

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES ESTÁTICO Y DINÁMICO

**Luis Kostaski<sup>a</sup>, Héctor Cóceres<sup>a</sup>, Ricardo Barrios D'Ambra<sup>a</sup>, Ignacio Iturrioz<sup>b</sup>, Adrián Cisilino<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727,  
3500 Resistencia, Chaco, Argentina, rbarrios@ing.unne.edu.ar, <http://www.ing.unne.edu.ar>*

<sup>b</sup>*PROMECA, Departamento Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería, Universidad Federal de Rio  
Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, ignacio@mecanica.ufrgs.edu.br,*

<sup>c</sup>*Instituto de Investigaciones en Ciencia y Tecnología de Materiales, INTEMA, Facultad de Ingeniería,  
Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina*

**Palabras clave:** Mecánica de fractura, Método de los elementos discretos, Dinámica, Factor de intensidad de tensiones.

**Resumen.** La determinación de parámetros de mecánica de fractura mediante la utilización de métodos numéricos ha ocupado la atención de un importante número de investigadores, y existe actualmente un gran conjunto de técnicas que pueden ser empleadas para calcular los mismos.

El factor de intensidad de tensiones desempeña sin duda, un rol fundamental en el estudio de la mecánica de la fractura, y se ha realizado un gran esfuerzo en el desarrollo de métodos para su determinación. Por otro lado, existe un gran número de problemas de mecánica de fractura, en los cuales los efectos de la inercia no pueden ser despreciados. En los últimos años, el Método de los Elementos Discretos (MED), ha aparecido como una alternativa eficiente para el estudio de problemas estáticos y dinámicos de mecánica de fractura, no solo en la determinación de la situación crítica de eminente propagación inestable sino también en la simulación del proceso de propagación.

En este trabajo se presenta el método de los elementos discretos (MED), como una herramienta alternativa para el estudio de este tipo de fenómenos, se realiza el cálculo del factor de intensidad de tensiones en problemas estáticos y dinámicos con geometrías simplificadas. Se pone de manifiesto la capacidad del método para el cálculo de parámetros de mecánica de fractura, y se discuten sus ventajas e inconvenientes.

## 1 INTRODUCCION

El cálculo de parámetros fractomecánicos dentro de la mecánica de los sólidos es un tema que ha suscitado el interés de una gran cantidad de investigadores del área numérica. Nuevos métodos son periódicamente agregados a las herramientas de cálculo existentes, entre ellos se destaca la utilización de técnicas implementadas con el método de los elementos Finitos (MEF) y el método de los elementos de contorno (MEC). Una compilación clásica de métodos tanto numéricos como analíticos se presenta en [Aliabadi y Rooke, \(1991\)](#). En este contexto resulta también importante la capacidad de prever cómo un defecto se propaga en forma inestable, cuando el estado tensional medido por el parámetro fractomecánico alcanza un valor crítico. En este sentido existen antecedentes del empleo de interfaces cohesivas, utilizando el método de los elementos finitos ([Needelman, 1987](#)), así como modelos formados por partículas discretas, como el propuesto por [Cundall, \(1989\)](#), entre otros.

El objetivo de este trabajo es presentar el método de los elementos discretos (MED) como una herramienta alternativa para calcular parámetros fractomecánicos, destacando su capacidad para modelar la situación crítica de propagación inestable de la fisura.

## 2 DESCRIPCION DEL MED

El MED consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo en módulos de reticulado espacial regulares, donde las rigideces de las barras son equivalentes a la del continuo que se quiere representar. La masa del modelo es discretizada concentrándola en los nodos del sistema discreto. El arreglo cúbico muestra (ver [Figura 1](#): a) Módulo cúbico utilizado. b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos) un módulo con ocho nodos en sus vértices, más un nodo central. Cada nodo posee tres grados de libertad. Las masas son unidas por elementos longitudinales y diagonales de longitud  $L_c$  y  $\sqrt{3}L_c/2$  respectivamente. La equivalencia entre el arreglo cúbico y un sólido elástico ortótropo con los ejes principales del material orientados en la dirección de los elementos longitudinales fue verificada por [Hayashi, \(1982\)](#), dentro del campo de la elasticidad lineal. Sólo debe ser impuesta la restricción  $\nu = 0.25$  al valor del módulo de Poisson para que la equivalencia sea perfecta.

Para otros valores de  $\nu$  aparecen pequeñas diferencias en los términos de corte, pero estas diferencias pueden despreciarse, sobre todo cuando se está interesado en la respuesta no lineal del modelo estudiado.

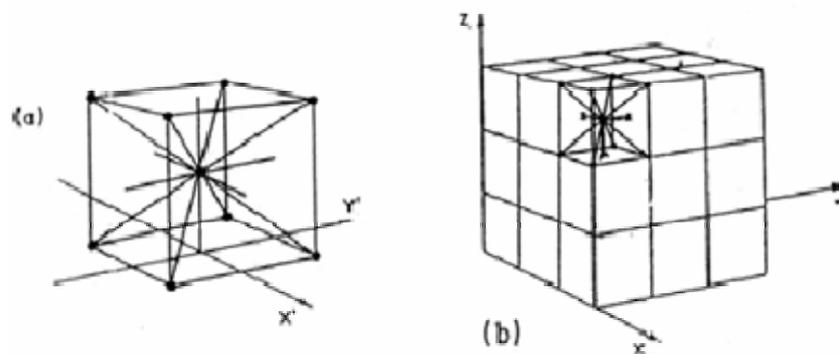


Figura 1: a) Módulo cúbico utilizado. b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos

La ecuación de movimiento del sistema de  $N$  grados de libertad resultante de la discretización espacial puede ser expresada en la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (1)$$

En la cual  $\mathbf{M}$  denota la matriz de masa (diagonal),  $\mathbf{u}$  es el vector de coordenadas generalizadas (desplazamientos nodales),  $\mathbf{f}(t)$  es el vector de fuerzas nodales internas, las cuales dependen de los desplazamientos presentes y de pasos anteriores, y  $\mathbf{Q}(t)$  el vector de fuerzas externas aplicadas. Así, en sistemas lineales elásticos,  $\mathbf{f}(t)=\mathbf{K}\mathbf{u}$ , siendo  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez. En sistemas con fuerzas viscosas,  $\mathbf{f}(t)=\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}$ , considerando  $\mathbf{C}=\mathbf{D}\mathbf{f} \times \mathbf{M}$  proporcional a la matriz de masa, el sistema (ecuación 1) puede ser integrado numéricamente en el dominio del tiempo utilizando un esquema de integración explícita (método de las diferencias finitas centrales). Mediante la actualización de las coordenadas nodales en cada paso del tiempo este método permite la consideración de grandes desplazamientos en forma natural (no linealidad geométrica).

