

MODELADO DE UNA ESTRUCTURA MULTIFUNCIONAL MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE VIGA

MODELING OF A MULTIFUNCTIONAL STRUCTURE BY BEAM FINITE ELEMENTS

Emmanuel Beltramo^{a,b}, José Enrique Stuardi^a y Sergio Preidikman^{a,b}

^a*Departamento de Estructuras, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. depestructuras@fcecyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

^b*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) - CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcefyn.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

Palabras clave: Elemento Finitos, Estructuras Multifuncionales, Materiales Piezoeléctricos, Aspectos Estructurales.

Resumen. En los últimos años, el interés por las estructuras multifuncionales fue creciendo debido a la necesidad de desarrollar componentes estructurales que tengan la capacidad de desempeñar múltiples funciones, además de resistir cargas. En el campo aeronáutico, nuevas tecnologías hacen factible la posibilidad de construir alas capaces de incorporar sistemas de actuación, de sensado y de cosecha y almacenaje de energía. Los materiales piezoeléctricos forman parte de los denominados materiales inteligentes y han tenido una amplia difusión durante las últimas décadas. Los piezocerámicos son comúnmente empleados como generadores por su versatilidad y eficiencia, y como actuadores debido a su capacidad de desarrollar grandes fuerzas de actuación. En este trabajo se estudia la influencia que tiene la presencia de cosechadores y actuadores piezoeléctricos en las frecuencias naturales y en los modos de vibrar de una estructura multifuncional, a partir de una formulación de elementos finitos de viga tridimensional. Además, se evalúa la posibilidad de modificar la carga crítica de pandeo a través de una diferencia de potencial eléctrica aplicada sobre los electrodos de los actuadores.

Keywords: Finite Elements, Multifunctional Structures, Piezoelectric Materials, Structural Aspects.

Abstract. In recent years, interest in multifunctional structures has grown due to the need to develop structural elements that can perform multiple primary functions and can, potentially, improve aircraft performance through consolidation of subsystem materials and functions. In the aeronautical field, new technologies allow building self-sustained multifunctional wing structures that include subsystems of sensing, energy harvesting, energy storage, and actuation. Piezoelectric materials are considered a part of the so-called smart materials and have been widely exploited over the last decades. Piezoceramics are often used as generators in energy harvesters due to their versatility and efficiency, and as actuators due to their capabilities to develop high actuation forces. In this paper, based on a finite element formulation of a three-dimensional beam, the influence of the presence of harvesters and actuators on the natural frequencies and modes of a slender wing using piezoelectric transduction is studied. In addition, the possibility of modifying the critical buckling load of a structure by applying an electrical potential difference on the actuators is evaluated.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el desarrollo de estructuras multifuncionales en el campo aeronáutico ha ido creciendo, fundamentalmente debido a la aparición de nuevas tecnologías constructivas y a los materiales inteligentes. Las aves tales como los pájaros, tienen la capacidad de cambiar la configuración de sus alas para lograr un rendimiento aerodinámico óptimo en toda condición de vuelo (Sun et al, 2016). En consecuencia, inspirándose en la naturaleza e incorporando esta tecnología estructural resulta factible desarrollar vehículos aéreos no tripulados que tengan la capacidad de modificar la geometría de sus alas (en inglés conocido como morphing wings) para aumentar la eficiencia aerodinámica, disminuir el consumo de energía y maniobrar en un amplio espectro de ambientes (Verstraete et al, 2011; Preidikman et al, 2006). Además, debido a la tendencia actual de construir aeronaves más eficientes, autónomas y amigables con el medio ambiente resulta imprescindible incorporar cosechadores aeroelásticos de energía de pequeña escala, cuya fuente energética provenga de las vibraciones mecánicas del ala, originadas por ráfagas u oscilaciones de ciclo límite. La energía recolectada es almacenada y permite alimentar a sensores o actuadores. En la literatura hay modelos de cosechadores de diversa complejidad (Tsushima y Su, 2016; Erturk e Inman, 2009), algunos de ellos validados experimentalmente. Por consiguiente, la estructura alar combina múltiples funciones: generación de sustentación, modificación de geometría y cosecha de energía.

Los materiales piezoeléctricos son cristales naturales o sintéticos que forman parte de los denominados materiales inteligentes (Chopra y Sirohi, 2011). Se caracterizan por generar un campo eléctrico al ser deformado (efecto directo) o deformarse mecánicamente al ser expuestos a un campo externo (efecto inverso). En particular, los piezocerámicos son ampliamente usados como generadores en los cosechadores de energía debido a su alta densidad de potencia y facilidad de aplicación (Elvin and Erturk, 2013). También son empleados como actuadores ya que tienen la capacidad de ejercer grandes fuerzas de actuación, lo cual permite inducir deformaciones localizadas en la estructura y así alterar la geometría de las alas.

En este trabajo se estudian las propiedades estructurales más relevantes de una estructura multifuncional de características simples. Concretamente se evalúa el efecto de los actuadores en la carga crítica de pandeo y en sus formas modales. También, se analiza la incidencia de los cosechadores en las frecuencias y modos naturales de vibrar. Para ello, la estructura se discretiza a través de un conjunto de elementos finitos de viga tridimensional que adoptan las hipótesis de la teoría de vigas de Rayleigh e incluyen efectos de segundo orden. La presencia de los piezoeléctricos altera las matrices de masa y de rigidez de la estructura como asimismo al vector de cargas. El presente trabajo se sustenta en otro esfuerzo presentado en este mismo congreso y en el cual se calculan las ecuaciones de movimiento para cada tipo de elemento finito.

