

## UN MODELO REDUCIDO PARA LA DINÁMICA ESTRUCTURAL DE METAMATERIALES LOCALMENTE RESONANTES

### A REDUCED MODEL FOR THE STRUCTURAL DYNAMICS OF LOCALLY RESONANT METAMATERIALS

Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup> y Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

**Palabras clave:** metamateriales localmente resonantes, dinámica estructural, análisis modal, modelo multiescala.

**Resumen.** Se describe matemáticamente la dinámica de un material localmente resonante mediante un modelo de homogeneización (multiescala). Las correspondientes ecuaciones gobernantes se resuelven a través de un enfoque de orden reducido basado en el análisis modal simultáneo de la dinámica microscópica y la dinámica global. Dicha metodología es mucho más eficiente que la solución numérica del problema homogeneizado original puesto que brinda resultados de precisión similar en un tiempo de cálculo ostensiblemente menor. Se presentan algunos ejemplos numéricos que muestran la eficiencia del método propuesto e ilustran los efectos de micro-inercia sobre la dinámica estructural global de un metamaterial localmente resonante.

**Keywords:** locally resonant metamaterials, structural dynamics, modal analysis, multiscale model.

**Abstract.** A mathematical formulation for the structural dynamics of locally resonant materials based on a homogenization procedure is presented. The resultant governing equations are solved by means of a reduced order approach based on the simultaneous modal expansion of the microscopic and global dynamics. This methodology is more efficient than the direct numerical solution of the original homogenized model because it yields a similar accuracy with much lower calculation time. Some numerical examples are given that show the efficiency of the proposed methodology and illustrate about the micro-inertia effects on the global dynamics of a locally resonant metamaterial structure.

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han estudiado intensamente las posibilidades de diseñar materiales compuestos, denominados metamateriales, que posean propiedades mejoradas respecto a los materiales clásicos. En particular, ha surgido el concepto de metamaterial localmente resonante que es de gran interés con relación a problemas acústicos o dinámico-estructurales, pudiéndose aplicar como dispositivos de atenuación de vibraciones mecánicas, de reducción de ruido, aislación de ondas sísmicas, etc. (Auriault y Boutin, 2012; Basone et al., 2019, Sugino et al. 2016, Hussein et al. 2014). Las propiedades mejoradas de tales metamateriales se deben a pequeñas subestructuras (inserciones) inmersas que funcionan como resonadores. Cuando una estructura construida con tales materiales es excitada por cargas vibratorias, tales resonadores funcionan como amortiguadores dinámicos.

Si bien es posible analizar estructuras construidas con metamateriales mediante un modelo detallado de elementos finitos (MEF), tal enfoque no es práctico debido a la gran cantidad de elementos que resulta necesario emplear para modelar adecuadamente cada una de las subestructuras involucradas. Asimismo, la dinámica de los metamateriales presenta características multiescala, tales como modos de vibración localizados en las subestructuras, interactuando con modos de carácter más global. Tales características son muy costosas de representar computacionalmente mediante un modelo convencional de elementos finitos. Consecuentemente, se han ideado otros enfoques que permiten analizar el problema de manera más conveniente.

Un enfoque muy utilizado en tal sentido corresponde a la aplicación de la teoría de Bloch-Floquet (Sun et al., 2010) que permite analizar la propagación de ondas en un medio periódico heterogéneo. La utilización de tal metodología reduce el problema al análisis de una única celda unitaria. Tal enfoque resulta de gran utilidad para el análisis dinámico en el rango de alta frecuencia. Este tipo de metodología permite la predicción de interesantes fenómenos tales como brechas de banda en estructuras infinitas (es decir, dominio de frecuencias en el cual no es posible la propagación de ondas elásticas). Sin embargo, en el caso de la respuesta dinámica en bajas frecuencias, puede llegar a ser más conveniente utilizar un enfoque modal (Sugino et al, 2016). Éste, por otra parte, es necesario para el diseño estructural global (resistencia y rigidez).

Uno de los enfoques utilizados para diseñar tales materiales, en el rango de bajas frecuencias aludido, es el método de homogeneización asintótica (Auriault y Boutin, 2012) que permite analizar la estructura heterogénea como un material homogéneo equivalente con propiedades dependientes de la frecuencia. Tales estudios pueden realizarse mediante el método de elementos finitos de manera mucho más económica computacionalmente que la que resultaría del análisis detallado de la estructura heterogénea real.