La convergencia de las soluciones en elasticidad lineal, así como en los problemas de inestabilidad elástica fue verificada por Riera and Iturrioz, (1995).

## 2.1 Ley constitutiva elemental para representar el comportamiento no lineal del material

Rocha, (1989) propuso una ley constitutiva bilineal para los elementos, que permite capturar el comportamiento de materiales hasta la rotura. La relación constitutiva de cada barra tiene la siguiente forma:

$$\text{Fuerza} = \text{función}(\text{deformación de la barra}) \quad (2)$$

En la Figura 2,  $P_{cr}$  representa la fuerza máxima de tracción transmitida por la barra,  $\epsilon_p$  es la deformación asociada a  $P_{cr}$ ,  $EA$  es la rigidez de las barras del modelo de reticulado y  $kr$  es la ductilidad, parámetro que permite calcular  $\epsilon_r$  (ver Figura 2), la deformación para la cual la barra no transmite más esfuerzos de tracción.

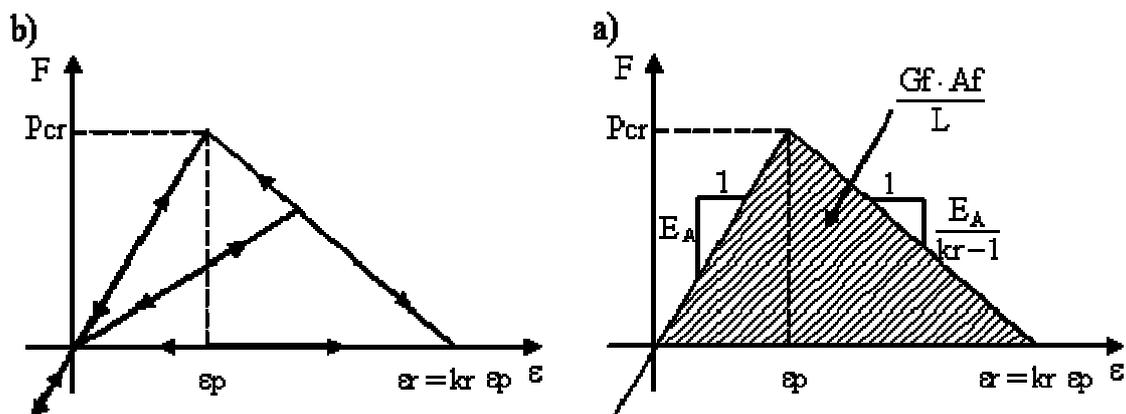


Figura 2: Relación Constitutiva elemental de las barras del reticulado. a) Diagrama constitutivo adoptado y parámetros de control. b) Esquema para la carga y descarga.

La deformación límite  $\epsilon_r$  es elegida para satisfacer la condición que cuando un elemento falla y la fisura se abre, se disipa una cierta cantidad de energía. Esta energía es igual al producto del área de la superficie fracturada,  $A_f$ , la cual está relacionada con  $L_c$ , por el valor de la tasa de energía superficial  $G_f$ , que es una propiedad del material.

Las propiedades del material pueden ser modeladas como campos aleatorios, lo que implica que las mismas pueden variar de elemento a elemento siguiendo una ley estadística establecida.

Es importante destacar que  $P_{cr}$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $G_f$ , y  $R_f$  son propiedades exclusivas del material,  $A_f$  y  $L_c$  son propiedades exclusivas del modelo, los parámetros  $EA$  y  $kr$  dependen tanto del modelo como del material.

Considerando que el material en estudio tiene comportamiento frágil, puede ser aplicada la mecánica lineal de fractura. El factor de intensidad de tensiones ( $K_I$ ), parámetro de comparación de la mecánica de fractura puede ser escrito como:

$$K_I = \chi \cdot f_t \cdot \sqrt{a} \quad (3)$$

Dónde  $\chi$  es un parámetro que depende de la geometría del problema y  $a$  es la semilongitud de la fisura.

Considerando el comportamiento lineal hasta la ruptura ( $f_t = \varepsilon_p E$ ) y estado plano de deformaciones, la deformación crítica es dada por:

$$\varepsilon_p = R_f \cdot \left[ \frac{G_f}{E \cdot (1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (4)$$

En la cual:

$$G_f = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu)^2 \quad (5)$$

$R_f$  es un "factor de falla" definido como:

$$R_f = \frac{1}{(\chi \cdot \sqrt{a})} \quad (6)$$

El método de los elementos discretos ha sido aplicado con éxito en el estudio de materiales susceptibles de fracturar, en los cuales la hipótesis de medio continuo, base de los métodos numéricos tradicionales (elementos finitos y de contorno) es violada.

El MED, junto con la ley bilineal explicada, fue utilizado con buenos resultados en el estudio de materiales frágiles, como hormigón y hormigón armado, según se presenta en [Riera e Iturrioz, \(1998\)](#). La simulación del comportamiento de suelos frente a cargas explosivas puede encontrarse en [Iturrioz y Riera, \(2001\)](#), el estudio de propagación dinámica de fisuras en [Spellmeyer et al. \(1995\)](#), problemas de impacto en materiales compuestos poliméricos en [Barrios D'Ambra et al. \(2002\)](#). Otros estudios para la determinación de parámetros fractomecánicos con el MED fueron presentados por [Tech et al. \(2003\)](#).

### 3 DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

#### 3.1 Método del balance de energías

En este método, se utiliza el MED para determinar el valor de la energía específica de fractura  $G_f$ , realizando dos simulaciones con tamaños de fisuras levemente diferentes. De esta forma, es posible expresar el parámetro  $G_f$  como sigue ([Anderson, 1995](#)):

$$G_f = -\frac{d\pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dK}{dA} \quad (7)$$

Donde  $\pi$  representa el potencial total,  $W$  potencial de las fuerzas externas (la cual es evaluada multiplicando las fuerzas aplicadas por los desplazamientos en los nodos correspondientes, más el producto de las fuerzas de inercia en todos los nodos de la estructura

multiplicados por el desplazamiento correspondiente),  $A$  es el área de la fisura,  $U$  es la energía de deformación elástica y  $K$  es la energía cinética.