2 ELEMENTO FINITO DE VIGA

2.1 Descripción de los elementos

Se emplean tres tipos de elementos finitos, uno para discretizar miembros estructurales, otro para modelar cosechadores de energía y el último para representar actuadores piezocerámicos. Sin embargo, presentan características comunes, tienen una longitud h y poseen dos nodos con seis grados de libertad en cada uno de ellos, tres desplazamientos u_{ij} y tres giros θ_{ij} tal como se exhibe en la Figura 1. En la Figura 2 se indican las secciones transversales de los tres elementos junto al sistema de referencia local xyz . Si bien, la geometría del núcleo elemental es arbitraria, se consideran dos transductores piezoeléctricos laminares ubicados simétricamente respecto a los ejes yz , quienes constituyen los ejes principales de inercia de la sección. El elemento cosechador incorpora adicionalmente dos grados de libertad eléctricos, v_{eu} y v_{el} , que denotan al voltaje aplicado entre los electrodos de cada lámina. Esta diferencia de potencial también existe

en el elemento actuador, pero no es una coordenada generalizada, sino una variable de entrada. Las resistencias eléctricas R_u y R_l se usan para disipar la energía cosechada.

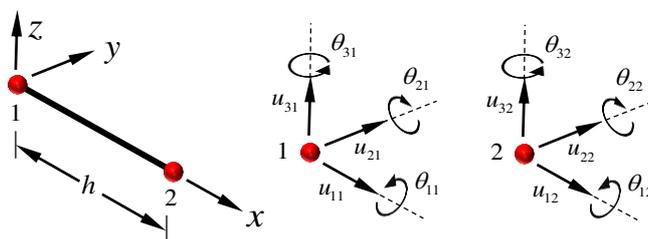


Figura 1. Elemento finito con seis grados de libertad por nodo.

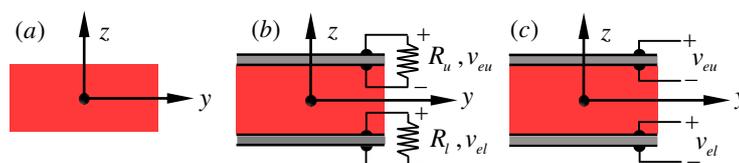


Figura 2. Secciones transversales para cada tipo de elemento: miembro elástico (a), cosechador de energía (b) y (c) actuador.

2.2 Ecuaciones de movimiento para un elemento puramente estructural

Las ecuaciones de movimiento para un elemento finito utilizado para discretizar miembros estructurales en coordenadas locales (ver sistema de referencia de la Figura 1) es,

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g)\mathbf{q}_e = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

\mathbf{m} es la matriz de masa, \mathbf{k}_e la matriz de rigidez elástica, \mathbf{k}_g la matriz de rigidez geométrica (función de la carga axial que actúa en el elemento), $\mathbf{f}(t)$ el vector de cargas externas y \mathbf{q}_e el vector de coordenadas generalizadas. La incorporación de la matriz geométrica permite evaluar la carga crítica de pandeo de la estructura.

2.3 Ecuaciones de movimiento para un elemento con cosechadores de energía

Las ecuaciones de movimiento para un elemento finito con dos cosechadores de energía en coordenadas locales resultan,

$$\begin{cases} \mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g)\mathbf{q}_e + (\boldsymbol{\theta}_{L_u} + \boldsymbol{\theta}_{NL_u})v_{e_u} + (\boldsymbol{\theta}_{L_l} + \boldsymbol{\theta}_{NL_l})v_{e_l} = \mathbf{f}(t) \\ -(\boldsymbol{\theta}_{L_u} + \boldsymbol{\theta}_{NL_u})^T \dot{\mathbf{q}}_e - \dot{\boldsymbol{\theta}}_{NL_u}\mathbf{q}_e + C_u\dot{v}_{e_u} + R_uv_{e_u} = 0 \\ -(\boldsymbol{\theta}_{L_l} + \boldsymbol{\theta}_{NL_l})^T \dot{\mathbf{q}}_e - \dot{\boldsymbol{\theta}}_{NL_l}\mathbf{q}_e + C_l\dot{v}_{e_l} + R_lv_{e_l} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\theta}_{L_i}$ y $\boldsymbol{\theta}_{NL_i}$ corresponden al vector acoplamiento lineal y no lineal, C_i la capacitancia asociada a cada transductor (con $i = u, l$). En este modelo, se considera independencia eléctrica entre cada lámina, por lo tanto, el acoplamiento axial y la contribución geométrica de este a la flexión son no nulos. Si las láminas se vinculan entre sí mediante una conexión en serie o paralelo estos términos se anulan y sólo permanece el acoplamiento lineal debido a la flexión.