Sin embargo, las propiedades equivalentes dependientes de la frecuencia pueden ser inconvenientes para el análisis modal debido al hecho de que el problema matemático no mantiene la forma clásica de un problema dinámico lineal. En particular, el cálculo de frecuencias naturales debe realizarse mediante el análisis de la respuesta en frecuencia que puede resultar más costoso desde el punto de vista computacional, considerando el hecho de que en tal enfoque deben acoplarse sub-problemas en diferentes escalas (global y local).

Por tal motivo, resulta de utilidad la aplicación de modelos reducidos para la descripción de la dinámica estructural de materiales localmente resonantes modelados mediante una técnica de homogeneización.

En este trabajo se presenta un modelo reducido basado en la expansión modal de la

dinámica interna de una celda así como en una expansión similar de la dinámica global. Este enfoque, permite obtener con aceptable precisión la respuesta dinámica con un número mucho menor de grados de libertad.

En la sección 2 se presenta un modelo homogeneizado para la modelación de la dinámica estructural de materiales heterogéneos. Si bien tal teoría sigue los lineamientos establecidos por [Auriault y Boutin \(2012\)](#), se efectúa una presentación variacional que, aunque menos rigurosa, puede resultar conveniente desde el punto de vista didáctico. En la sección 3 se formula el modelo de homogeneización reducido y en la sección 4 se analizan algunas aplicaciones de la metodología formulada. En particular, se obtienen fórmulas analíticas simples para el análisis dinámico de una clase de materiales heterogéneos. Los resultados numéricos mostrados en esta sección ilustran acerca de las ventajas de la metodología propuesta. Finalmente, en la sección 5 se exponen las conclusiones del trabajo.

## 2 DINÁMICA DE UN METAMATERIAL LOCALMENTE RESONANTE: MODELO HOMOGENEIZADO

Se considera una estructura construida por un material heterogéneo compuesto de inclusiones distribuidas periódicamente ([Figura 1a](#)). Se asume que las inclusiones ( $m$ ) tienen una rigidez muy pequeña en comparación con la rigidez de la matriz ( $s$ ). Asimismo se supone que las densidades de ambos materiales son del mismo orden de magnitud. En la [Figura 1b](#) puede apreciarse un esquema de cada celda. Se utiliza la siguiente notación:  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$  corresponde a las coordenadas globales de la estructura mientras que  $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$  corresponde a las coordenadas locales de cada celda,  $\Omega, \Omega_c, \Omega_m, \Omega_s$ , denotan al volumen total, el de cada celda, el ocupado por el material rígido ( $s$ ) de cada celda y el ocupado por el material blando ( $m$ ) de cada celda.  $c_s$  y  $c_m$  denotan a las concentraciones volumétricas  $\Omega_s/\Omega_c$  y  $\Omega_m/\Omega_c$  respectivamente,  $\Gamma, \Gamma_e, \Gamma_i$  denotan la superficie de la estructura, la de la celda y la de separación entre materiales, respectivamente. En cada celda, la relación entre las coordenadas globales y locales se expresan como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ , donde  $\mathbf{x}_0$  es la coordenada del centroide de la celda. La arista de una celda típica se denota con  $l$ , mientras que la de la estructura global con  $L$ . La relación entre ambas longitudes es  $\varepsilon=l/L$  ( $\ll 1$ ).

