

ASPECTOS DE INCERTIDUMBRE EN LA DINÁMICA DE METAESTRUCTURAS PIEZOELÉCTRICAS CURVAS

ASPECTS OF UNCERTAINTY IN THE DYNAMICS OF CURVED PIEZOELECTRIC METAESTRUCTURES

Lucas E. Di Giorgio^a y Marcelo T. Piovan^{a,b}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional,
Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina,
ldigiorgio@frbb.utn.edu.ar, <http://frbb.utn.edu.ar>*

^b*CONICET, mpiovan@frbb.utn.edu.ar, <http://frbb.utn.edu.ar>*

Palabras clave: Metamaterial, viga curva, piezoeléctrico, incertidumbre, modelo estocástico.

Resumen. El objetivo del presente trabajo es el análisis de incertidumbre en la respuesta dinámica de metaestructuras curvas formadas por piezoeléctricos en configuración Bimorph. El mismo se realiza mediante un modelo de elementos finitos 1D derivado de la teoría de elasticidad lineal y piezoelectricidad general, obtenido a través del Principio de Trabajo Virtual y la Ley de Gauss. Los parámetros considerados fuente de incertidumbre son la resistencia eléctrica utilizada en la realimentación, el radio de curvatura y la longitud del piezoeléctrico. Las Funciones de Densidad de Probabilidad de los mismos se obtienen del Principio de Máxima Entropía, y se utilizan junto al modelo 1D para la construcción del modelo estocástico mediante el Método de Monte Carlo. Se realizan distintas configuraciones para evaluar la sensibilidad de los distintos parámetros.

Keywords: Metamaterial, curved beam, piezoelectric, uncertainty, stochastic model.

Abstract. The objective of this work is the analysis of uncertainty in the dynamic response of curved meta-structures made up of piezoelectrics in Bimorph configuration. It is done through a finite element model 1D derived from the theory of linear elasticity and general piezoelectricity, obtained through the Virtual Work Principle and Gauss's Law. The parameters considered source of uncertainty are the electrical resistance used in the feedback, the radius of curvature and the length of the piezoelectric. The Probability Density Functions thereof are obtained from the Principle of Maximum Entropy, and are used together with the 1D model for the construction of the stochastic model using the Monte Carlo Method. Different configurations made to evaluate the sensitivity of the different parameters.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras con amortiguación piezoeléctrica han sido estudiadas por varios años debido a su capacidad de reducir vibraciones sin necesidad de utilizar masas considerables, problema típico de las estructuras puramente mecánicas (Lesieutre, 1998). En la actualidad, los metamateriales o metaestructuras están conformados por un arreglo de *celdas* o *bloques* que se repiten con el fin de obtener la dinámica deseada. El enfoque típico para el estudio de estos metamateriales es considerarlos de longitud infinita, permitiendo de esta manera la utilización del teorema de Bloch para obtener su estructura de bandas (Brillouin, 2003). En la implementación, sin embargo, las dimensiones finitas exigen el estudio de la dinámica a través de modelos que incorporen tanto a las dimensiones reales, así como también a las condiciones de borde (Erturk y Inman, 2011), (Surabhi, 2014).

El presente trabajo presenta un modelo reducido 1D de un metamaterial curvo de radio constante, conformado por un arreglo de bloques piezoeléctricos en configuración Bimorph, realimentados a través de una resistencia de carga. El modelo reducido será capaz de reproducir la dinámica del metamaterial en todas sus dimensiones con el propósito de cuantificar la propagación de incertidumbre producida por algunos parámetros constructivos hacia la dinámica (Sampaio y Cataldo, 2011), (Piovan et al., 2013). Este trabajo no pretende ecualizar la estructura con el fin de eliminar bandas de frecuencias, sino de analizar la sensibilidad del modelo a ciertos parámetros. Es por eso que se utiliza una resistencia de carga, que representa la resistencia asociada al futuro inductor a colocar en paralelo para crear amortiguación piezoeléctrica mencionada con anterioridad.

