidad, y $TV(S)$ es el funcional conocido como Variación Total:

$$TV(S) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \sqrt{((D_1 S)(k_1, k_2))^2 + ((D_2 S)(k_1, k_2))^2}, \quad (5)$$

con $(D_1 S)(k_1, k_2) = S(k_1 + 1, k_2) - S(k_1, k_2)$, $(D_2 S)(k_1, k_2) = S(k_1, k_2 + 1) - S(k_1, k_2)$. El parámetro $\lambda > 0$ determina el comportamiento constante por partes de la solución.

En la literatura se han propuesto varias técnicas para resolver problemas del tipo planteado en la Ec. (4). En este caso, se implementó un algoritmo denominado Forward-Backward Primal-Dual (FBPD) desarrollado por L. Condat (Condat, 2013).

3. METODOLOGÍA

Se proponen dos distribuciones de probabilidades basadas en coeficientes UDWT que caracterizan las variaciones en cada punto de una imagen a distintas escalas. Estas distribuciones son analizadas por medio de la entropía de información y sus resultados son suavizados a partir del método presentado en la sección 2.3. De ese modo se obtienen histogramas de entropía con poblaciones bien marcadas, que pueden ser fácilmente segmentadas por medio de umbrales.

3.1. Distribuciones de probabilidad direccionales

Para cada punto y cada nivel j tenemos tres coeficientes UDWT de detalle, $\tilde{w}_j^{(i)}(\underline{k})$, con $i = 1, 2, 3$. Se propone tomar los coeficientes:

$$\tilde{d}_j^{(i)}(\underline{k}) = \sup_{\underline{k}' \in \Delta \underline{k}} \left| \tilde{w}_j^{(i)}(\underline{k}') \right| \quad (6)$$

donde $\Delta \underline{k}$ son entornos de dimensiones $(2^j + 1) \times (2^j + 1)$ centrados en \underline{k} . Los vectores de probabilidades basados en estos coeficientes se construyen como $\tilde{P}(\underline{k}) = \left\{ \tilde{p}_j^{(i)}(\underline{k}) \right\}$, con

$$\tilde{p}_j^{(i)}(\underline{k}) = \frac{\tilde{d}_j^{(i)}(\underline{k})^2}{\sum_{t=1}^3 \sum_{l=1}^J \tilde{d}_l^{(t)}(\underline{k})^2} \quad j = 1, \dots, J; i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

3.2. Distribuciones de probabilidad sobre rotaciones

Sea A la imagen en estudio y sea \mathcal{R}_θ una rotación de un ángulo θ . Definimos un conjunto de N rotaciones de la imagen A , $\{A_n, n = 0, \dots, N - 1\}$, donde $A_n = \mathcal{R}_{\theta_n} A$, $\theta_n = \Delta\theta \cdot n$, con $\Delta\theta = \frac{\pi}{2N}$. Calculamos la transformada UDWT con J niveles para cada una de ellas, obteniendo los coeficientes de detalle correspondientes. Aplicando la rotación $\mathcal{R}_{-\theta_n}$ correspondiente a cada uno de estos conjuntos, se obtienen los coeficientes $\check{w}_{j,n}^{(i)}(\underline{k})$ en la escala j de la rotación n en la posición \underline{k} . Se propone tomar los coeficientes:

$$\check{d}_j(\underline{k}) = \sup_{\substack{n=0, \dots, N-1 \\ i=1, 2, 3 \\ \underline{k}' \in \Delta \underline{k}}} \left| \check{w}_{j,n}^{(i)}(\underline{k}') \right|. \quad (8)$$

donde $\Delta \underline{k}$ son entornos análogos a los definidos en la distribución anterior.

Definimos la distribución $\check{P}(\underline{k}) = \left\{ \check{p}_j(\underline{k}) \right\}$, con

$$\check{p}_j(\underline{k}) = \frac{\check{d}_j(\underline{k})^2}{\sum_{l=1}^J \check{d}_l(\underline{k})^2}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (9)$$

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En todos los resultados presentados, la UDWT se implementó con una wavelet Daubechies con dos momentos nulos, $J = 3$ niveles de resolución y 6 rotaciones para el caso de la segunda distribución de probabilidades.