Se pretenden describir las vibraciones libres y forzadas de la estructura sometida a cargas armónicas con frecuencias relativamente bajas donde los modos involucrados poseen una longitud de onda comparable a la de la estructura ( $L$ ). Debido a la baja rigidez del material de las inserciones se acepta la posibilidad de resonancia de modos localizados con longitudes de onda comparables a  $l$  en éstas, lo que implica la posibilidad de interacción dinámica en dos escalas. De esta manera, las inserciones de material blando podrían actuar como absorbedores dinámicos extrayendo energía del movimiento vibratorio global, es decir, podrían atenuar las amplitudes de las vibraciones de la estructura. El efecto dinámico de las inserciones sobre la vibración de la estructura se denomina “micro-inercia”. Se ha demostrado ([Auriault y Boutin, 2012](#)) que tal efecto es de importancia cuando se cumplen las siguientes relaciones: a)  $|\mathbf{C}^m|/|\mathbf{C}^s| = O(\varepsilon^2)$  donde  $|\mathbf{C}^m|$  y  $|\mathbf{C}^s|$  corresponden a medidas de los tensores de rigidez de los materiales  $m$  y  $s$  respectivamente y b)  $\rho_m/\rho_s = O(1)$ . También es de importancia tal efecto cuando las inserciones son de dos materiales, un recubrimiento blando  $m_1$  y una inserción rígida interna  $m_2$  si se verifica ([Bonnet y Monchiet, 2015](#))  $|\mathbf{C}^{m1}|/|\mathbf{C}^s| = O(\varepsilon^2)$ ,  $|\mathbf{C}^{m1}|/|\mathbf{C}^{m2}| = O(\varepsilon^p)$ ,  $p \geq 1$ ,  $\rho_{m1}/\rho_s = O(\varepsilon^q)$ ,  $q \geq 1$  y  $\rho_{m2}/\rho_s = O(1)$ . En este trabajo, como

primera aproximación, se desprecia el amortiguamiento.

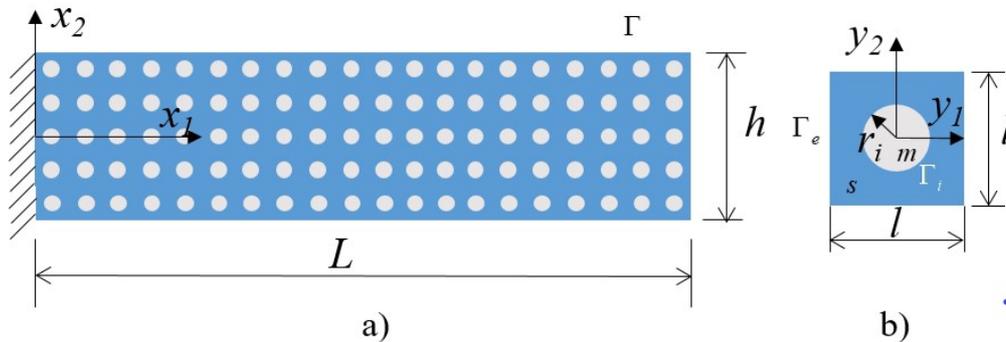


Figura 1: Esquema de la estructura periódica heterogénea y de una celda de la misma.

## 2.1 Formulación variacional general

La dinámica de la estructura mostrada en la Figura 1 puede ser formulada a partir del principio de trabajos virtuales:

$$\delta J = \sum_1^{NC} \delta J_c = 0 \quad (1)$$

donde  $\delta J$  y  $\delta J_c$  son las expresiones de trabajos virtuales de toda la estructura y de cada celda respectivamente y  $NC$  es el número de celdas. Por otra parte, deben considerarse las siguientes definiciones:

$$\delta J_c = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\sigma}^* : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x^* d\Omega_L + \int_{\Omega_c} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u}^* d\Omega_L - \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}^* d\Omega_L - \int_S \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}^* dS \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_x^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x^*(\mathbf{u}) = [\varepsilon_{xij}] = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3a,b)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^*$ ,  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{T}$  denotan al tensor de tensiones, vector de desplazamientos, vector de fuerzas volumétricas y vector de tensión en la superficie, respectivamente,  $d\Omega_L = dy_1 dy_2 dy_3$ . La expresión (3a) corresponde a la Ley de Hooke, siendo  $\mathbf{C}$  el tensor constitutivo y  $\boldsymbol{\varepsilon}_x^*$  el tensor de deformaciones. La expresión (3b) corresponde a las relaciones cinemáticas.

Si bien es posible resolver el problema variacional formulado mediante un modelo detallado de elementos finitos, puede resultar más eficiente emplear un enfoque de homogeneización como se muestra en la sección siguiente.