Para resolver el problema numéricamente para cada valor de tensión aplicada  $\sigma$  se tendrá:

$$G_f(\sigma) = \frac{W_{(a+\Delta a)} - W_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{K_{(a+\Delta a)} - K_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (8)$$

Se verifica que si las cargas son aplicadas lentamente es posible despreciar la parte correspondiente a la energía cinética, y si son aplicadas tensiones prescritas en los extremos de la placa, por el teorema de Clapeyron, es posible demostrar que  $dW/dA = 2 dU/dA$ . Sustituyendo en la ecuación (7) se obtiene:

$$G_f = \frac{dU}{dA} \quad (9)$$

Para resolver el problema numéricamente para cada valor de tensión aplicada  $\sigma$  se tendrá:

$$G_f(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (10)$$

Para el cálculo de  $U(a+\Delta a)$  se aumenta el largo de la fisura en un módulo  $L_c$  y se repite el análisis. Obtenido el valor de  $G_f(\sigma)$  y considerando estado plano de deformaciones es posible calcular el factor de intensidad de tensiones  $K$  y posteriormente su valor normalizado  $K/K_0$ , con la expresión:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\sqrt{G_f \cdot E}}{\sigma \sqrt{\pi \cdot a}} \quad (11)$$

### 3.2 Método COD

Este parámetro, propuesto por Wells (1961), pretende caracterizar la capacidad de un material para deformarse plásticamente antes de la fractura, midiendo la separación de las dos caras de la fisura en su extremo.

El factor de intensidad de tensiones, puede calcularse con la fórmula que relaciona el COD con el factor de intensidad de tensiones. La expresión válida para estado plano de tensiones es:

$$COD = 2v = \frac{2K}{E/(2+2\nu)} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1+\nu} \right) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (12)$$

Donde  $v$  es el desplazamiento según el eje  $y$ . Tomando  $\theta = 180^\circ$ , se llega a:

$$COD = 2v = \frac{2K}{E/(2+2\nu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left( \frac{2}{1+\nu} \right) \quad (13)$$

Despejando  $K$ :

$$K = v \frac{E}{2+2\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left( \frac{1+\nu}{2} \right) = v \frac{E}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (14)$$

Normalizando, se obtiene  $K/K_0$ :

$$\frac{K}{K_0} = \nu \frac{E}{4 \cdot \sigma_0} \sqrt{\frac{2\pi}{r \cdot \pi \cdot a}} = \nu \frac{E}{4 \cdot \sigma_0} \sqrt{\frac{2}{r \cdot a}} \quad (15)$$

En la que  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi \cdot a}$ .

Para estado plano de deformación se llega a:

$$\frac{K}{K_0} = \nu \frac{E}{4 \cdot \sigma_0 \cdot (1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{2}{r \cdot a}} \quad (16)$$

En la que  $r$  es la distancia desde la punta de la fisura hasta el punto donde se miden los desplazamientos, y  $a$  es la semilongitud de la fisura.

## 4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### 4.1 Cálculo del $K$ estático para una placa con una fisura central

Se propone calcular el factor de intensidad de tensiones normalizado a partir de los métodos del balance energético y el COD introducidos en la sección 3.1 y 3.2 respectivamente.

Se analiza el caso de una placa finita con una fisura central, con las dimensiones indicadas en la Figura 3. Se aplican tensiones prescritas con una función rampa en dos bordes opuestos de la placa, aplicándose la carga lo suficientemente lenta de modo que pueda considerarse estática. Se considera el problema como de estado plano de deformaciones.

Las propiedades del material y los parámetros utilizados en el modelo se presentan en la Tabla 1.

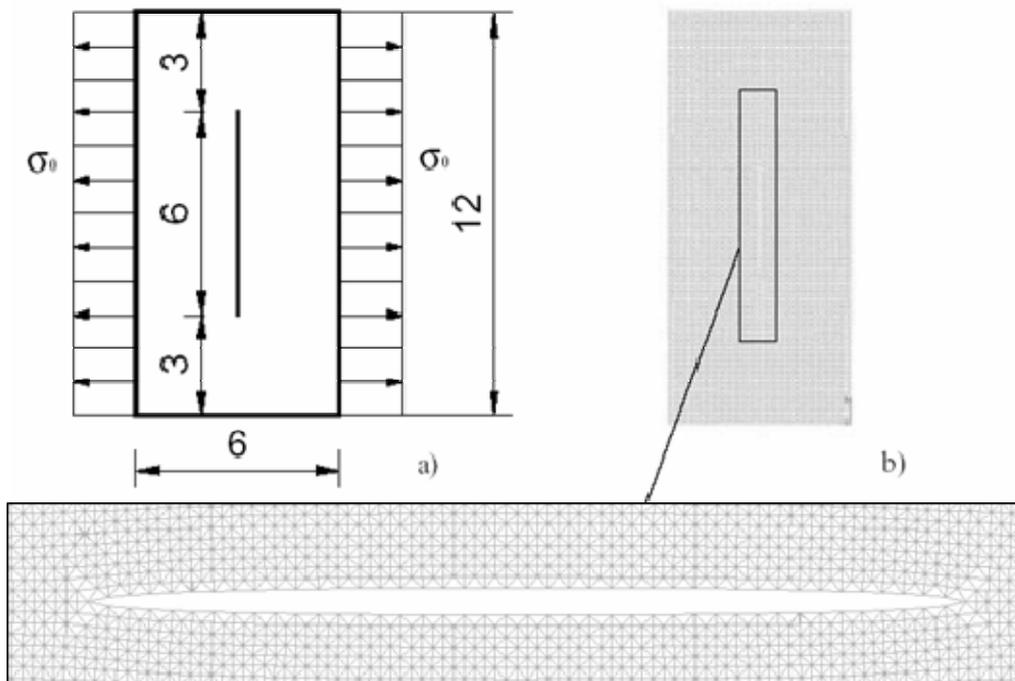


Figura 3: Esquema de la placa en estudio. a) Geometría de la placa, en mm. b) detalle con el modelo deformado, para observar la fisura.

E (módulo de elasticidad)	$2,1 \times 10^9$ Pa
$\nu$ (coeficiente de Poisson)	0,3
$\rho$ (densidad)	$908 \text{ kg/m}^3$
Gc (tenacidad)	500 N/m

Tabla 1: Propiedades del material para el ejemplo estudiado y parámetros utilizados en la simulación.

En trabajos previos, Barrios D'ambra y otros (2006) y Spellmeyer y otros (2001), para realizar el modelado de la fisura se debilitaban los elementos que se encontraban en la posición geométrica de la misma. En este trabajo se construye la fisura duplicando los nodos en la posición de la misma, esto permite generar una fisura mas fina.