El artículo posee la siguiente estructura: en primer lugar se enuncian las hipótesis constitutivas del modelo, con las cuales se genera el modelo determinístico a partir de la teoría de elasticidad lineal y piezoelectricidad general. Luego se propone una formulación del modelo en elementos finitos (Bathe, 1982) para efectuar los cálculos determinísticos. De esta formulación, a través de un enfoque Paramétrico Probabilístico (PPA) (Soize, 2005), se crea el modelo estocástico, incorporando incertidumbre a los parámetros de interés, convirtiéndolos en variables aleatorias cuyas funciones de densidad de probabilidad (PDF) se deducen del Principio de Máxima Entropía (Jaynes, 1957). Finalmente se utiliza el método de Monte Carlo para realizar el análisis estadístico, donde los resultados se presentan en gráficos acordes.

2. MODELO DETERMINÍSTICO

2.1. Descripción del modelo

La Fig.1 representa la metaestructura curva conformada por bloques de material piezoeléctrico y un sustrato portante. La configuración de los piezoeléctricos dentro de cada bloque es *Bimorph Serie* conectados a través de una resistencia eléctrica de carga r_c . La cantidad de bloques es variable al igual que la longitud relativa del piezoeléctrico Δp [0 a 1]. La sección transversal es regular y el origen del sistema de referencia c está ubicado en el centroide. El modelo teórico se basa en las siguientes hipótesis:

- La sección es rígida en su plano.
- Pequeños desplazamientos y elasticidad lineal.
- Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión.
- Se define una función de alabeo referida al centroide.

- El campo eléctrico E está en la dirección de y .

De las hipótesis se desprende el siguiente campo de desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xc} - \omega\phi_w \\ u_{yc} \\ u_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

siendo

$$\phi_x = \theta_x, \phi_y = \theta_y, \phi_z = \theta_z - \frac{u_{xc}}{R}, \phi_w = \theta_w + \frac{\theta_y}{R} \quad (2)$$

En las ecuaciones anteriores u_{xc}, u_{yc}, u_{zc} son los desplazamientos del centro de referencia, θ_y, θ_z son los parámetros de flexión, θ_x es el ángulo de torsión y θ_w corresponde a la intensidad de alabeo, siendo su función definida como sigue:

$$\omega = \bar{\omega}\mathcal{F} \text{ with } \mathcal{F} = \frac{R}{R+y} \text{ and } \bar{\omega} = -xy \quad (3)$$

2.2. Ecuaciones constitutivas y Deformaciones

Utilizando notación de Voigt (i.e. $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$) y teniendo en cuenta que: $S_2 = S_3 = S_5 = 0$ las ecuaciones constitutivas reducidas para el piezoeléctrico se expresan según la Ec.4 (IEEE, 1988).

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_4 \\ T_6 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & 0 & 0 & -e_{31} \\ 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^E & 0 \\ e_{31} & 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_4 \\ S_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

donde T_i es la componente del vector tensión (N/m^2), D_i el desplazamiento eléctrico (Cb/m^2), S_i la deformación, E_i la componente del vector de campo eléctrico (V/m), c^E la constante de elasticidad bajo campo eléctrico constante (N/m^2), e la constante de acoplamiento (Cb/m^2) y ϵ^S la permitividad eléctrica bajo estrés constante (Cb^2/Nm^2).