La figura 1(a) presenta una de las imágenes construidas para probar las distribuciones propuestas. La misma consta de regiones con variaciones de intensidad sinusoidales con distintas frecuencias y direcciones. El fondo de la imagen posee la frecuencia más alta, seguido por las dos figuras en la parte superior de la imagen (elipse mayor y círculo). Estas poseen patrones

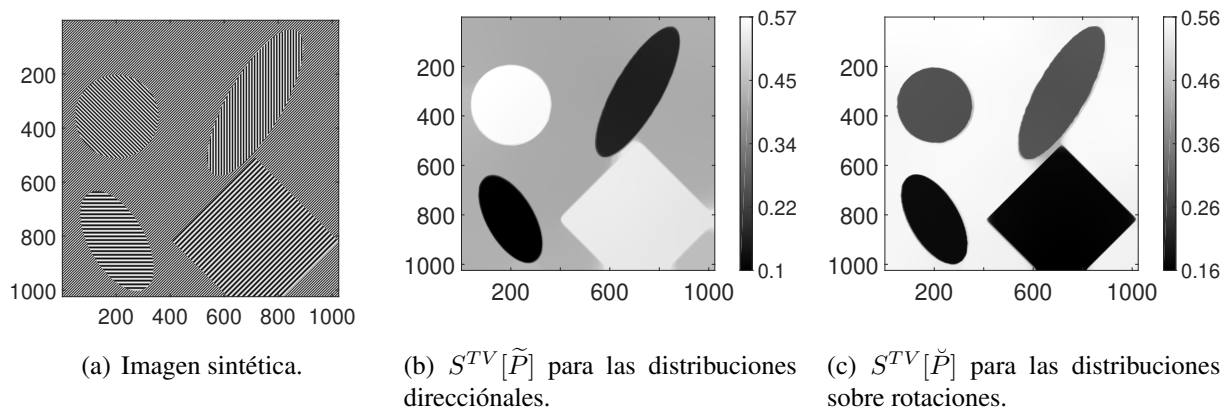


Figura 1: Imagen sintética creada para probar las distribuciones propuestas.

con la misma frecuencia pero orientaciones distintas. Por último, la elipse en la esquina inferior izquierda y el rombo de la parte inferior derecha comparten la frecuencia más baja pero poseen, nuevamente, patrones con orientaciones diferentes. En la figura 1(b) se presenta la entropía calculada sobre la distribución direccional. Nótese que los valores de entropía son distintos para las figuras superiores. Lo mismo ocurre entre la elipse inferior izquierda y el rombo. Esto se debe a que cuando los patrones no se encuentran orientados horizontal o verticalmente existen coeficientes significativos en cada una de las direcciones. Incluso cuando el patrón forma un ángulo de $\pi/4$ con la horizontal la transformada presenta coeficientes con valores altos en las tres direcciones, no solo en los correspondientes a esa orientación. Por supuesto, esta característica de la distribución de probabilidades no es deseable, ya que desemboca en clasificaciones erróneas.

En la figura 1(c) se ve la entropía obtenida a partir de las distribuciones basadas en rotaciones. A diferencia de los resultados obtenidos con la distribución anterior, en este caso la entropía no presenta variaciones con la orientación de la textura.

Luego de las pruebas con imágenes sintéticas, los métodos fueron aplicados a capturas de sensores remotos. Por completitud, la distribución direccional también fue probada en los datos reales. La figura 2(a) presenta un recorte de una imagen aérea del programa NAIP, correspondiente a una longitud de onda aproximada de $0.65 \mu m$ (rojo visible). En esta imagen se pueden ver dos cultivos arreglados de modo circular, con texturas formadas por los patrones de surcos. En la figura 2(b) se ve la entropía para la distribución direccional. Nuevamente, es evidente que la orientación de las texturas determina los valores que adopta el cuantificador de información en cada punto. La figura 2(c) muestra el resultado obtenido para la distribución basada en rotaciones, donde puede verse que las texturas son caracterizadas por un valor de entropía a pesar de su orientación variable.