En la Figura 4 se reproduce el gráfico de Rooke y Cartwright (1976), que muestra el resultado teórico de referencia para la placa en estudio. El factor de intensidad de tensiones para este caso, obtenido del gráfico para las relaciones  $a/b=0.50$  y  $b/h=0.50$ , resulta  $K/K_0=1.93$ .

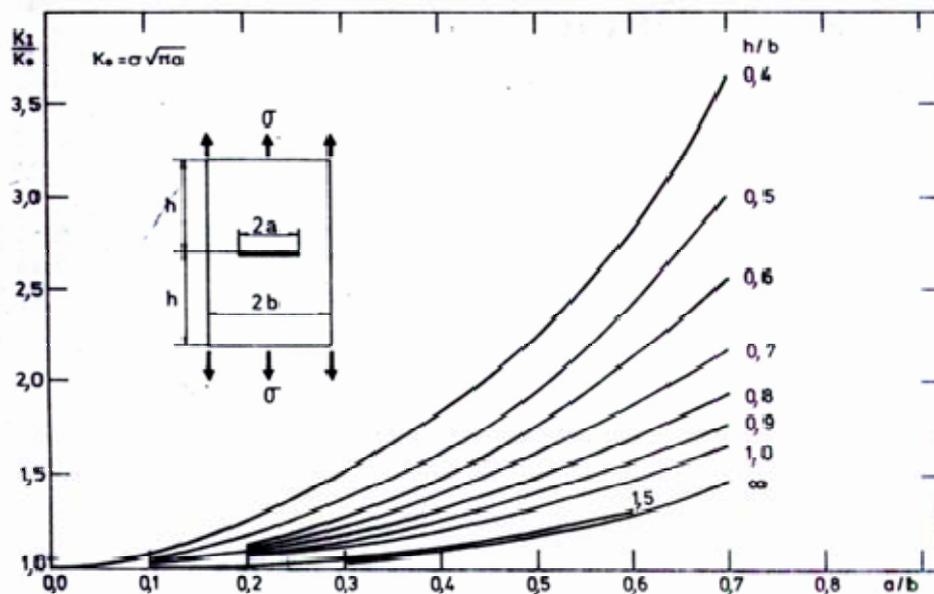


Figura 4: Factor de intensidad de tensiones para el caso analizado según Rooke y Cartwright (1976).

Con los valores de la Tabla 1 y el valor de  $K/K_0=1.93$  obtenido, es posible calcular el valor de la tensión crítica, a partir de ecuación 11, que producirá la propagación inestable de la fisura que resulta en aproximadamente  $\sigma = 4 \times 10^6$  Pa .

#### Caso a: Cálculo del K estático utilizando el COD

A continuación, se determinaron con el MED los desplazamientos  $v$  de pares de puntos enfrentados a ambos lados de la fisura, en las proximidades del extremo de la misma.

En particular, para este trabajo se midieron los desplazamientos de los nudos correspondientes con los primeros 10 módulos contados desde el extremo de la fisura, y se despreciaron los primeros cinco valores, por estar muy cercanos a la punta de la fisura (se considera que con este método son necesarios 5 módulos para captar la deflexión). A partir de estos desplazamientos y mediante una extrapolación se calculó el valor del COD para cuando

la posición relativa,  $r/a$ , del nudo tiende a cero.

El factor de intensidad de tensiones normalizado versus tensión remota se grafica en la Figura 5.

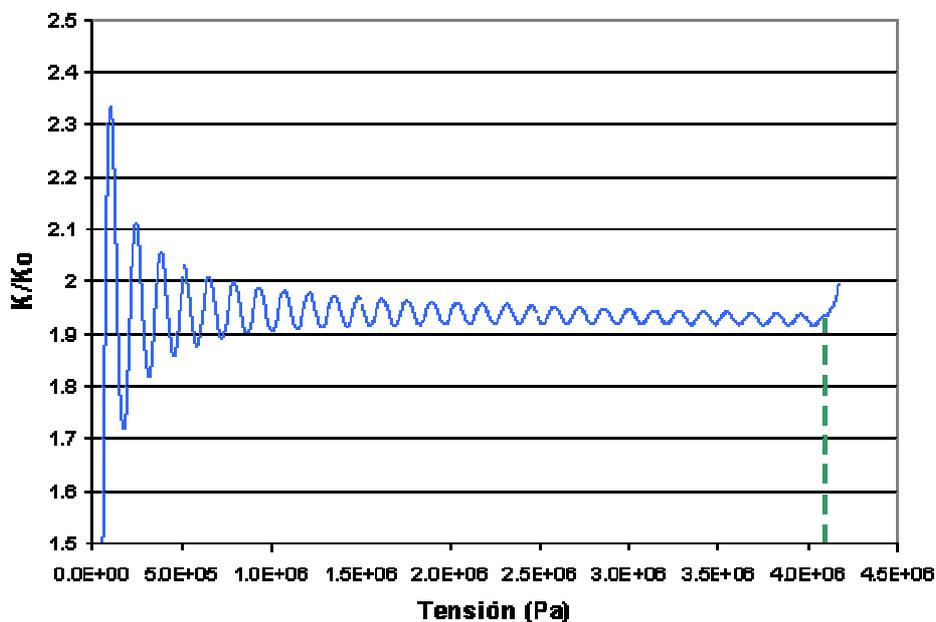


Figura 5: Factor de intensidad de tensiones normalizado

En la Figura 6 se muestra la variación de energía específica de fractura  $G_f$  con la tensión remota aplicada.