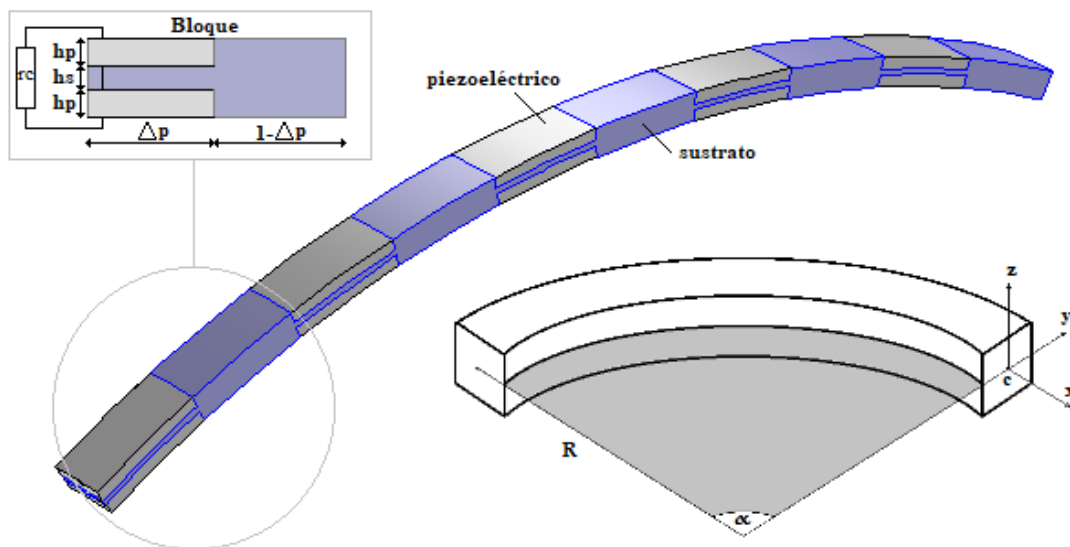


Figura 1: Metamaterial curvo.

Las deformaciones de la estructura curva en función al campo de desplazamientos de la ec.(1) se expresan como sigue (Piovan et al., 2012) :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_4 \\ S_6 \end{Bmatrix} = F \begin{bmatrix} 1 & z & -y & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} & -(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} & (y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{D1} \\ \varepsilon_{D2} \\ \varepsilon_{D3} \\ \varepsilon_{D4} \\ \varepsilon_{D5} \\ \varepsilon_{D6} \\ \varepsilon_{D7} \\ \varepsilon_{D8} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

definiendo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= u'_{xc} + \frac{u_{yc}}{R} & \varepsilon_{D2} &= \theta'_y - \frac{\theta_x}{R} & \varepsilon_{D3} &= \theta'_z - \frac{u'_{xc}}{R} & \varepsilon_{D4} &= \theta'_w + \frac{\theta'_y}{R} \\ \varepsilon_{D5} &= u'_{yc} - \theta_z & \varepsilon_{D6} &= u'_{zc} + \theta_y & \varepsilon_{D7} &= \theta'_x - \theta_w & \varepsilon_{D8} &= \theta'_x + \frac{\theta_y}{R} \end{aligned}$$

2.3. Principio de Hamilton

El siguiente indicador variacional, a partir del Principio de Hamilton, expresa lo siguiente:

$$V.I. = \int_{t_1}^{t_2} [\delta(T^* + W_e^*) + \delta W_{nc}] dt = 0 \quad (6)$$

Siendo

$$T^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega \quad (7)$$

y

$$W_e^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\{E\}^T [\epsilon] \{E\} + 2\{S\}^T [e] \{E\} - \{S\}^T [c] \{S\}) d\Omega \quad (8)$$

Reemplazando Ec.7 y Ec.8 en Ec.6 se obtiene la expresión a utilizar en la discretización en elementos finitos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\{\delta E\}^T [\epsilon] \{E\} + \{\delta E\}^T [e] \{S\} + \{\delta S\}^T [e] \{E\} - \{\delta S\}^T [c] \{S\} \\ - \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} - \{\delta u\}^T f_i) d\Omega - \int_S \{\delta u\}^T t_i = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

donde f_i y t_i son las fuerzas volumétricas y superficiales externas.