2.4 Ecuaciones de movimiento para un elemento con actuadores

Las ecuaciones de movimiento para un elemento finito con dos actuadores piezoeléctricos

laminares en coordenadas locales son,

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g - \mathbf{k}_a^u - \mathbf{k}_a^l) \mathbf{q}_e = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_a^u(t) + \mathbf{f}_a^l(t) \quad (3)$$

\mathbf{k}_a^u y \mathbf{k}_a^l son las matrices de rigidez geométricas asociadas al piezoeléctrico superior e inferior respectivamente (función del voltaje aplicado entre los electrodos de cada uno de ellos), $\mathbf{f}_a^u(t)$ y $\mathbf{f}_a^l(t)$ el sistema de cargas (fuerzas y momentos) que aparece debido a la diferencia de potencial aplicada. Nótese que la matriz geométrica \mathbf{k}_a surge como consecuencia de la no linealidad introducida en la componente de deformación axial en el cálculo de las ecuaciones rectoras. Por consiguiente, la presencia de un actuador con un voltaje aplicado entre sus electrodos modifica la rigidez estructural y por lo tanto a la carga crítica de pandeo y a las frecuencias naturales.

Si se desea conocer las componentes de las diversas matrices y vectores que aparecen en las ecs. (1), (2) y (3) como asimismo conocer el proceso de cálculo de ellas dirijase al otro trabajo presentado por los mismos autores en este congreso (Beltramo et al, 2019). A partir de las ecuaciones elementales es posible modelar el comportamiento de una estructura multifuncional integrada por actuadores, cosechadores de energía y miembros estructurales.

3 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Las matrices y vectores que integran las ecuaciones de movimiento de cada elemento fueron implementadas en un programa de computadora en lenguaje Fortran. Su finalidad es constituir una herramienta que permita simular el comportamiento de estructuras multifuncionales. El código puede resolver problemas estáticos, determinar cargas críticas de pandeo y sus modos, y frecuencias naturales de vibrar junto a sus formas modales. Actualmente se está trabajando en la incorporación de un integrador numérico para efectuar simulaciones aeroelásticas en el dominio del tiempo.

4 CASOS DE ESTUDIO

4.1 Variación de la carga crítica de pandeo en función del voltaje aplicado entre los electrodos de los actuadores piezoeléctricos

En este caso de aplicación se analiza la influencia que tiene en la carga crítica de pandeo la presencia de actuadores piezoeléctricos expuestos a una diferencia de potencial. Para ello se considera una viga en voladizo cuya superficie superior e inferior se encuentran cubiertas en su totalidad por transductores piezoeléctricos y sujeta a una carga axial de compresión P , tal como se muestra en la Figura 3. Concretamente se pretende calcular el máximo valor que puede tomar la carga P , expresado en función del voltaje, antes que la viga se inestabilice.

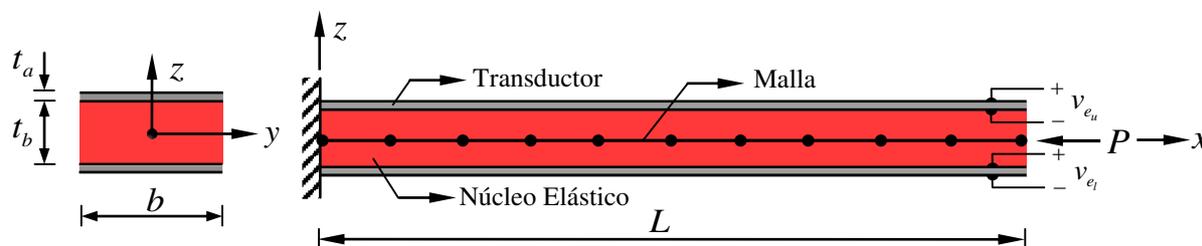


Figura 3. Viga en voladizo sujeta a una carga axial de compresión y recubierta por dos láminas piezocerámicas.

Por lo tanto, se debe resolver el siguiente problema de autovalores,

$$(\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_a^u - \mathbf{K}_a^l - P\mathbf{K}_g) \mathbf{q}_g = \mathbf{0} \quad (4)$$

\mathbf{K}_e es la matriz de rigidez elástica global, \mathbf{K}_g la matriz de rigidez geométrica global (asociada a la carga axial) y \mathbf{K}_a la matriz de rigidez geométrica asociada a los actuadores. Nótese que en la ec. (4) ya ha sido considerado el sentido negativo (compresión) de la carga axial respecto al sistema de referencia de la Figura 3. Los diversos valores de P corresponden a las cargas críticas y los vectores \mathbf{q}_g asociados refieren a los modos de pandeo.

Propiedad	Magnitud
Longitud, L	3 [m]
Ancho núcleo elástico y actuador, b	0,5 [m]
Espesor núcleo elástico, t_b	0,01 [m]
Espesor actuador, t_c	0,005 [m]
Módulo elástico núcleo (lineal y transversal), E_b y G_b	7×10^{10} [Pa] y $3,9 \times 10^{10}$ [Pa]
Módulo elástico actuador (lineal y transversal), E_c y G_c	$6,6 \times 10^{10}$ [Pa] y $2,1 \times 10^{10}$ [Pa]
Coefficiente piezoeléctrico, d_{zx}	$-1,9 \times 10^{-10}$ (PZT-5A) y $-2,7 \times 10^{-10}$ (PZT-5H) [C/N]
Densidad núcleo elástico, ρ_b	2700 [kg/m ³]
Densidad piezocerámico, ρ_c	7800 [kg/m ³] (PZT-5A)

Tabla 1. Propiedades mecánicas, eléctricas y geométricas.

