

## DESARROLLO DE UN MODELO ESTRUCTURAL HÍBRIDO DE UNA TURBINA EÓLICA COMPLETA

### DEVELOPMENT OF A HYBRID STRUCTURAL MODEL OF A COMPLETE WIND TURBINE

Santiago Ribero<sup>a,b</sup>, José A. Inaudi<sup>b,c</sup> y Sergio Preidikman<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [idit@fcefyn.edu.ar](mailto:idit@fcefyn.edu.ar), [www.inv.idit.efn.uncor.edu](http://www.inv.idit.efn.uncor.edu)*

<sup>b</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

<sup>c</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Córdoba, Av. Armada Argentina, 5000 Córdoba, Argentina, <https://www.uccor.edu.ar>*

**Palabras clave:** Aerogenerador, Modelos Estructurales Híbridos, Energía Renovable.

**Resumen.** Las energías renovables representan un aporte cada vez mayor en la matriz de generación de energía eléctrica, especialmente las turbinas eólicas que han alcanzado gran difusión a nivel mundial. Resulta valioso contar con herramientas computacionales robustas y confiables que permitan estudiar la dinámica de estas estructuras, a fin de poder acompañar este proceso de expansión y apoyar el avance tecnológico y de ingeniería de diseño. Se presenta un modelo estructural híbrido de aerogenerador eólico de eje horizontal formado por un conjunto de cuerpos rígidos y cuerpos flexibles. La torre flexible se modela como una viga de Euler-Bernoulli con campos de desplazamiento en las direcciones principales de inercia de la sección transversal. Por su parte, el conjunto góndola-nariz-palas se modela como cuerpos rígidos. En la modelación cinemática de la viga en flexión se utiliza un conjunto de modos asumidos en la torre. Se calculan frecuencias naturales de vibración del sistema y se contrastan las estimaciones con resultados publicados en la literatura para el rotor sin velocidad angular en su eje de rotación.

**Keywords:** Wind Turbine, Hybrid Structural Models, Renewable Energy.

**Abstract.** Renewable energy represents an increasing contribution to the matrix of electric power generation. Large horizontal axis wind turbines have gained acceptance worldwide. In this context, robust and reliable computational tools are necessary to study the dynamic behavior of these structures, to accompany this expansion process and to support technological progress and engineering design. A hybrid structural model of a large horizontal axis wind turbine is presented. The model is conceived as a set of rigid and flexible bodies. The flexible tower is modeled as a Euler-Bernoulli beam with displacement fields in the direction of principal axis of inertia of the transverse section of the beam. On the other hand, the nacelle-rotor assembly is modeled as a set of rigid bodies. A set of assumed modes are used for the kinematic description of the beam in flexure. Natural frequencies of the system are computed and compared with results published in the literature with no angular velocity in its axis of rotation.

## 1. INTRODUCCIÓN

*La Argentina está siendo protagonista de un desarrollo inédito.* Con estas palabras se da inicio al reporte anual del año 2018 publicado por el Consejo Mundial de Energía Eólica ([www.gwec.net](http://www.gwec.net)). Sin dudas, dicho protagonismo conlleva la necesidad de acompañar a la industria, proveer de soluciones a los diversos sectores que componen la cadena de valor y generar fundamentalmente el conocimiento técnico específico para que este proceso sea virtuoso.

Dentro del campo de la energía eólica existen diferentes tecnologías que permiten el aprovechamiento del recurso del viento. Una de ellas es la turbina eólica de eje horizontal y de gran potencia (LHAWT), que se compone de una torre ("tower"), una góndola ("nacelle"), una nariz ("hub") y 3 palas ("blades").

El tamaño de las turbinas eólicas comerciales se ha incrementado dramáticamente durante los últimos 25 años desde aproximadamente una potencia de 50 kW hasta las máquinas de hoy, comercialmente disponibles, con modelos "onshore" de una capacidad de generación de 7.5 MW, y modelos "offshore" que pueden llegar a generar hasta 8.8 MW (<https://en.wind-turbine-models.com/turbines/1819-mhi-vestas-offshore-v164-8.8-mw>). Además, existen investigaciones en curso para duplicar estas capacidades de generación actual ([www.wind.mw.tum.de](http://www.wind.mw.tum.de) y [www.nrel.gov](http://www.nrel.gov)).

Este desarrollo ha forzado un cambio sustancial en las herramientas de diseño: de simples cálculos estáticos que asumen una corriente de aire de velocidad constante, al desarrollo de software que, utilizando modelos estructurales y modelos de aerodinámica inestacionaria, permitan simular el comportamiento aeroelástico de la turbina completa.