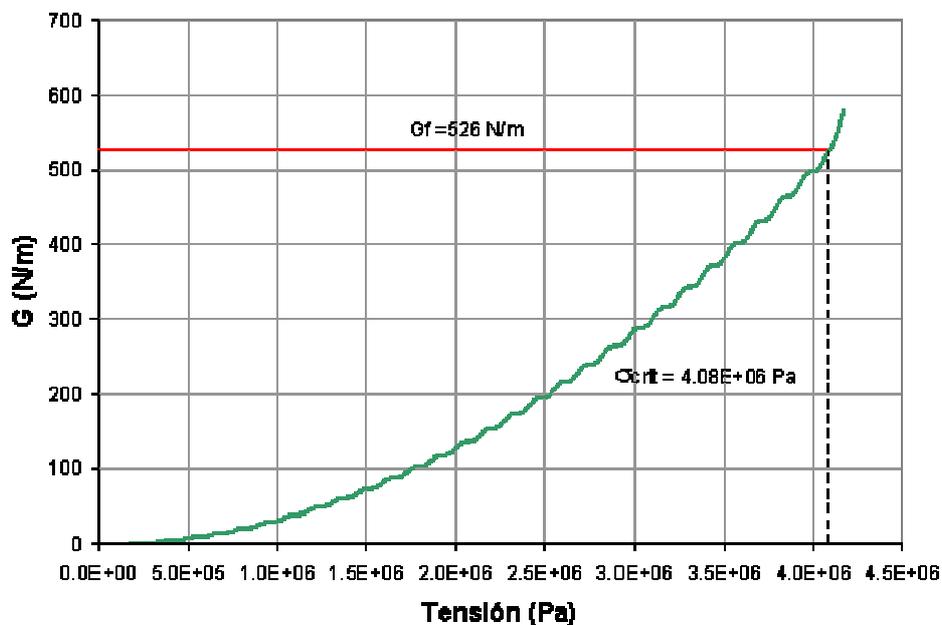


Figura 6: Variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada

Como se puede observar en Figura 5 y en Figura 6 la tensión crítica es aproximadamente  $4.08 \times 10^6$  Pa, valor prácticamente igual al teórico.

**Caso b: Cálculo del K estático utilizando el método del balance energético**

Para la determinación del factor de intensidad de tensiones estático mediante el uso del balance energético, se modeló la misma placa que en el caso anterior obteniendo las energías resultantes a través de la utilización del MED. A partir de las mismas se calculó la energía específica de fractura  $G$ , para diferentes valores de tensión aplicada. Se realizaron dos simulaciones con tamaños de fisura levemente diferentes. Si las cargas son aplicadas lentamente, es posible despreciar el valor de la energía cinética. De esta manera se puede obtener el  $G$  por medio de la ecuación , y el factor de intensidad de tensiones  $K$  normalizado, (ecuación 11). La Figura 7 muestra el  $K$  normalizado versus tensiones.

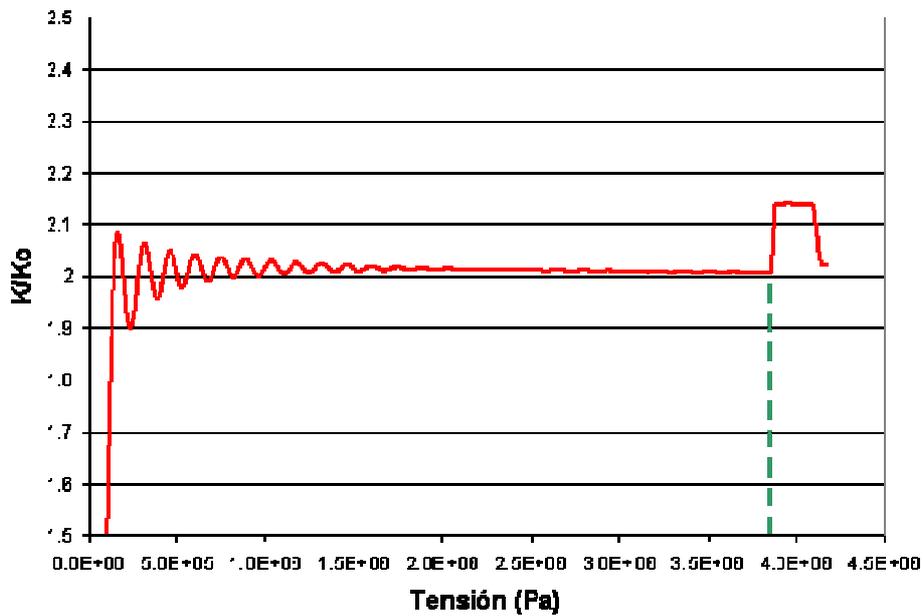


Figura 7: K estático normalizado

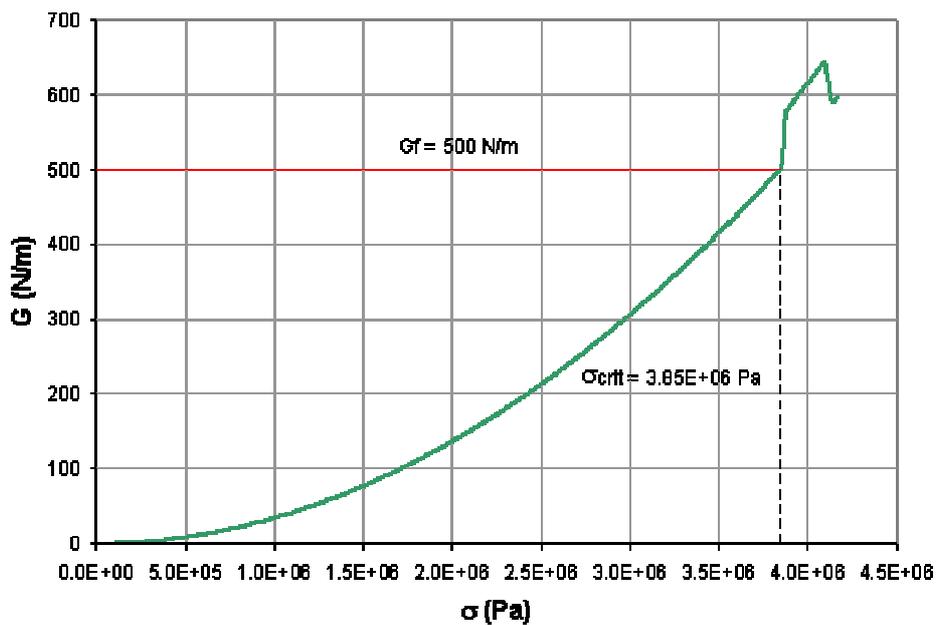


Figura 8: Variación de la energía específica de fractura con la tensión remota aplicada

En la **Figura 8** se muestra la variación de la energía específica de fractura  $G_f$  con la tensión remota aplicada.

El valor  $K/K_0$  obtenido con el método del balance energético ilustrado en la **Figura 7**, resulta algo superior al valor teórico de referencia (1.93), con un error del 4.1%. Sin embargo, resultados obtenidos por **Tech et al. (2003)**, con un mayor refinamiento del mallado ( $L_{co}/a > 50$ ), muestran que el error cometido puede reducirse a valores inferiores al 2 %.

Aplicando el método del balance de energía para determinar el factor de intensidad de tensiones, la tensión crítica es  $3.85 \times 10^6$  Pa, como se ilustra en las **Figura 7** y **Figura 8**, este valor es levemente inferior al calculado según los ábacos de la **Figura 4**. ( $\sigma_{crit}=4.0 \times 10^6$  Pa).