Las propiedades elásticas, geométricas y eléctricas de la estructura se resumen en la Tabla 1. Se adopta una malla formada por diez elementos finitos.

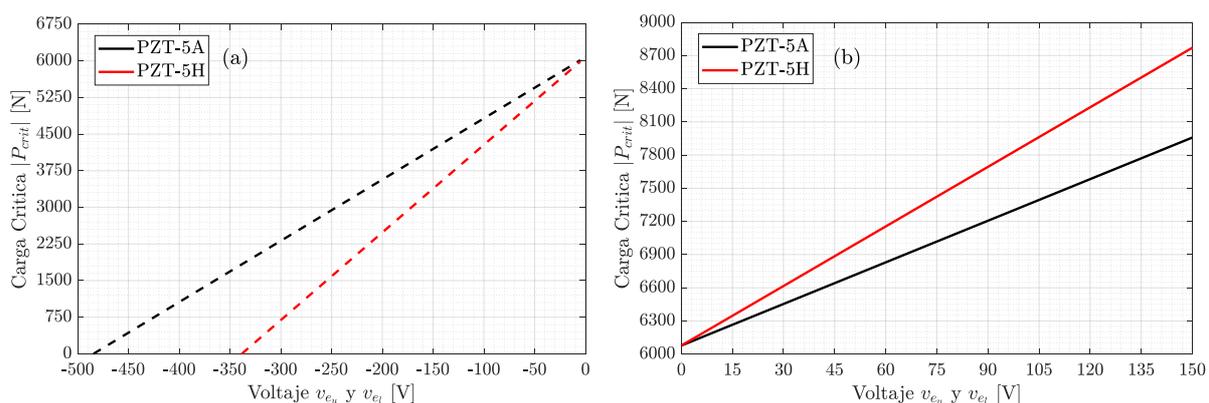


Figura 4. Carga crítica en función del voltaje aplicado: (a) voltaje negativo; (b) voltaje positivo.

En la Figura 4 se muestra la evolución de la primera carga crítica en función del voltaje aplicado. Note que la diferencia de potencial sobre cada lámina es de igual magnitud y signo. Se presentan resultados para dos tipos de piezocerámicos (PZT-5A y el PZT-5H), pudiendo observar un comportamiento lineal en cada caso, pero con diferentes pendientes según el tipo de transductor, lo cual se debe a que poseen distintos coeficientes piezoeléctricos. El PZT-5H tiene un coeficiente de mayor valor que el del PZT-5A, en consecuencia, para cada voltaje positivo la carga crítica es mayor para el primero de ellos, véase Figura 4b. El efecto opuesto ocurre en la región de voltajes negativos, véase Figura 4a. Además, si la diferencia de potencial es negativa y posee un valor suficientemente grande es posible inestabilizar a la estructura para una hipotética carga externa nula. Este voltaje se conoce como voltaje crítico. Para el PZT-5A esto ocurre cuando la diferencia de potencial es de -484,6 V, mientras que para el PZT-5H debe ser de -338,5 V.

Si se analiza a la matriz geométrica elemental \mathbf{k}_a se puede expresar que,

$$\mathbf{k}_a = E_c d_{zx} b v_e \mathbf{k}_a^* \quad (5)$$

donde \mathbf{k}_a^* es una matriz función de la longitud del elemento finito (h), mientras que el escalar

que la pre-multiplica tiene unidades de fuerza y representa la contribución de la carga axial que ejerce el actuador a la flexión. Ese término permite concluir que la carga crítica de pandeo varía linealmente con el módulo elástico (E_c), el coeficiente piezoeléctrico (d_{zx}), el ancho del actuador (b) y el voltaje aplicado (v_e). De acuerdo al signo de este último su efecto es estabilizante o desestabilizante.

Por otra parte, en la [Figura 5](#) se grafican los tres primeros modos de pandeo calculados con una malla de veinte elementos para mejorar la visualización. Debido a que la sección presenta una inercia mucho más baja respecto al eje y que respecto al eje z , los primeros modos están contenidos en el plano xz . Según el análisis realizado, la carga crítica puede ser alterada al aplicar una diferencia de potencial, pero la forma modal es independiente de ella.

Si bien el ejemplo tratado anteriormente es simple, la posibilidad de modificar la carga crítica usando actuadores piezoeléctricos puede ser de utilidad en una nueva generación de aeronaves que presentan una configuración de alas unidas, donde una de ellas se encuentra sometida a esfuerzos de compresión. Por lo tanto, se puede evitar el pandeo del ala a través de esta técnica. Mayores detalles pueden encontrarse en el trabajo de [Pérez Segura et al \(2018\)](#).