2.4. Discretización en elementos finitos

La formulación en elementos finitos se obtiene a través de la discretización de la Ec.9 considerando el campo eléctrico $E_3 = V/h_p$, donde h_p es la altura del piezoeléctrico. La discretización se llevó a cabo mediante elementos isoparamétricos de 3 nodos y funciones de forma

cuadráticas (Piovan y Cortinez, 2007). El vector de las variables de desplazamiento puede expresarse:

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \left\{ \bar{\mathbf{U}}_e^{(1)}, \bar{\mathbf{U}}_e^{(2)}, \bar{\mathbf{U}}_e^{(3)} \right\}, \quad \bar{\mathbf{U}}_e^{(j)} = \{ u_{xc_j}, u_{yc_j}, \theta_{z_j}, u_{zc_j}, \theta_{y_j}, \phi_{x_j}, \theta_{x_j} \}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

El método de elementos finitos deriva en las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\bar{\mathbf{W}} + \mathbf{C}_{RD}\dot{\bar{\mathbf{W}}} + \mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{W}}} - \mathbf{T}V_0 &= \bar{\mathbf{F}} \\ \mathbf{T}^T\dot{\bar{\mathbf{W}}} + C_p\dot{V}_0 + \frac{V_0}{rc} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{K} son las matrices de masa y elasticidad, $\mathbf{C}_{RD} = \eta_1\mathbf{M} + \eta_2\mathbf{K}$ es la matriz de amortiguamiento de Raleigh (Piovan et al., 2013) y \mathbf{T} la matriz de acoplamiento.

En estado estacionario, despejando V_0 en Ec.11.b y reemplazando en Ec.11.a se obtiene:

$$\widehat{\mathbf{W}}(\omega) = [\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C}_{RD} + (j\omega\mathbf{T}\mathbf{T}^T)\left(\frac{1}{rc} + j\omega C_p\right)^{-1}]^{-1}\widehat{\mathbf{F}}(\omega) \quad (12)$$

donde $\widehat{\mathbf{W}}$ y $\widehat{\mathbf{F}}$ son las transformadas de Fourier de los vectores de desplazamientos y fuerza respectivamente.

3. MODELO PROBABILÍSTICO

El modelo probabilístico se construye a partir de la formulación de elementos finitos del modelo determinístico, considerando como variables aleatorias a los parámetros que pueden variar debido a incertidumbre en la construcción de la estructura. Estas variables aleatorias son representadas por funciones de densidad de probabilidad (PDF) obtenidas mediante el principio de Máxima Entropía (Jaynes, 1957). Si bien el modelo posee gran cantidad de parámetros inciertos, son de interés para el presente trabajo el radio de curvatura R , la resistencia de carga rc , y la longitud del piezoeléctrico sobre el sustrato Δp . (Ver Fig.1)

Las variables aleatorias V_i , $i = 1, 2, 3$ se consideran acotadas, cuyos valores límites son conocidos. Se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor determinístico de cada parámetro con el fin de chequear convergencia. Además, al no existir correlación o dependencia entre las mismas, se asumen variables aleatorias independientes. De lo anterior, las PDFs de las variables pueden ser expresadas:

$$p_{V_i}(v_i) = \mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(v_i) \frac{1}{2\sqrt{3}\underline{V}_i\delta_{V_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

donde $\mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(v_i)$ es el soporte, L_{V_i} y U_{V_i} cotas inferior y superior, \underline{V}_i el valor esperado y δ_{V_i} el coeficiente de variación, todos pertenecientes a la variable V_i .

Mediante el modelo de elementos finitos de la Ec.12, a través del método de Monte Carlo, con las PDFs definidas en Ec.13 el proceso estocástico puede definirse de la siguiente manera:

$$\widehat{\mathbf{W}}(\omega) = [\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C}_{RD} + (j\omega\mathbf{T}\mathbf{T}^T)\left(\frac{1}{rc} + j\omega C_p\right)^{-1}]^{-1}\widehat{\mathbf{F}}(\omega) \quad (14)$$

La convergencia del método es analizada en media cuadrática a través de la expresión:

$$conv(N_S) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_W \left\| \widehat{\mathbf{W}}_j(\omega) - \widehat{\mathbf{W}}(\omega) \right\|^2 d\omega} \quad (15)$$

donde N_S es el número de iteraciones de Monte Carlo y W es la banda de frecuencia del análisis.