## 2.2 Procedimiento de homogeneización

Se formula un procedimiento de homogeneización del problema anterior que esencialmente conduce a otro equivalente correspondiente a un material homogéneo ficticio. Para ello se considera una celda genérica como se muestra en la Figura 1b. El desplazamiento en dicha celda puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^0 + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{con} \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) y_j \quad (4)$$

Se puede observar que  $\mathbf{u}^0$  varía linealmente en la celda,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$  y  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  son constantes en cada celda, aunque pueden variar de una celda a otra.  $\bar{\mathbf{u}}$  por su parte es un vector desplazamiento secundario que puede tener una variación de mayor orden que  $\mathbf{u}^0$  en cada celda. Se asume que este vector varía, respecto a las coordenadas locales de igual manera en cada celda (*y-periodica*). Este vector de desplazamiento secundario se asume pequeño en  $\Omega_s$  respecto de  $\mathbf{u}^0$ , aunque puede ser comparable en  $\Omega_m$  debido a la posibilidad de resonancia localizada. Empleando (4) puede determinarse el tensor de deformaciones de acuerdo a (3b) en la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^* = \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}}) \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u})$  se expresa de manera similar a (3b) aunque derivando únicamente el vector  $\mathbf{u}$  respecto a las coordenadas globales y de igual manera  $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}})$  aunque derivando el vector  $\bar{\mathbf{u}}$  con respecto a las coordenadas locales.

Si se sustituyen las expresiones (4-5) en las expresiones de trabajos virtuales (1-3) separando los términos con variación global ( $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_x$  y  $\delta \mathbf{u}^0$ ) de los términos con variación local ( $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_y$  y  $\delta \bar{\mathbf{u}}$ ), resulta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta J_c = & \int_{\Omega_c} [\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}}))] : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x d\Omega_L - \int_{\Omega_c} \rho \omega^2 (\mathbf{u}^0 + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}^0 d\Omega_L - \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_L \\ & - \int_S \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{\Omega_c} [\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}}))] : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_y d\Omega_L - \int_{\Omega_c} \rho \omega^2 (\mathbf{u}^0 + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Omega_L - \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Omega_L \end{aligned} \quad (6)$$

Considerando los términos de variación local y aplicando cálculo variacional pueden obtenerse las ecuaciones gobernantes para cada celda, las que pueden ser desdobladas de manera aproximada para el material rígido ( $\Omega_s$ ) y para el material blando ( $\Omega_m$ ).

$$\begin{cases} Div_s [\mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}}_s)] = 0 & \text{en } \Omega_s \\ C.B.: \mathbf{C}^s : (\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}}_s)) \cdot \bar{\mathbf{n}}|_{\Gamma_i} = 0, \quad \int_{\Omega_s} \bar{\mathbf{u}}_s d\Omega_L = 0 \end{cases} \quad (7a-c)$$

$$\begin{cases} Div_m [\mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\bar{\mathbf{u}}_m)] + \rho_m \omega^2 (\bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0, & \text{en } \Omega_m \\ C.B.: \bar{\mathbf{u}}_m|_{\Gamma_i} = 0 \end{cases} \quad (8a-b)$$

donde  $Div_s$  y  $Div_m$  corresponden a operadores de divergencia respecto a coordenadas locales en  $\Omega_s$  y  $\Omega_m$  respectivamente. Asimismo,  $\bar{\mathbf{u}}_s$  y  $\bar{\mathbf{u}}_m$  corresponden al vector de desplazamiento secundario  $\bar{\mathbf{u}}$  evaluado en  $\Omega_s$  y en  $\Omega_m$  respectivamente. Como puede observarse las ecuaciones diferenciales (7) y (8) corresponden a las ecuaciones de Navier en  $\Omega_s$  y en  $\Omega_m$ . El término de aceleración en la (7a) se ha despreciado en virtud de la gran rigidez del material  $s$ . De igual manera, la condición de borde sobre  $\Gamma_i$  (7b) expresa que el correspondiente vector de tensión es nulo, es decir se desprecian las tensiones del material  $m$  en relación al

material  $s$ . Tales aproximaciones se justifican con un análisis de orden de magnitud (Auriault y Boutin, 2012). El sistema (7) se complementa con condiciones de borde periódicas sobre  $\Gamma_e$  y tiene solución única si se establece la hipótesis (7c).