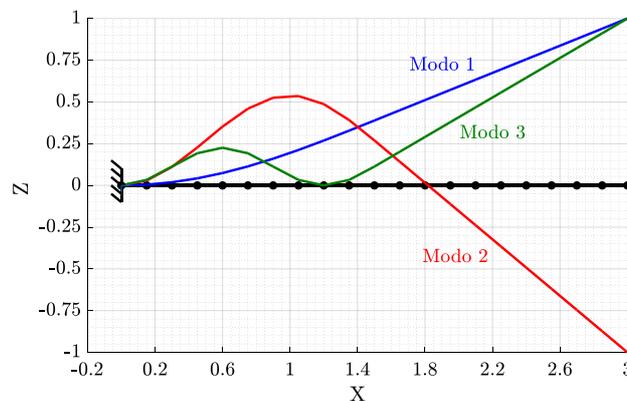


Figura 5. Primeros tres modos de pandeo para la estructura analizada calculados con una malla de 20 elementos.

4.2 Variación de las frecuencias naturales y modos de vibrar al deformar a la estructura mediante actuadores piezocerámicos

En este ejemplo se trabaja con la estructura de la [Figura 3](#) pero se propone determinar la variación de las frecuencias y modos naturales de vibrar luego de deformar a la viga mediante la aplicación de un voltaje constante de 150 V sobre el actuador superior y de -150 V sobre el inferior. Se utiliza una malla formada por veinte elementos para lograr una buena visualización y se adoptan tres posibles valores para la carga axial P , 1000 N, 0 N y -1000 N. El problema de autovalores a resolver es el siguiente,

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_a^u - \mathbf{K}_a^l) \right] \mathbf{q}_g = \mathbf{0} \quad (6)$$

\mathbf{M} es la matriz de masa global, ω el autovalor (frecuencia natural) y \mathbf{q}_g el autovector (modo de vibrar). El problema se resuelve inicialmente para el estado indeformado, luego se actualiza la configuración de la estructura junto a las correspondientes matrices de masa y rigidez y se resuelve para el estado deformado.

En la [Tabla 2](#) se listan las primeras seis frecuencias naturales de la estructura indeformada para las tres cargas axiales propuestas, mientras que en la [Figura 6](#) se ilustran los modos de vibrar. El número de modos y frecuencias se eligió de manera arbitraria. Se percibe que la carga normal tiene incidencia en las frecuencias (ω_1 , ω_3 , ω_5 y ω_6) asociadas a los modos flexionales, en tanto que las frecuencias torsionales (ω_2 y ω_4) no se ven afectadas por la fuerza axial.

Carga P [N]	ω_1 [rad/s]	ω_2 [rad/s]	ω_3 [rad/s]	ω_4 [rad/s]	ω_5 [rad/s]	ω_6 [rad/s]
1000	8.6125	42.8583	50.9846	128.8395	141.4451	202.9621
0	8.0275	42.8583	50.3079	128.8395	140.8656	202.9378
-1000	7.3821	42.8583	49.6208	128.8395	140.2837	202.9136

Tabla 2. Frecuencias naturales de la estructura indeformada para distintas cargas axiales.

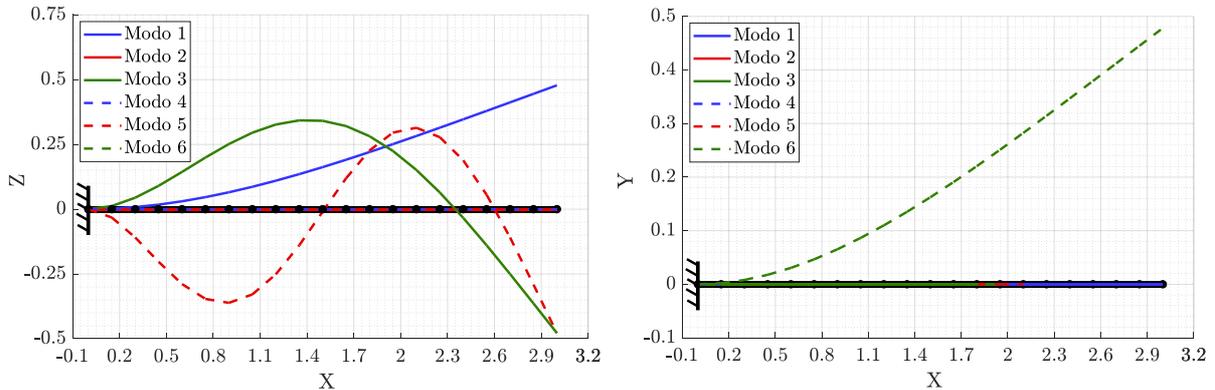


Figura 6. Modos de vibrar de la estructura indeformada.

Sin embargo, las variaciones observadas no son demasiado significativas para las cargas axiales propuestas. Las formas modales son idénticas para los tres valores de fuerza propuestas.