En la figura 3(a) se presenta un fragmento de una captura SAR procedente del sensor ALOS PALSAR, que muestra una serie de lagunas próximas al cauce de un río en un paisaje preponderantemente desértico. Las figuras 3(b) y 3(c) muestran los análisis sobre esta imagen para las distribuciones direccionales y sobre rotaciones, respectivamente. En ambas puede verse cómo la región cubierta por lagunas posee una entropía menor que las zonas áridas circundantes. La entropía en la región de lagunas es heterogénea, lo cual es razonable ya que las lagunas no poseen una uniformidad en sus tamaños y formas, dando lugar a una textura irregular.

A modo de ejemplo, en la figura 4 se presenta la segmentación de la figura 3(a) a partir de un

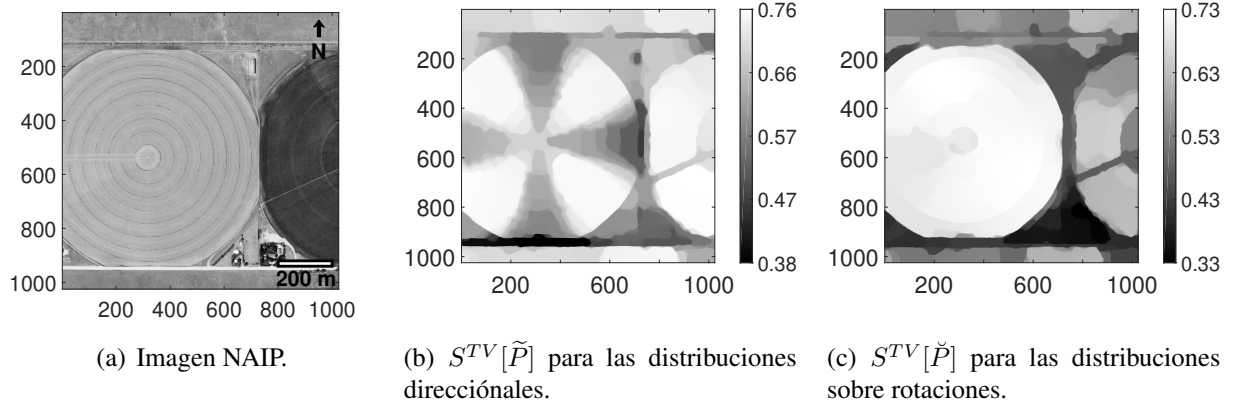


Figura 2: Fragmento de imagen correspondiente al Programa de Imágenes Agrícolas Nacional (NAIP) de USDA. Banda correspondiente a la longitud de onda aprox. $0.65 \mu m$ (rojo).

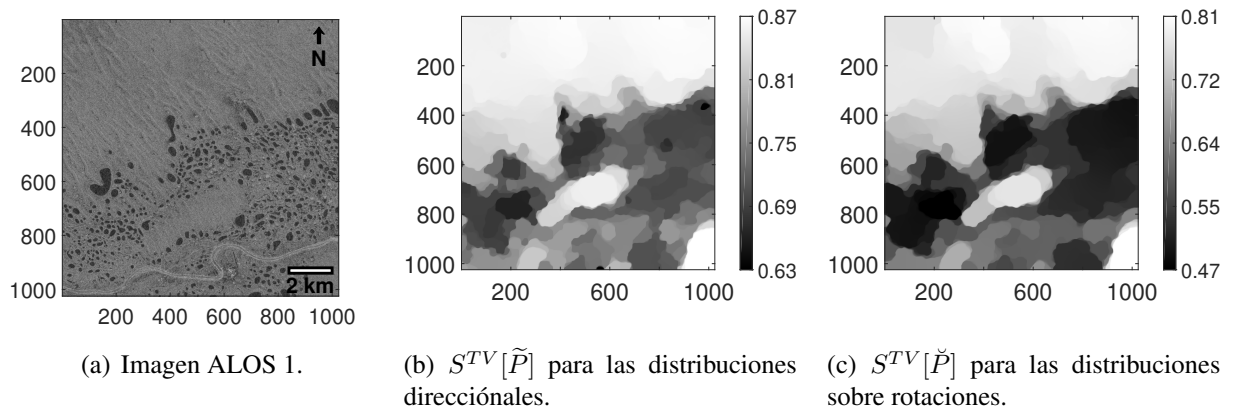


Figura 3: Fragmento de imagen ALOS 1 en banda HH.