4. ESTUDIOS COMPUTACIONALES

4.1. Validaciones preliminares

En esta sección se compara el modelo determinístico reducido 1D respecto a otras realizaciones. El primer ejemplo corresponde a la comparación del modelo 1D con el modelo analítico propuesto por (Erturk y Inman, 2011) y el modelo de elementos finitos propuesto por (Surabhi, 2014), ambos para una estructura bimorph completa (i.e. un solo bloque con $\Delta p = 1$) y rectos (i.e. $R \rightarrow \infty$). La estructura a comparar está construida por piezoeléctricos PZT-5A ($C_{11} = 61GPa$, $C_{55} = 21,1GPa$, $\epsilon_{33} = 13,33e^{-9}F/m$, $e_{31} = 0,33C/m^2$, $\rho = 7750Kg/m^3$) y un sustrato de aluminio ($E = 70GPa$, $G = 26,32GPa$, $\nu = 0,33$, $\rho = 2700Kg/m^3$). Las dimensiones de la estructura son: largo $L = 30mm$, ancho $b = 5mm$, altura piezo $h_p = 0,15mm$, altura sustrato $h_s = 0,05mm$. Cabe destacar que tanto el modelo analítico de Erturk como el modelo FEM de Surabhi trabajan solo en el plano xz . La Tabla.1 muestra los valores de las frecuencias de los 3 primeros modos con los piezoeléctricos cortocircuitados y a circuito abierto, donde el porcentaje de error del modelo 1D propuesto no es mayor al 0.33 %.

Modelo	Frecuencia en circuito abierto y cerrado [Hz]					
	f_1^{cc}	f_2^{cc}	f_3^{cc}	f_1^{ca}	f_2^{ca}	f_3^{ca}
Modelo reducido 1D	185.7	1163.5	3254.9	191.8	1175.5	3266.6
Modelo de Erturk	185.1	1159.7	3245.3	191.1	1171.6	3254.1
Modelo de Surabhi	185.1	1160.7	3252.4	191.1	1171.6	3254.1

Tabla 1: Comparación de las frecuencias naturales para las distintas realizaciones

El segundo ejemplo compara las funciones de respuesta en frecuencia entre el modelo reducido 1D y un modelo de elementos finitos 3D realizado en Comsol. Los parámetros constitutivos de la estructura son los mismos que los del ejemplo anterior. Las dimensiones de la misma son: largo $L = 100mm$, ancho $b = 5mm$, altura piezo $h_p = 1mm$, altura sustrato $h_s = 0,5mm$. La estructura es recta de 5 bloques, con $\Delta p = 0,5$. La Fig.2 muestra los resultados computacionales, donde puede apreciarse la similitud entre las respuestas en los casos de cortocircuito y circuitoabierto. Sin embargo cabe destacar el ahorro de tiempo computacional, siendo el modelo reducido propuesto 22 veces más rápido que la realización en Comsol3D (30seg. vs. 11min.).

4.2. Cuantificación de incertidumbre en la respuesta dinámica

En esta sección se realiza el estudio de propagación de incertidumbre de los parámetros de interés a través de la dinámica de la estructura. Los parámetros a evaluar son el radio de curvatura R , la resistencia de carga rc y la longitud relativa del piezoeléctrico Δp . El estudio se realiza evaluando la respuesta en frecuencia de la estructura cuyas condiciones de borde son *empotrado-libre*, aplicando un impacto de $\|F(L)\| = 1,0 N$ en el extremo libre (*FRF*). La propagación de incerteza paramétrica se realiza: primero considerando la variación de un parámetro a la vez, manteniendo los restantes fijos en el valor esperado (valor determinístico), luego variando a los mismos de 2 en 2, y finalmente variando los 3 parámetros en simultáneo. La estructura para este análisis es curva, conformada por 5 bloques cuyas dimensiones son: largo $L = 100mm$, ancho $b = 5mm$, altura piezo $h_p = 1mm$, altura sustrato $h_s = 0,5mm$.