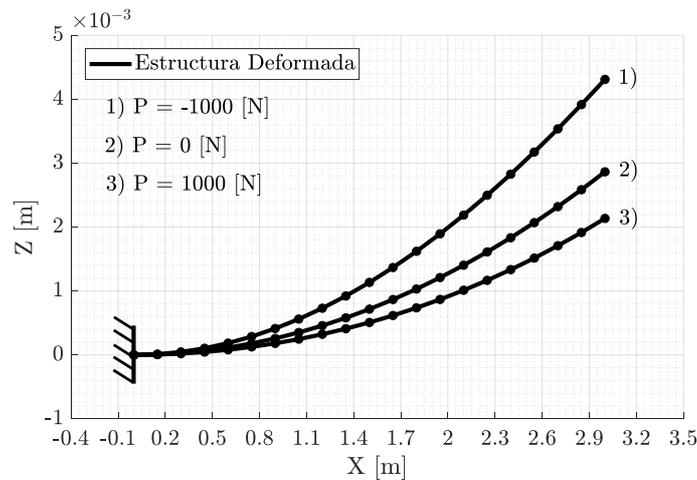


Figura 7. Estructura deformada mediante actuadores piezoeléctricos y sometida a diferentes cargas axiales.

Carga P [N]	ω_1 [rad/s]	ω_2 [rad/s]	ω_3 [rad/s]	ω_4 [rad/s]	ω_5 [rad/s]	ω_6 [rad/s]
1000	8.2777	50.6221	61.0019	133.9636	141.1208	202.9442
0	8.2082	50.5598	70.8175	137.6440	141.0575	202.9387
-1000	8.2833	50.6911	91.3879	141.1421	147.9486	202.9368

Tabla 3. Frecuencias naturales de la estructura deformada para distintas cargas axiales.

En la **Figura 7** se exhibe la viga deformada como consecuencia del voltaje aplicado y de la fuerza axial. De acuerdo a lo analizado, una fuerza de compresión reduce la rigidez flexional y por lo tanto los desplazamientos obtenidos son mayores que los determinados para una carga nula. Asimismo, una fuerza de tracción tiene un efecto estabilizante y los desplazamientos son aún menores que los calculados con una fuerza nula.

En la [Tabla 3](#) se listan las frecuencias naturales para la configuración deformada. Si se contrastan sus magnitudes con las expuestas en la [Tabla 2](#) se advierte que las frecuencias flexionales no sufren grandes modificaciones, mantienen valores cercanos al caso indeformado. Sin embargo, las torsionales se ven afectadas en mayor medida, produciéndose variaciones significativas. Es importante notar que las frecuencias no se pueden comparar según el valor de carga axial ya que en este caso corresponden a diferentes deformadas de la estructura original, ver [Figura 7](#). Para el estado indeformado sí era posible ya que la geometría de la viga era la misma para las tres cargas axiales.

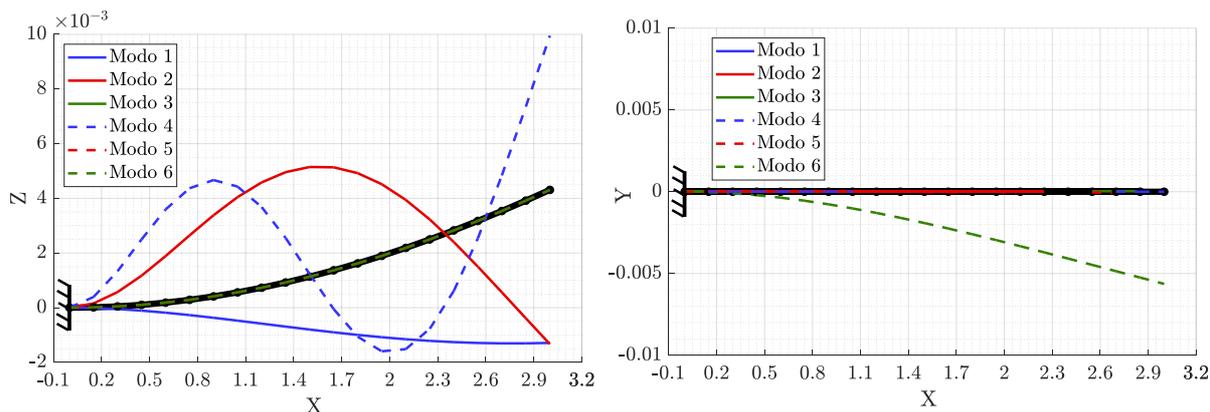


Figura 8. Modos de vibrar de la estructura deformada y sometida a una carga axial de $P = -1000$ N.

En la [Figura 8](#) se grafican los modos de la estructura deformada cuando actúa una carga axial de -1000 N. Se optó únicamente por este caso por razones de espacio. Los modos 3 y 5 son los torsionales, aunque si se analiza detalladamente se observa una mínima componente transversal en dirección y respecto de los asociados a la geometría indeformada. Los modos flexionales tienen una apariencia similar a los de la configuración inicial, a excepción del modo 1 que difiere sustancialmente del análogo de la [Figura 6](#).

4.3 Influencia de cosechadores de energía en las frecuencias y modos naturales de vibrar

En este caso de aplicación se pretende explorar el efecto que poseen los cosechadores de energía en las propiedades estructurales, concretamente en las frecuencias y modos de vibrar. Con la finalidad de simplificar el problema, se considera sólo acoplamiento lineal, es decir, se desprecian a los términos θ_{NL} de la ec. (2). Asimismo, la matriz de rigidez geométrica es nula ya que no hay carga axial.