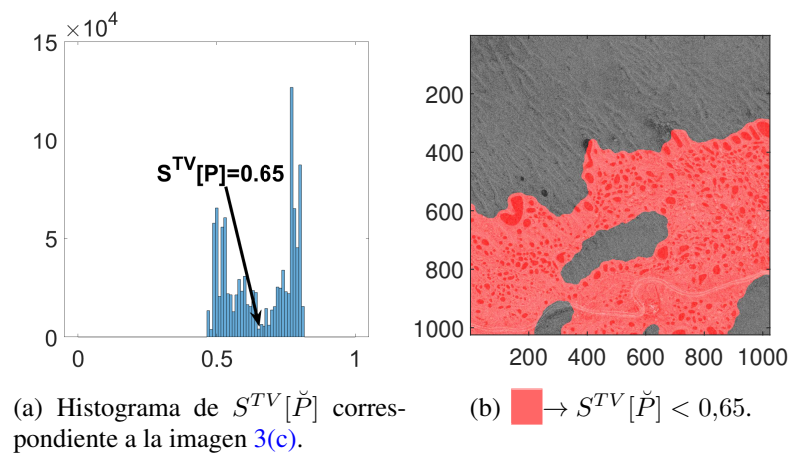


Figura 4: Segmentación de la figura 3 a partir de umbral sobre la entropía de la distribución basada en rotaciones.

umbral sobre la entropía de la distribución basada en rotaciones. En la figura 4(a) se presenta el histograma de esta entropía, donde se distinguen dos poblaciones bien marcadas separadas por un mínimo en $S^{TV}[\check{P}] \approx 0,65$. En la figura 4(b) se ve destacada la región de píxeles con $S^{TV}[\check{P}] < 0,65$, asociada con las lagunas presentes en la captura. La figura muestra claramente que es posible extraer esta textura de la imagen, aun en datos tan ruidosos como las imágenes SAR.

5. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

En este artículo hemos propuesto dos metodologías de segmentación de imágenes que combinan coeficientes UDWT con la entropía de Shannon para capturar la información textural presente.

Se observó que la entropía calculada para la distribución direccional adopta distintos valores para una misma textura en función de su orientación, lo que puede derivar en clasificaciones erróneas.

Por otro lado, la distribución basada en rotaciones resulta más eficiente para clasificar patrones de una imagen pues permite distinguirlos más allá de su orientación. Es destacable la segmentación obtenida sobre la imagen SAR, que muestra que este método permite distinguir texturas heterogéneas aun en capturas con un alto nivel de ruido.

Como trabajo futuro, se plantea la posibilidad de implementar otros coeficientes multiescala, más sensibles a variaciones angulares en los patrones presentes. Los candidatos que vemos con mayor interés son los coeficientes curvelet. Se propone además la posibilidad de estudiar las distribuciones con otras medidas de información, como la medida de Fisher, y con distintas medidas de complejidad.

REFERENCIAS

- Canny J. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):679–698, 1986. ISSN 0162-8828. doi: 10.1109/TPAMI.1986.4767851.
- Chaudhuri B.B. y Sarkar N. Texture segmentation using fractal dimension. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(1):72–77, 1995. ISSN 0162-8828. doi: 10.1109/34.368149.
- Cimpoi M., Maji S., y Vedaldi A. Deep filter banks for texture recognition and segmentation. En *The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2015.
- Condat L. A primal-dual splitting method for convex optimization involving lipschitzian, proximal and linear composite terms. *J. Optimization Theory and Applications*, 158(2):460–479, 2013. doi:10.1007/s10957-012-0245-9.
- Duan Y., Liu F., Jiao L., Zhao P., y Zhang L. SAR image segmentation based on convolutional-wavelet neural network and Markov Random Field. *Pattern Recognition*, 64:255 – 267, 2017. ISSN 0031-3203. doi:https://doi.org/10.1016/j.patcog.2016.11.015.
- Gonzalez R. y Woods R. *Digital Image Processing*. Pearson/Prentice Hall, New Jersey, 2008. ISBN 978-0-13-168728-8.
- Holschneider M., Kronland-Martinet R., Morlet J., y Tchamitchian P. A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. En J.M. Combes, A. Grossmann, y P. Tchamitchian, editores, *Wavelets*, páginas 286–297. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1990. ISBN 978-3-642-75988-8.
- Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*. Academic