#### 4.2 Comparación de configuraciones de rotura en función de la velocidad de carga

Sin duda métodos numéricos como el método de los elementos finitos o el método de los elementos de contorno presentan mayor precisión y flexibilidad para calcular parámetros fractomecánicos que el Método de los Elementos Discretos, pero este último puede ser competitivo a la hora de estudiar propagación inestable de fisuras.

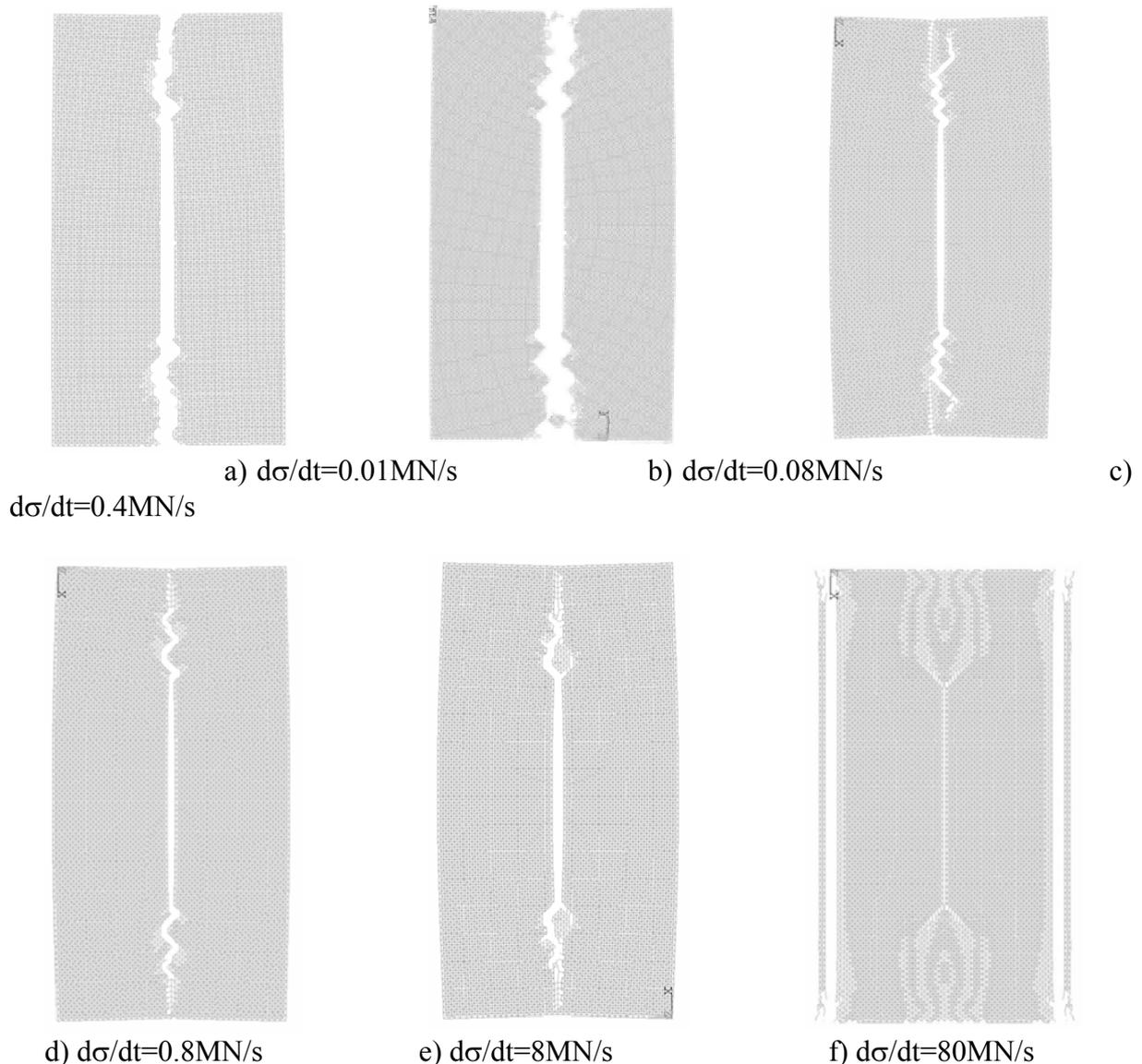


Figura 9: Configuración de rotura para diferentes velocidades de aplicación de cargas

En los esquemas anteriores se realiza una ilustración de estas posibilidades presentando la placa con fisura central ya descrita sobre la cual se variaron las velocidades de carga presentando las configuraciones finales ilustradas en la [Figura 9](#)

En las configuraciones presentadas en la [Figura 9](#) es posible observar como a medida que aumenta la velocidad de carga aparece mayor tendencia de la fisura ramificarse, este efecto es observado en bibliografía clásica de Fractura ([Ewalds y Wanhill, 1984](#)).

Para todas estas velocidades se calcularon los factores de intensidad de tensiones normalizados,  $K/K_0$ , utilizando el COD. Los mismos se graficaron en la [Figura 10](#).

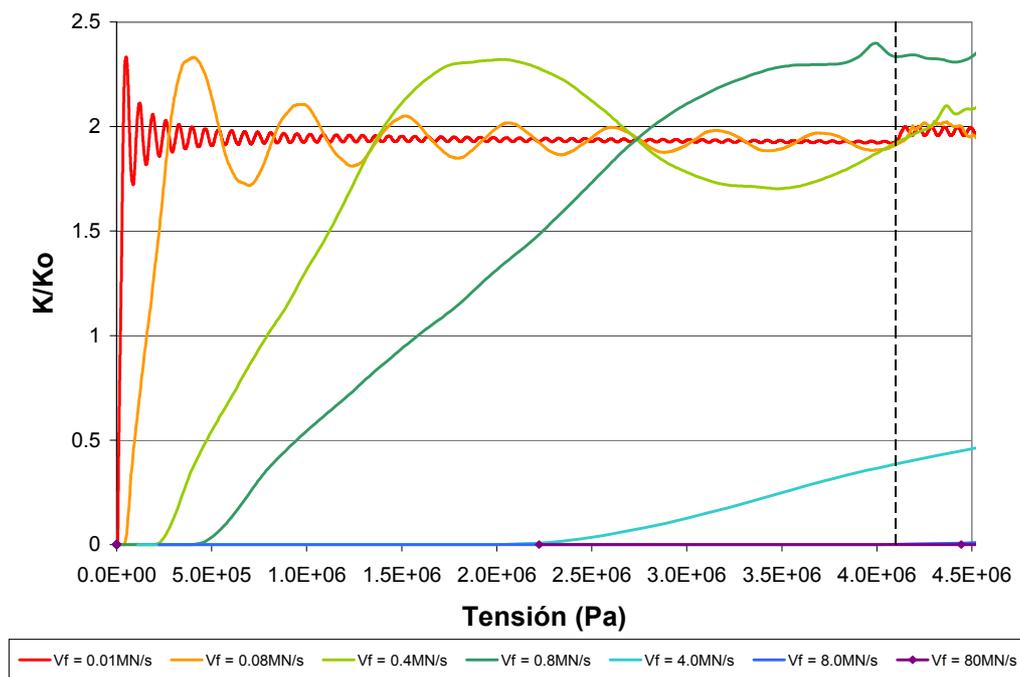


Figura 10: Influencia de la velocidad de carga para las curvas  $K/K_0$  vs Tensión aplicada