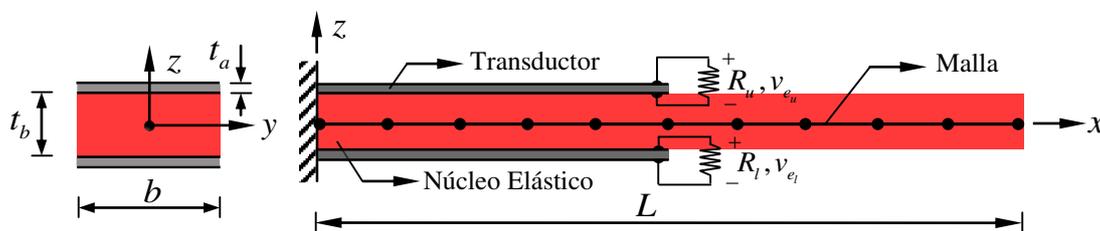


Figura 9. Viga en voladizo recubierta parcialmente por dos transductores piezocerámicos.

Se adopta la viga de la [Figura 9](#), cuya superficie superior e inferior se encuentran cubiertas por dos láminas piezocerámicas (PZT-5A), desde el empotramiento hasta la mitad de ella. Cada transductor constituye un cosechador de energía. Las propiedades geométricas, mecánicas y eléctricas se presentan en la [Tabla 1](#). El problema a resolver es el siguiente,

$$\left\{ -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_e + (\Theta_L^u)^T k_p^u (\Theta_L^u)^T + (\Theta_L^l)^T k_p^l (\Theta_L^l)^T + (\Theta_L^u)^T c_p^u (\Theta_L^u)^T + (\Theta_L^l)^T c_p^l (\Theta_L^l)^T \right\} \mathbf{q}_g = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$k_p^i = \frac{C_i R_i^2 \omega^2}{1 + C_i^2 R_i^2 \omega^2}; \quad c_p^i = j \frac{R_i \omega}{1 + C_i^2 R_i^2 \omega^2}; \quad i = u, l$$

Θ_L es el vector acoplamiento global y j la unidad imaginaria. Se resuelve la ec. (7) para diversos valores de resistencia eléctrica, asumiendo la misma magnitud para el cosechador superior y el inferior. Nótese que el problema de autovalores es no lineal en términos de ω .

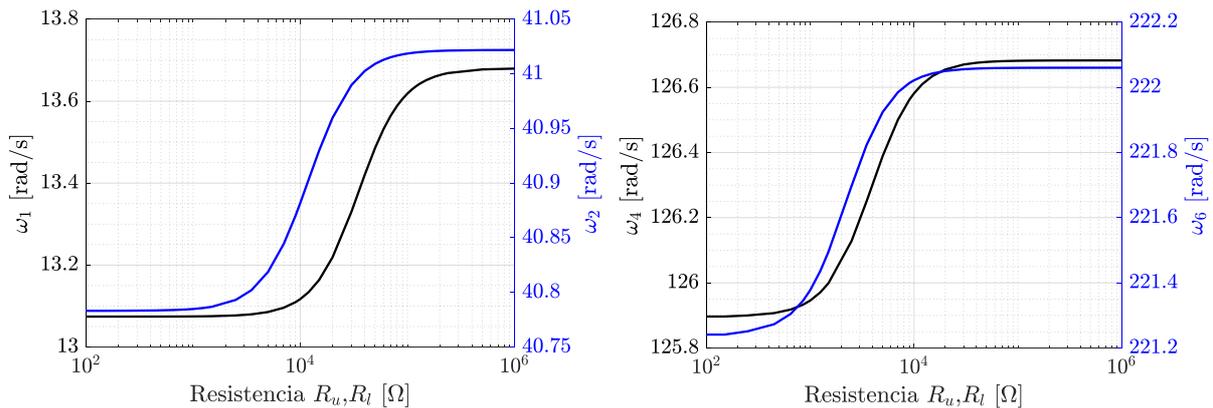


Figura 10. Frecuencias naturales asociadas a modos flexionales en función de la carga resistiva.

Como parte de los resultados se analiza lo que sucede con las primeras seis frecuencias naturales. En la Figura 10 se presenta el comportamiento de las frecuencias flexionales ($\omega_1, \omega_2, \omega_4$ y ω_6) en función de la resistencia. Se advierte que a partir de una determinada carga resistiva experimentan un incremento en su magnitud hasta alcanzar nuevamente un valor constante cuando la resistencia es suficientemente elevada. Según se percibe, la rigidización posee un comportamiento asintótico. Los valores extremos que adquiere cada frecuencia se denominan frecuencia de corto circuito y de circuito abierto. La primera de ellas (ω_1) experimenta un incremento relativo de 4,6%, mientras que el aumento en las restantes es inferior.