- Press, Inc., Orlando, FL, USA, 3rd edición, 2008. ISBN 0123743702, 9780123743701.
- Medvedeva E., Trubin I., y Kurbatova E. *Methods of Filtering and Texture Segmentation of Multicomponent Images*, páginas 97–118. Springer International Publishing, Cham, 2018. ISBN 978-3-319-67516-9. doi:10.1007/978-3-319-67516-9_4.
- Oliva D. y Cuevas E. *Digital Image Segmentation as an Optimization Problem*, páginas 43–91. Springer International Publishing, Cham, 2017. ISBN 978-3-319-48550-8. doi:10.1007/978-3-319-48550-8_4.
- Papari G. y Petkov N. Edge and line oriented contour detection: State of the art. *Image and Vision Computing*, 29(2):79–103, 2011. ISSN 0262-8856. doi:https://doi.org/10.1016/j.imavis.2010.08.009.
- Pratt W.K. *Introduction to digital image processing*. CRC press, Boca Ratón, 2013. ISBN 978-1-4822-1670-7.
- Prewitt J.M. Object enhancement and extraction. *Picture processing and Psychopictorics*, 10(1):15–19, 1970.
- Pustelnik N., Wendt H., y Abry P. Local regularity for texture segmentation: Combining wavelet leaders and proximal minimization. En *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, páginas 5348–5352. 2013. ISSN 1520-6149. doi:10.1109/ICASSP.2013.6638684.
- Pustelnik N., Wendt H., Abry P., y Dobigeon N. Combining local regularity estimation and total variation optimization for scale-free texture segmentation. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2(4):468–479, 2016. ISSN 2333-9403. doi:10.1109/TCI.2016.2594139.
- Rudin L.I., Osher S., y Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1):259 – 268, 1992. ISSN 0167-2789. doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F.
- San Martin V. y Figliola A. Application of multifractal analysis to segmentation of water bodies in optical satellite images. *Papers in Physics*, 9:090007, 2017. doi:10.4279/pip.090007.
- Shannon C.E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948. doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- Shensa M.J. The discrete wavelet transform: wedding the à trous and Mallat algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(10):2464–2482, 1992. ISSN 1053-587X. doi:10.1109/78.157290.
- Sobel I. Camera models and perception [ph. d. thesis]. California: Artificial intelligence lab. 1970.
- Starck J.L., Murtagh F., y Fadili J. *Redundant Wavelet Transform*, página 45–79. Cambridge University Press, 2 edición, 2015. doi:10.1017/CBO9781316104514.004.
- EORC, JAXA. ALOS Data Users Handbook Rev. C. 2008.
- Walnut D.F. *An introduction to wavelet analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.
- Wang S., Du S., Atangana A., Liu A., y Lu Z. Application of stationary wavelet entropy in pathological brain detection. *Multimedia Tools and Applications*, 77(3):3701–3714, 2016. ISSN 1573-7721. doi:10.1007/s11042-016-3401-7.
- Xia Y., Feng D., y Zhao R. Morphology-based multifractal estimation for texture segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(3):614–623, 2006. ISSN 1057-7149. doi:10.1109/TIP.2005.863029.
- Zhang Y., Lu S., Zhou X., Yang M., Wu L., Liu B., Phillips P., y Wang S. Comparison of machine learning methods for stationary wavelet entropy-based multiple sclerosis detection: decision tree, k-nearest neighbors, and support vector machine. *Simulation*, 92(9):861–871, 2016. doi:10.1177/0037549716666962.