Este trabajo se enmarca en un objetivo más general que es el estudio de una granja eólica, en la que se considera la interacción aerodinámica entre turbinas, la capa límite terrestre y la dinámica estructural propia del aerogenerador. Abordar este problema de gran complejidad requiere de computadoras más potentes y con mayor capacidad de almacenamiento. Sin embargo, los recursos informáticos no son ilimitados y es necesario disponer de técnicas eficientes que, por un lado, capten los aspectos principales del proceso y, por otro, entreguen resultados en tiempos razonables. Por lo que, como objetivo particular, se propone desarrollar un modelo que permita definir las características dinámicas de una turbina eólica reduciendo fuertemente el costo computacional que implicaría un análisis mediante modelos de elementos finitos.

En este trabajo se presenta un modelo estructural híbrido/multicuerpo y una técnica numérica que permiten estudiar la dinámica estructural de una LHAWT. En la sección 2.1 se describe la cinemática del conjunto góndola-nariz-palas y de la torre. El primero, modelado como un cuerpo rígido y, la segunda, como una viga de Euler-Bernoulli (Rao, 2007). A continuación, en la sección 2.2 se explicitan las ecuaciones de restricción sobre el movimiento del cuerpo rígido con respecto a la torre y cómo se vinculan entre ambos. En la sección 2.3 se obtienen las ecuaciones de las energías potenciales y cinéticas que serán proyectadas por medio de la técnica de modos asumidos en la sección 2.4, con el fin de reducir el orden de las ecuaciones de movimiento del sistema. Luego en la sección 2.5, mediante la formulación Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de movimiento de la turbina eólica. Luego, se presentan resultados en la sección 3 en los que se observa la convergencia de la frecuencia natural para distintos números de funciones de forma asumidas y se los compara con la solución por el método de elementos finitos de la bibliografía. Por último, en la sección 4 se extraen conclusiones y se dejan mencionadas propuestas de desarrollo futuro.

## 2. DESARROLLO DEL MODELO ESTRUCTURAL MULTICUERPO DE LA TURBINA EÓLICA

### 2.1. Descripción cinemática

En esta sección se presenta la cinemática del conjunto góndola-nariz-palas que se modelan como un cuerpo rígido y la cinemática de la torre que se modela como una viga de Euler-Bernoulli. Para ello, se utilizan tres marcos de referencia. El primero, marco de referencia inercial,  $N$ , tiene asociada una base  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  con origen  $O$ , el segundo,  $B$ , tiene asociada una base  $\mathcal{B} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$  con origen  $O_i$  y está fijo al cuerpo rígido en el punto de anclaje a la torre, y por último, el marco  $L$  tiene asociado una base  $\mathcal{L} = \{\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3\}$  con origen  $O_l$  y que esta colocado en el extremo libre de la torre. Los vectores de las bases cumplen las siguientes condiciones: son vectores unitarios, son vectores ortogonales y, satisfacen la regla de la mano derecha.

Durante el desarrollo de la cinemática se expresan los vectores de posición o de velocidad en las bases  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{B}$  para lo que es necesario definir la orientación relativa entre ambos marcos. En este caso se utilizan ángulos de Euler, con una terna de rotación 3 – 2 – 1. Por lo tanto, un vector expresado en la base  $\mathcal{B}$  puede ser transformado a la base  $\mathcal{N}$  mediante la siguiente expresión:

$${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r} = T_{\mathcal{N}\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}\mathbf{r} \quad (1)$$

donde  $T_{\mathcal{N}\mathcal{B}}$  es la matriz de cambio de base y es función de los ángulos de Euler,  ${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}$  es un vector expresado en la base  $\mathcal{N}$  y  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}$  es el mismo vector expresado en la base  $\mathcal{B}$ .

El vector posición del punto  $p$ , (ver figura 1), respecto del origen  $O$  en la base  $\mathcal{N}$ ,  ${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}^{p/O}(t)$ , está dado por:

$${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}^{p/O}(t) = {}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}^{O_i/O}(t) + T_{\mathcal{N}\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}^{p/O_i} \quad (2)$$

donde  $t$  es la variable temporal,  ${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}^{O_i/O}(t)$  es el vector posición del origen  $O_i$  respecto del origen  $O$ , expresado en la base  $\mathcal{N}$ , y  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}^{p/O_i}(t)$  es el vector posición del punto  $p$  con respecto a  $O_i$ , expresado en la base  $\mathcal{B}$ :