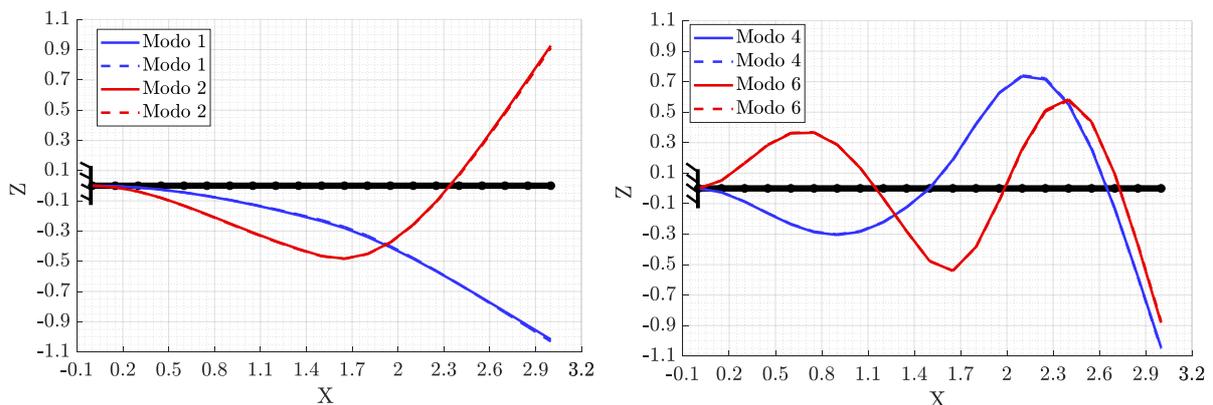


Figura 11. Modos flexionales en condición de cortocircuito (continuas) y circuito abierto (trazo).

Por otra parte, puede advertirse que no se muestra la evolución de las frecuencias torsionales ($\omega_3 = 66,51$ rad/s y $\omega_5 = 165,08$ rad/s) ya que sus magnitudes no se alteran debido a que el vector acoplamiento contiene únicamente términos axiales y flexionales. Si se analizan los términos que componen a este vector se aprecia que el aporte a la rigidez es proporcional al

módulo elástico del piezocerámico (E_c) y a su coeficiente piezoeléctrico (d_{zx}). Además, la contribución axial es proporcional al área transversal, mientras que las flexionales dependen linealmente de los momentos estáticos y ambas son inversamente proporcionales al espesor del transductor. La influencia de la resistencia en la rigidez viene dada por la ec. (7). En este ejemplo se adoptó como variable a la carga resistiva, en consecuencia, variaciones de ella modifican la rigidez flexional y axial. En la **Figura 11** se grafican los modos flexionales para la condición de cortocircuito y circuito abierto, donde se aprecia que las diferencias entre ambos son prácticamente imperceptibles. Los modos torsionales no se muestran ya que tienen la apariencia de sus análogos de la **Figura 6** y no experimentan cambios al variar la resistencia.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la influencia que posee la presencia de actuadores piezocerámicos y cosechadores de energía en las propiedades estructurales. Para ello se desarrolló un programa de computadora que implementa un modelo de elemento finito de viga tridimensional con transductores piezoeléctricos embebidos. El código se desarrolló en lenguaje Fortran y forma parte de un esfuerzo más amplio cuyo objetivo es modelar estructuras alares multifuncionales y para llevar a cabo simulaciones numéricas en el dominio del tiempo.

Este esfuerzo se basó en el análisis de una estructura simple constituida por una viga en voladizo para la cual se evaluó la variación de la carga crítica de pandeo en función del voltaje aplicado entre los electrodos de los actuadores. También se analizó la modificación de la geometría de la estructura a partir de esta diferencia de potencial y su incidencia en las frecuencias y formas modales. Por otra parte, se estudió la variación de las frecuencias naturales debido a la presencia de cosechadores de energía seleccionando a la carga resistiva como variable. El análisis realizado permite interiorizarse acerca de la posibilidad de alterar ciertas propiedades estructurales mediante la utilización de materiales piezoeléctricos como asimismo cambiar la configuración geométrica de la estructura.

REFERENCIAS

- Beltramo, E., Stuardi, J. E. y Preidikman, S., Desarrollo de un elemento finito de viga con material piezoeléctrico embebido para cosecha de energía. *Mecánica Computacional*, XXXVII, En prensa, 2019.
- Chopra, I. y Sirohi, J., *Smart Structures Theory*, Cambridge University Press, 2013.
- Elvin, N. y Erturk, A., *Advances in Energy Harvesting Methods*, Springer, 2013.
- Erturk, A. y Inman, D., *Piezoelectric Energy Harvesting*, Wiley, 2011.
- Pérez Segura, M., Preidikman, S. y Beltramo, E., Análisis de las características aerodinámicas de aeronaves con configuración de alas unidas en función de sus parámetros topológicos. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 1949-1958, 2018.
- Preidikman, S., Massa, J. y Bandi, M., Accionamiento mediante actuadores piezoeléctricos de alas flexibles para micro-vehículos aéreos súper maniobrables inspirados en la biología. *Mecánica Computacional*, XXV: 2359-2381, 2006.
- Sun, J., Guan, Q., Liu, Y. y Leng, J., Morphing aircraft based on Smart materials and Structures: A state-of-the-art review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1-24, 2016.
- Tsushima, N y Su, W., Modeling of highly flexible multifunctional wings for energy harvesting. *Journal of Aircraft*, 53: 1033-1044, 2016.
- Verstraete, M., Preidikman, S., Ceballos, L. y Massa, J., Vehículos aéreos no tripulados con alas que mutan: accionamiento de alas flexibles mediante actuadores piezoeléctricos. *Mecánica Computacional*, XXX: 1337-1394, 2011.