Puede observarse que el sistema (7) acopla la escala de la celda con la escala global debido a la aparición de  $\varepsilon_x$  en la condición de borde (7b). Luego, es posible obtener una expresión generalizada para este acoplamiento resolviendo (usualmente mediante el MEF) el sistema (7) para  $\varepsilon_{x11} = 1$  y el resto de las componentes iguales a cero, repitiendo el proceso para cada componente del tensor de deformación. Es decir, el sistema (7) debe resolverse seis veces en el caso espacial y tres veces en el caso plano. Superponiendo estos casos para valores arbitrarios de las componentes de  $\varepsilon_x$  se llega a la solución general que puede expresarse de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{u}}_s = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}) \quad (9)$$

El sistema (8) describe la dinámica interna de la inserción. De manera similar a la obtención de la solución (9), puede obtenerse la solución del sistema (8) en términos del vector de desplazamiento global  $\mathbf{u}$  de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{u}}_m = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f} / (\rho_m \omega^2) \quad (10)$$

La determinación del tensor  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{y})$  requiere de la solución independiente del sistema (8) para  $u = (1, 0, 0)$ ,  $u = (0, 1, 0)$  y  $u = (0, 0, 1)$ . Finalmente, sustituyendo (9) y (10) en la expresión (6) para las variaciones globales, integrando en la celda, pasando al límite  $\Omega_c \rightarrow 0$  en (1) se obtiene la expresión de trabajos virtuales para la escala global. Aplicando cálculo de variaciones se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales gobernantes de la dinámica estructural global:

$$\text{Div}_x [\mathbf{C}^H : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u})] + \omega^2 \boldsymbol{\rho}_{ef} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}_{ef} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (11)$$

donde  $\text{Div}_x$  corresponde al operador de divergencia respecto a las coordenadas globales. En (11) se han definido el tensor de densidad global  $\boldsymbol{\rho}_{ef}$  y el tensor constitutivo homogeneizado  $\mathbf{C}^H$  de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\rho}_{ef} = [\rho_{efij}] = [(\rho_s c_s + \rho_m c_m) \delta_{ij} + \rho_m \gamma_{ij}], \quad \mathbf{C}^H = \int_{\Omega_s} (\mathbf{C}^s + \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\chi})) d\Omega_L / \Omega_c, \quad \mathbf{f}_{ef} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{f} \quad (12a-c)$$

con:

$$\boldsymbol{\gamma}(\omega) = \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\xi} d\Omega_L / \Omega_c \quad (13)$$

Debe observarse que  $\boldsymbol{\gamma}$  expresa el efecto de la dinámica interna sobre la dinámica global. La ecuación (11) se complementa con las condiciones de borde sobre la superficie de la estructura.

Para la resolución del modelo homogeneizado es necesario proceder de la siguiente manera: a) resolver el sistema (7) y determinar  $\mathbf{C}^H$  mediante (12b), b) resolver el sistema (8) y determinar  $\boldsymbol{\gamma}$  mediante (13) y c) resolver la ecuación (11). En las aplicaciones prácticas se requiere obtener la función de la respuesta en frecuencia por lo que los pasos b) y c) deben reiterarse para un gran número de valores posibles de la frecuencia externa  $\omega$  (de manera similar para el cálculo de frecuencias naturales). En consecuencia, a pesar de que este modelo es más económico que el modelo original (1-3), aún requiere una

importante carga computacional por lo cual es conveniente encontrar una manera de simplificar la tarea. Para tal fin en la sección siguiente se propone un modelo reducido.

### 3 MODELO REDUCIDO

Se formula el modelo reducido basado en el uso simultáneo de la expansión modal de la dinámica en la inserción y de la dinámica de la estructura global.

#### 3.1 Expansión modal de la dinámica en la inserción

Se propone, siguiendo a [Auriault y Boutin, \(2012\)](#), la siguiente aproximación para la solución del problema (8) (dinámica interna de la inserción):

$$\bar{\mathbf{u}}_m = \sum_{n=1}^{Nm} \alpha_n(\mathbf{x}) \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{y}) \quad (14)$$

donde  $\alpha_n$  son funciones de la variable global  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\psi}_n$  son las funciones propias del problema de autovalores asociado a (8):

$$\text{Div}_m [\mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\psi}_n)] + \rho_m \lambda_n^2 \boldsymbol{\psi}_n = 0, \quad \boldsymbol{\psi}_n|_{\Gamma_i} = 0 \quad (15a-b)$$

Es decir, (15) constituye el problema de vibraciones libres del material  $m$ . Para obtener  $\alpha_n$  se reemplaza (14) en (8) y se aplica el método global de Galerkin. Una vez obtenidas tales funciones  $\alpha_n$ , se determina mediante (13) el tensor  $\boldsymbol{\gamma}$  que hace posible obtener  $\boldsymbol{\rho}_{ef}$ .