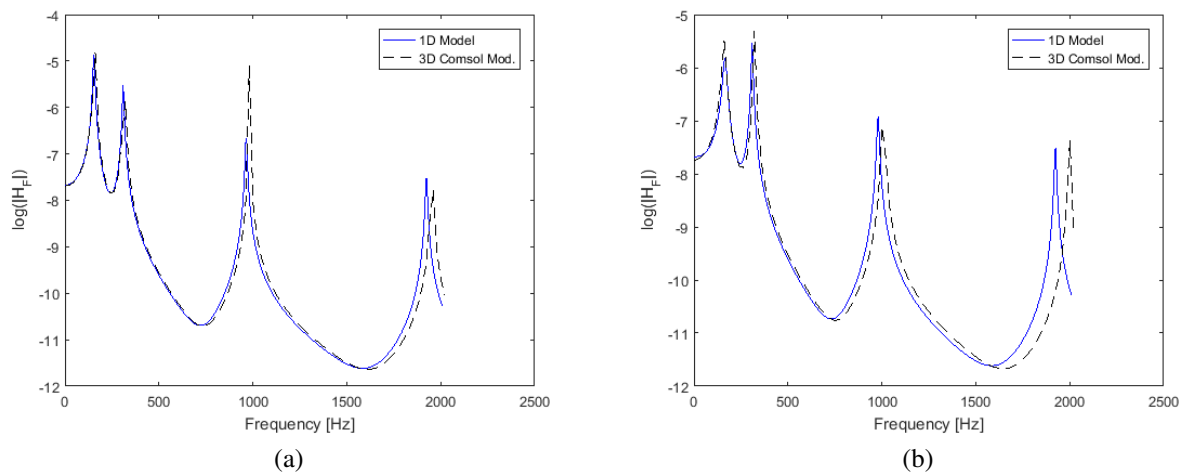


Figura 2: FRF a través del modelo 1D y el modelo en Comsol 3D. (a) Cortocircuito, (b) Circuito abierto.

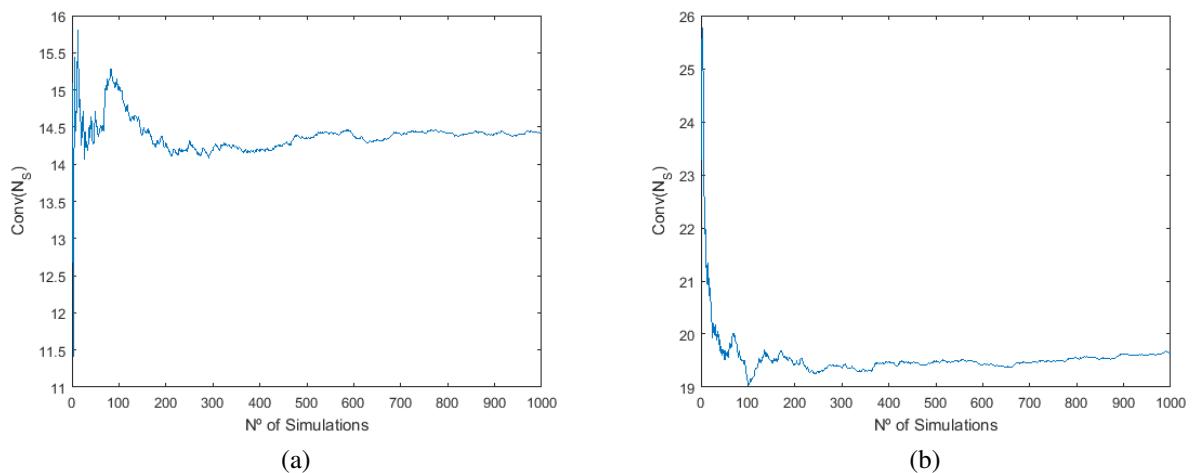


Figura 3: Convergencia para el caso de $CoV = 0,1$. (a) Radio aleatorio, (b) Todas la variables aleatorias.