### 4.3 Cálculo del K dinámico para una placa con una fisura central

Se realiza a continuación el cálculo del factor de intensidad de tensiones normalizado  $K/K_0$  obtenido a partir de la determinación del COD.

En este caso se analiza una placa finita con una fisura central, con las dimensiones indicadas en la [Figura 11](#). Sobre la misma se aplica una tensión prescrita constante a través del tiempo (Heaviside) de  $\sigma_0 = 0.4 \times 10^8$  Pa, considerando el problema como de estado plano de deformaciones.

Las propiedades del material y los parámetros utilizados en el modelo se presentan en la [Tabla 2](#).

E (módulo de elasticidad)	$2.0 \times 10^{11}$ Pa
$\nu$ (coeficiente de Poisson)	0.3
$\rho$ (densidad)	$5000 \text{ kg/m}^3$
$\sigma_0$ (tensión remota prescrita)	$0.4 \times 10^9$ Pa

Tabla 2: Propiedades del material para el ejemplo estudiado y parámetros utilizados en la simulación

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado para calcular el  $K$  estático, se calcula el valor de  $K$  en función del tiempo a partir de los valores medios de  $K/K_0$  calculados con la ecuación 16 utilizando el valor de abertura de fisura de los puntos indicados en rojo en el detalle de la Figura 11.

En la Figura 12 se presentan los resultados en términos del  $K_d(t)/K_0$  en función del tiempo.

En esta figura es posible observar que los resultados obtenidos en este trabajo con el MED aplicando el COD tienen una muy buena concordancia con la de otros autores con técnicas como diferencias finitas y elementos de contorno (BEM).

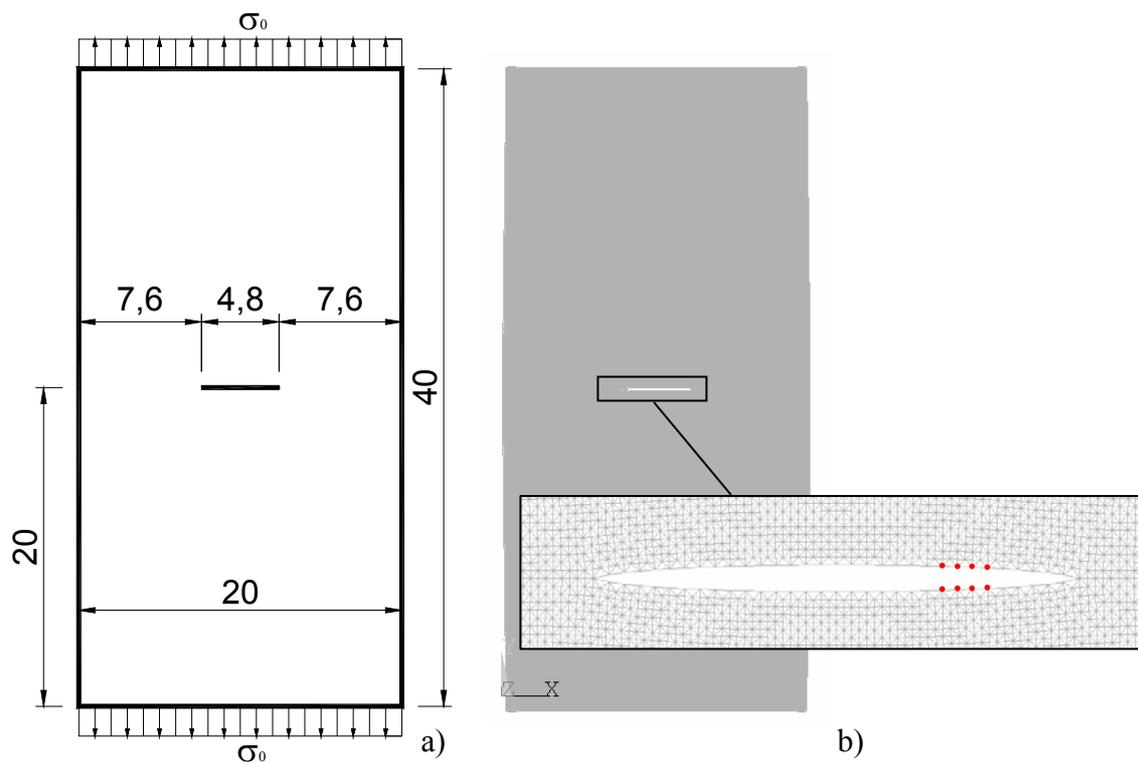


Figura 11: Esquema de la placa en estudio. a) Geometría de la placa, en mm.  
b) detalle modelo con MED ya deformado, para poder observar la fisura.