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{n=1}^{Nm} \frac{\omega^2}{(\lambda_n^2 - \omega^2)} \frac{\int_{\Omega_m} \boldsymbol{\psi}_n d\Omega_L \otimes \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\psi}_n d\Omega_L}{\Omega_c \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\psi}_n \cdot \boldsymbol{\psi}_n d\Omega_L} \quad (16)$$

#### 3.2 Expansión modal de la dinámica global

Con la expresión anterior la densidad efectiva se expresa de manera explícita en función de  $\omega$ , de tal manera que el sistema (11) contiene toda la información de la microescala (celda). Esta ecuación puede ser resuelta de manera reducida aproximando el desplazamiento global mediante los modos de vibración de la estructura sin material dentro de las inserciones ( $\rho_m = 0$ ) o estructura base:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{NN} \beta_n \boldsymbol{\Phi}_n(\mathbf{x}) \quad (17)$$

Tal expansión se realiza a partir de la ecuación de autovalores homogeneizada, junto a condiciones esenciales de contorno nulas:

$$\text{Div}_x [\mathbf{C}^H : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\boldsymbol{\Phi}_n)] + \rho_s c_s \zeta_n^2 \boldsymbol{\Phi}_n = 0 \quad (18)$$

Reemplazando la expansión (17) y la expresión (16) en la ecuación (11) es posible llegar al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas, luego de aplicar el método de Galerkin global, que permite obtener las constantes  $\beta_n$ :

$$\sum_{j=1}^{NN} \left[ \left( \rho_s c_s \zeta_n^2 - (\rho_s c_s + \rho_m c_m) \omega^2 \right) \int_{\Omega} \Phi_n^2 d\Omega \delta_{jn} - \rho_m \omega^2 \int_{\Omega} \gamma \cdot \Phi_j \cdot \Phi_n d\Omega_L \right] \beta_j = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{ef} \cdot \Phi_n d\Omega + \int_S \mathbf{T} \cdot \Phi_n dS \quad (19)$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$\sum_{j=1}^{NN} A_{nj}(\omega) \beta_j = F_n(\omega) \quad (20)$$

Para construir la ecuación (20) es necesario resolver la ecuación (15), obtener  $\gamma$  mediante (16) y determinar  $\Phi_n$  mediante la resolución del problema (18). Una vez resuelta (20), es posible determinar los desplazamientos a partir de las expresiones (17), (10), (9) y (4), y luego las tensiones de ser necesarias. Las frecuencias naturales de vibración pueden obtenerse de la respuesta dinámica en frecuencia. Debe observarse que en general para respuesta en bajas frecuencias los grados de libertad involucrados en el presente modelo reducido son considerablemente menores que en el modelo homogeneizado original.

#### 4 APLICACIONES

El modelo reducido propuesto se basa en el cálculo de frecuencias naturales de la estructura soporte (tomando  $\rho_m = 0$ ) a partir de la ecuación homogeneizada (18). Por lo tanto, su precisión dependerá de cuán aproximados sean tales autovalores en comparación con el del cálculo detallado de la estructura original. Para estudiar el grado de precisión esperable se calculan las frecuencias naturales de la estructura agujereada ( $\rho_m = 0$ ) mostrada en la Figura 1a) a partir de las ecuaciones (1-3) y se comparan con las obtenidas mediante el modelo homogeneizado (18). Ambos casos se resuelven mediante el MEF. Las características de la estructura son las siguientes:  $L=4\text{m}$ ,  $h=1\text{m}$ ,  $E_s=2.1\text{e}11 \text{ Pa}$ ,  $\nu=0,3$ ,  $\rho_s=7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_m=\rho_m=0$ , espesor=0,01m,  $r_i=0,05\text{m}$ . Los resultados se muestran en la Tabla 1. Como se aprecia, los resultados difieren en menos del 1%. El tiempo de cálculo del modelo detallado fue de 2,5 minutos mientras que el del modelo homogeneizado fue menor a 2 segundos (75 veces menor).