Los valores esperados de las variables en el estudio son: $\bar{R} = 100mm$, $\bar{rc} = 100\Omega$, $\bar{\Delta p} = 0,5$. La mayoría de las realizaciones tienen una convergencia estable luego de las 500 iteraciones, tal cual muestra el ejemplo de la Fig.3. La Fig.4 representa el intervalo de confianza del 95% de las respuestas en frecuencia de la variable aleatoria Δp y para todas las variables a la vez para un coeficiente de variación $CoV = 0,1$, y la Fig.5 muestra un indicador de sensibilidad de la respuesta dinámica frente a las variaciones de los parámetros Δp y R . En ambas figuras puede notarse como se propaga la incertidumbre con mayor intensidad hacia las frecuencias naturales, tomando niveles de importancia a partir de la tercer frecuencia, y aumentando con el aumento de la frecuencia. La Fig.6 representa el efecto de diferentes niveles de incerteza de entrada y como se propagan hacia la salida δ_{out} . En el puede observarse que la resistencia de carga rc no produce prácticamente alteraciones en la salida, R y Δp tienen una influencia pareja, y el comportamiento de la sensibilidad tiende a ser lineal.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se introdujo un modelo de elementos finitos de una estructura metamaterial curva formada por un material piezoeléctrico y un material portante. El modelo es válido frente a modelos rectos de otros autores así también frente a uno construido en Comsol. Cabe

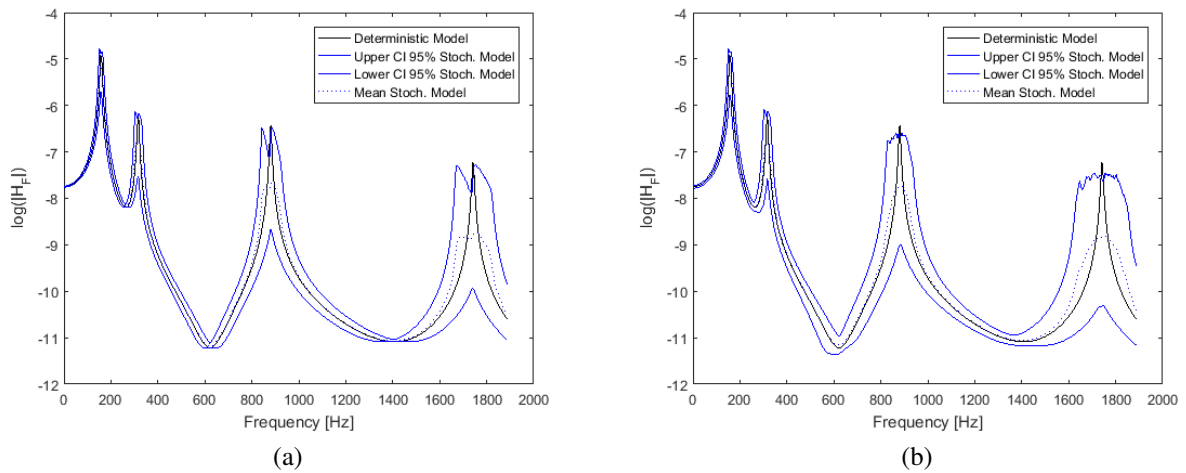


Figura 4: Intervalos de confianza para $CoV = 0,1$. (a) Δp aleatoria, (b) Todas la variables aleatorias.