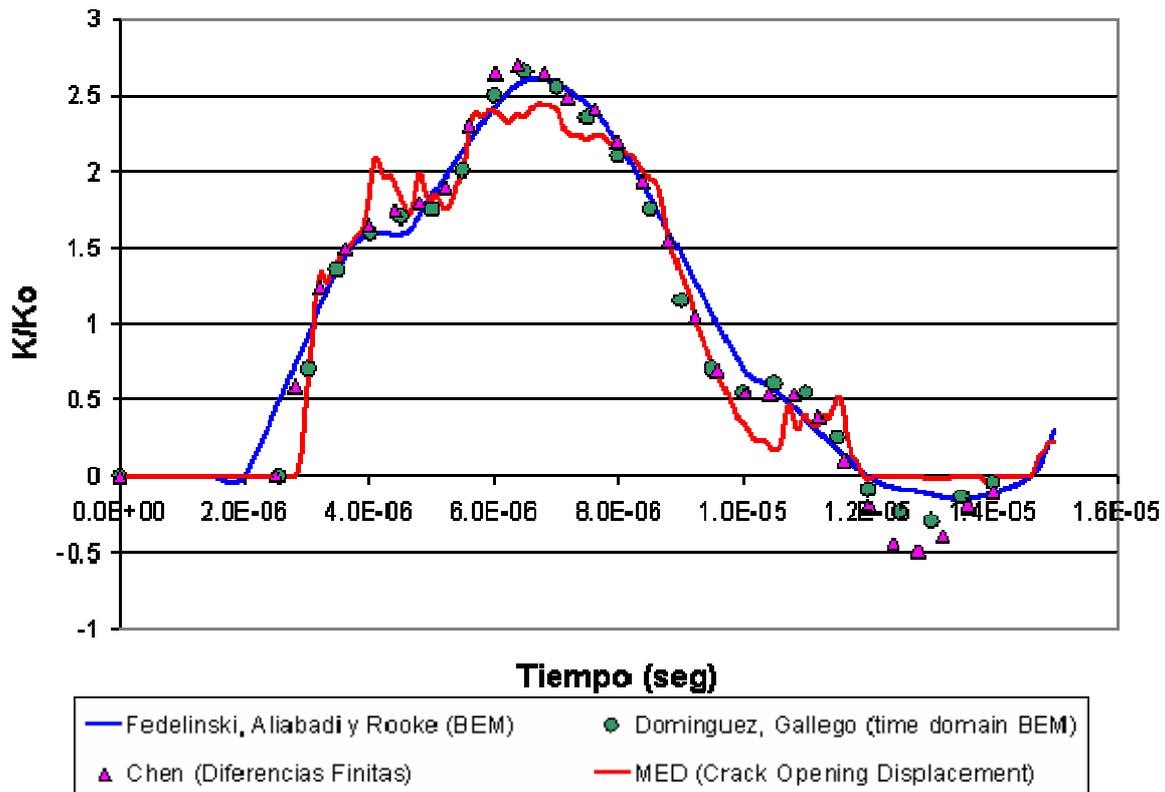


Figura 12: Comparación de resultados en términos del K dinámico vs tiempo obtenidos en este trabajo y los obtenidos por otros autores.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró la capacidad del Método de los Elementos Discretos (MED) para calcular parámetros de mecánica de fractura, en especial el factor de intensidad de tensiones, e identificar la situación crítica de propagación de una fisura.

En el desarrollo de la investigación fue posible obtener las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos con el MED para determinar el factor de intensidad de tensiones estático, mostraron buena concordancia utilizando el método COD y el método del balance de energías, y también con los valores previstos por la bibliografía.

- Para el cálculo del factor de intensidad de tensiones dinámico, la aproximación por el método COD, ha demostrado excelentes resultados al ser contrastada con los valores obtenidos por otros métodos numéricos para el ejemplo estudiado.

- La capacidad del MED en representar la situación crítica en la cual la fisura se propagaría en forma inestable también fue ilustrada, siendo este el potencial que vuelve competitivo al MED frente a métodos numéricos clásicos de cálculo como el método de los elementos finitos y el método de los elementos de contorno.

Ventajas del COD respecto del método del Balance Energético:

- Da mejores resultados con menor discretización.
- No se necesita de dos corridas con longitudes de fisura levemente diferentes, a diferencia del método del balance energético.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo de la Secretaría General de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), así como también a la Facultad de Ingeniería de la misma Universidad y al CNPq (Proyecto Prosul 2006-2007), órganos de fomento del gobierno de Brasil. Estas entidades apoyaron directa o indirectamente el trabajo aquí presentado.

## REFERENCIAS

- M.H. Aliabadi and D.P. Rooke. *Numerical Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- T.L. Anderson. *Fracture Mechanics*. CRC Press, 1995.
- R. Barrios D'Ambra, I. Iturrioz, L. Fasce, P. Frontini, Y A. Cisilino. Utilización del método de los elementos discretos en la simulación numérica de ensayos de impacto para caracterización de materiales compuestos poliméricos. *Mecánica Computacional*, 21:1121–1134, 2002.
- P.A. Cundall and R.D. Hart. Numerical modelling of discontinua. *Proc 1st US Conf Discrete Element Meth, Golden, CO*, 1–17, 1989.
- Y. Hayashi. “Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear”. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982.
- I. Iturrioz y J.D. Riera. Estudio numérico del efecto de explosivos sobre una superficie plana. *Mecánica Computacional*, 20:422–429, 2001.
- A. Needleman. A Continuum Model for Void Nucleation by inclusion debonding, *Journal of Applied Mechanics*, 54:525–531, 1987.
- J.D. Riera and I. Iturrioz. Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. *Communications in Num. Meth. in Eng.*, 11:417–426, 1995.
- J.D. Riera and I. Iturrioz. Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. *Nuclear Engineering and Design*, 179:135–144, 1998.
- M.M. Rocha. “Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil”. Porto Alegre, 123 p. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.
- D.P. Rooke and D.J. Cartwright. *Compendium of stress intensity factors*. Her majesty's Stationery Office, 1976.
- T. Spellmeyer, R. Barrios D'Ambra, y I. Iturrioz. Simulación numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos. *Mecánica Computacional*. 20:506–513, 2001.
- T.W. Tech, R. Batista, I. Iturrioz, A. Cisilino. Aplicação do Método dos Elementos Discretos em Mecânica de Fratura Estática e Dinâmica. *Cilamce*, 2003.
- P. Fedelinski, M.H. Aliabadi & D.P. Rooque. The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 12 (1993) 203-210.
- Dominguez, J. & Gallego, R. Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 1992, 33, 635-47.
- Chen, Y.M., Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code), *Engng Fracture Mech.*, 1975, 7, 653-60.
- Timoshenko – Goodier “Teoría de la elasticidad” Ed. URMO 1968.
- R. Barrios D'Ambra, I. Iturrioz, H. Cóceres, L. E. Kostascki, T. W. Tech, A. Cisilino. Determinación del Factor de Intensidad de Tensiones aplicando el método de los elementos

- Discretos. *Anales de las Jornadas Sudamericanas, 2006*, 1380-1389.
- H.L Ewalds, R.J.H. Wanhill “Fracture mechanics”, Copublished by Edward Arnold and Delfse Uitgevers Maatschappij, 1984. ISBN 0-7131-3515-8 for Arnold and ISBN 90-6562-024-9 for DUM Editions.
- Wells, A. A., “Instable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture.” *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, Vol 1, Paper 84, Cranfield, UK, 1961.