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
Modelo detallado (1-3)	274,1	1352,2	1784,5	3060,6	4882,1
Modelo homogeneizado (18)	272,7	1343,3	1784,8	3039,0	4844,3

Tabla 1: Valores de frecuencias naturales (rad/s) de la estructura base (agujereada).

A continuación, se considera la misma geometría aunque las inserciones corresponden a un material con las siguientes características:  $E_m=7\text{e}6 \text{ Pa}$ ,  $\rho_m=950 \text{ kg/m}^3$ . La existencia de material en las inserciones puede generar efectos localmente resonantes (microinerciales). Para estudiar tal fenómeno se analizan las frecuencias naturales de vibración mediante tres modelos diferentes. El primero de ellos corresponde al cálculo detallado de la estructura heterogénea gobernada por las ecuaciones (1-3), el segundo, corresponde al cálculo según un modelo homogeneizado considerando una densidad equivalente del material  $\bar{\rho} = \rho_s c_s + \rho_m c_m$ , es decir corresponde a la densidad efectiva (12a) en la cual se ha despreciado el efecto de la

microinercia, y el tercer modelo corresponde al homogeneizado propuesto (20) que considera efectos microinerciales. Todos los cálculos elásticos fueron realizados mediante el MEF.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega >$
Modelo detallado	270	1324	1750	2950	3490	4885
Modelo homog. sin microinercia	269	1324	1759	2993	---	4773
Modelo reducido propuesto (20)	268	1324	1758	2974	3530	4803

Tabla 2: Valores de frecuencias naturales (rad/s) de la estructura heterogénea.

Como se puede apreciar en la [Tabla 2](#), los tres modelos arrojan resultados similares para las primeras cuatro frecuencias y también para la mostrada en la última columna. Sin embargo, la quinta frecuencia, 3500 rad/seg., es detectada por el primero y último modelo y no por el segundo. Se trata de un modo localizado micro-inercial. Tal frecuencia es cercana a un modo de la inserción aislada ([Ec. 15](#)). En general, tal modo localizado está asociado a una brecha de banda ([Sugino et al., 2016](#)), por lo que existen varios modos con frecuencias de valor similar. Esto último presupone un inconveniente para el cálculo de frecuencias a partir del método convencional de resolución de autovalores. Por esta razón, tales frecuencias fueron obtenidas a partir del cálculo de la respuesta en frecuencia (barrido en  $\omega$ ). Dicho cálculo insumió un tiempo de cálculo aproximadamente mil veces menor que el correspondiente al modelo detallado y menos de 1 segundo con el modelo reducido. Es decir, el tiempo insumido por este último se debe solamente a la resolución numérica de los problemas homogeneizados (7), (15) y (18) solamente una vez. Todos estos cálculos insumen unos pocos segundos.

A continuación, se considera el modelo reducido de la estructura analizada ([Figura 1a](#)) aunque aprovechando características que permiten simplificar aún más su tratamiento. En muchos casos, la respuesta dinámica de la estructura involucra sólo a los dos modos más bajos microinerciales (horizontal y vertical). Es decir, las frecuencias mayores a la del segundo modo de las vibraciones libres de la inserción aislada son mucho mayores al rango de frecuencia de interés de la respuesta estructural. Consecuentemente, en la dinámica de la inserción (15) se considera sólo el primer modo vertical y el primer modo horizontal. Si además se considera que la inserción es bisimétrica, las frecuencias correspondientes resultan idénticas por lo que es posible expresar el tensor  $\gamma$  de la expresión (13) de la siguiente forma diagonal:

$$\gamma_{ij} = \left( \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \right) \left( \int_{\Omega_m} |\Psi_1| d\Omega_L \right)^2 / \left( \Omega_c \int_{\Omega_m} (\Psi_1)^2 d\Omega_L \right) \delta_{ij} \quad (21)$$

donde  $\Psi_1$  y  $\lambda$  son el autovector y frecuencia fundamental de la vibración libre de la inserción. La sustitución de (21) en la ecuación del modelo reducido (20) permite desacoplar los diferentes modos globales obteniéndose la siguiente expresión para cada una de las constantes  $\beta_n$ :

$$\beta_n = (1/\rho_s c_s) \left( \zeta_n^2 - \omega^2 \left( 1 + \frac{\mu \lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \right) \right)^{-1} \left( \int_{\Omega} \mathbf{f}_{ef} \cdot \Phi_n d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T} \cdot \Phi_n dS \right) / \int_{\Omega} (\Phi_n)^2 d\Omega \quad (22)$$