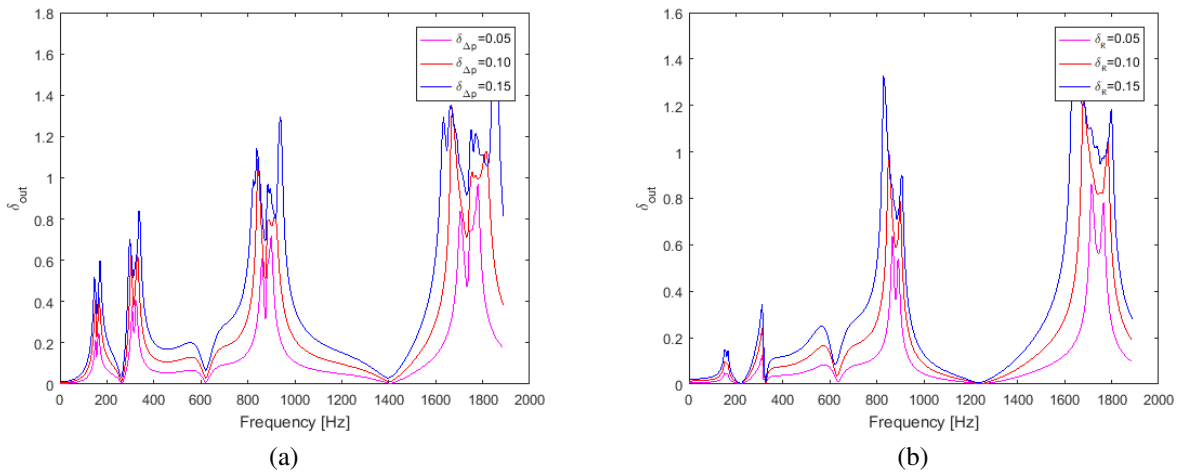


Figura 5: Salida δ_i paa diferentes entadas. (a) Δp aleatoria, (b) R aleatoria.

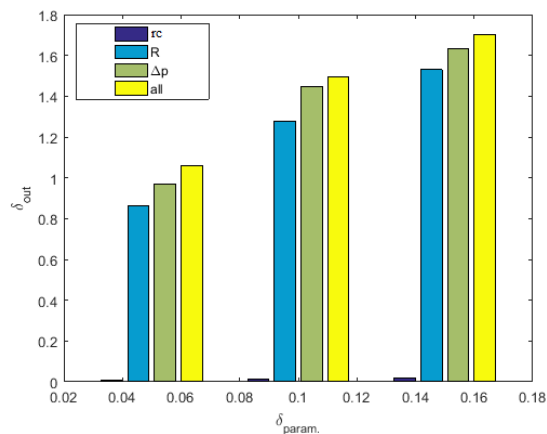


Figura 6: Sensibilidad paramétrica.

destacar que el piezoelectrico, al ser un material anisótropo, su modelado a través de programas de elementos finitos comerciales es complejo y poco certero, por eso la comparación solo tiene sentido en estructuras rectas. Así mismo, el modelo 1D propuesto es mucho mas veloz,

permitiendo un gran ahorro en tiempo de computo. Los resultados computacionales arrojaron las siguientes conclusiones:

- Tanto el radio de curvatura R como la longitud del piezoelectrico Δp producen variaciones significativas en la salida a partir de la tercera frecuencia.
- El parámetro Δp logra variaciones considerables en las 2 primeras frecuencias, convirtiéndolo en un parámetro importante a la hora de equalizar la frecuencia de resonancia/trabajo de la estructura.
- La resistencia de carga rc no produce efectos considerables en la salida, un dato importante ya que la inductancia que se utilizará en el futuro posee una resistencia asociada donde su valor suele ser difícil de preestablecer.

REFERENCIAS

- Bathe K. *Finite Element procedures in Engineerign Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- Brillouin L. *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, 2003.
- Erturk A. y Inman D.J. *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley & Sons, 2011.
- IEEE. *An American National Standard: IEEE Standard on Piezoelectricity Standard*. IEEE, 1988.
- Jaynes E. Information theory and statistical mechanics i and ii. *The Physical Review*, 106:1620–1630, 1957.
- Lesieutre G.A. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *Shock and Vibration Digest*, 30(3):187–195, 1998.
- Piovan M. y Cortinez V. Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45:759–789, 2007.
- Piovan M., Ramirez J., y Sampaio R. Dynamics of thin-walled composite beams: Analysis of parametric uncertainties. *Composite Structures*, 105:14–28, 2013.
- Piovan M.T., Domini S., y Ramirez J.M. In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94(11):3194–3206, 2012. Cited By :26.
- Sampaio R. y Cataldo E. Comparing two strategies to model uncertainties in structural dynamics. *Shock and Vibration*, 17:171–186, 2011.
- Soize C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 289:623–652, 2005.
- Surabhi A. Finite element beam model for piezoelectric energy harvesting using higher order shear deformation theory. 2014.