Dicha expresión en conjunto con (17) permite obtener fácilmente la respuesta en frecuencia de la estructura. Debe observarse que las frecuencias de resonancia (frecuencias naturales del sistema heterogéneo periódico) se obtienen anulando el denominador de la expresión (22). Despejando los correspondientes valores de  $\omega$  se obtienen:

$$\left(\omega_n^\pm / \lambda\right) = \sqrt{0.5\left(1 + \mu + (\zeta_n / \lambda)^2\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(4(\zeta_n / \lambda)^2\right) / \left(1 + \mu + (\zeta_n / \lambda)^2\right)^2}\right)} \quad (23)$$

siendo  $\mu = \rho_m c_m / \rho_s c_s$ . Como puede verse, para cada modo de la estructura base se obtienen dos frecuencias  $\omega_n^+$  y  $\omega_n^-$  de la estructura compuesta. Es importante mencionar que las expresiones (22) y (23) coinciden con las obtenidas por Sugino et al. (2016) para el estudio de vibraciones libres de vigas con infinitos sistemas masa-resorte adosados. En consecuencia, las expresiones (22) y (23) extienden tal enfoque a cuerpos tridimensionales. De tal manera que para el caso del material heterogéneo periódico analizado valen las observaciones realizadas por Sugino et al. (2016) y en particular las referidas a la existencia de brechas de banda. Por razones de espacio, tales observaciones no pueden explicarse aquí por lo que se sugiere al lector dirigirse a la referencia citada.

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo homogeneizado para el estudio de la dinámica estructural de un metamaterial localmente resonante. Corresponde a la teoría de Auriault y Boutin aunque la derivación se ha realizado a partir del principio de trabajos virtuales. Esta alternativa puede ser útil desde el punto de vista didáctico. El principal aporte del presente trabajo ha sido la propuesta de un procedimiento de reducción de orden para resolver la teoría de Auriault y Boutin. Este enfoque se basa en la expansión modal de la dinámica interna de la inserción (de igual manera que Auriault y Boutin) y de la representación de la dinámica externa en términos de una expansión utilizando autofunciones de la estructura agujereada homogeneizada (considerando nulo el material en las inserciones). Tales expansiones en conjunto con el método global de Galerkin conducen a un sistema reducido de ecuaciones algebraicas que permite obtener muy eficientemente la función de la respuesta en frecuencia estructural correspondiente a la excitación en el rango de baja frecuencia de la estructura heterogénea periódica. Así fue posible obtener fórmulas analíticas para analizar bandas de atenuación en cuerpos tridimensionales, extendiendo el enfoque propuesto por Sugino et al. (2016) para dinámica de vigas con resonadores. Consecuentemente, este enfoque puede ser muy atractivo para el diseño óptimo de estructuras de metamateriales.

## REFERENCIAS

- Auriault, J. L. y Boutin, C., Long wavelength inner resonance cut-off frequencies in elastic composite materials, *International Journal of Solids and Structures* 49: 3269-3281, 2012.
- Basone, F., Wenzel, M., Bursi, O.S. y Fossetti, M., Finite locally resonant metafoundations for the seismic protection of fuel storage tanks, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 48(2):232-252, 2019.
- Bonnet, G. y Monchiet, V., Low frequency locally resonant metamaterials containing composite inclusions, *Journal of the Acoustical Society of America* 137: 3263, 2015.
- Sugino, C., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials, *Journal of Applied Physics* 120: 134501, 2016.
- Hussein, M.I., Leamy M. y Ruzzene, M., Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future, *Applied Mechanics Reviews* 66(4), 2014.
- Sun, H., Du, X. y Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.