El vector velocidad del punto  $p$  respecto del origen  $O$  expresado en la base  $\mathcal{N}$ ,  ${}^{\mathcal{N}}\dot{\mathbf{r}}(t)^{p/O}$ , se obtiene del cálculo de la derivada temporal de la ecuación (2), y cuya expresión es:

$${}^{\mathcal{N}}\dot{\mathbf{r}}(t)^{p/O} = {}^{\mathcal{N}}\dot{\mathbf{r}}^{O_i/O}(t) + {}^{\mathcal{N}}\tilde{\Omega}(t)^{B/N}T_{\mathcal{N}\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}^{p/O_i} \quad (3)$$

donde  ${}^{\mathcal{N}}\dot{\mathbf{r}}^{O_i/O}(t)$  es la velocidad del origen  $O_i$  con respecto al origen  $O$ , expresado en la base  $\mathcal{N}$ ,  ${}^{\mathcal{N}}\tilde{\Omega}(t)^{B/N}$  es la matriz antisimétrica de velocidad angular del marco de referencia  $B$  respecto del marco de referencia  $N$  expresada en la base  $\mathcal{N}$ , y está dada por:

$${}^{\mathcal{N}}\tilde{\Omega}(t)^{B/N} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , y  $\omega_z$  son las componentes del vector de velocidad angular del marco de referencia  $B$  respecto del marco de referencia  $N$ , expresadas en la base  $\mathcal{N}$ , y se calculan como:

$${}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\omega}(t)^{B/N} = T_{\mathcal{N}\mathcal{B}}B_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}{}^{\mathcal{E}}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)^{B/N} \quad (5)$$

donde  $B_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$  es la matriz de cambio de base de Euler,  $\mathcal{E}$ , a la base  $\mathcal{B}$  y  ${}^{\mathcal{E}}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)^{B/N}$  es el vector velocidad angular del marco de referencia  $B$  respecto del marco de referencia  $N$  expresado en la base  $\mathcal{E}$  (Ribero et al., 2019).

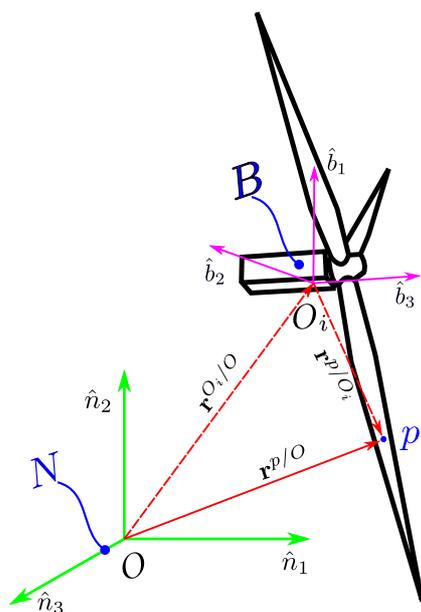


Figura 1: Cinemática del cuerpo rígido: góndola-nariz-palas

La torre es modelada como una viga flexible, empotrada en la base y libre en el extremo superior, que satisface las hipótesis de Euler-Bernoulli (Rao, 2007). El vector posición de una sección genérica de la viga ubicada en la estación  $x$ , medida en la dirección del vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}_1$  (ver Figura 2), expresado en la base  $\mathcal{N}$ ,  ${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}^{x/O}(x, t)$ , está dado por:

$${}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}^{x/O}(x, t) = \{x, v(x, t), w(x, t)\}^T \quad (6)$$

donde  $v(x, t)$  es el campo de desplazamiento del eje neutro de la viga en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}_2$  y  $w(x, t)$  es el campo de desplazamiento del eje neutro de la viga en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}_3$ . En la Figura 2 se esquematiza el modelo de la torre propuesto en este trabajo. La misma muestra, además, el sistema de referencia auxiliar  $L$  ubicado en el extremo de la torre utilizado para imponer condiciones cinemáticas de restricción al movimiento relativo entre el conjunto góndola-nariz-palas y la torre.

El vector velocidad de una sección transversal de la torre ubicada en la estación  $x$ , expresado en la base  $\mathcal{N}$ , se obtiene calculando la derivada respecto del tiempo de la ecuación (6), y está dado por:

$${}^{\mathcal{N}}\dot{\mathbf{r}}^{x/O}(x, t) = \{0, \dot{v}(x, t), \dot{w}(x, t)\}^T \quad (7)$$

donde  $\dot{v}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}v(x, t)$ , y  $\dot{w}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}w(x, t)$ . El vector de rotaciones infinitesimales de la sección transversal de la torre ubicada en la estación  $x$ , respecto del marco de referencia  $N$ , y expresado en la base  $\mathcal{N}$ ,  ${}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\theta}^{x/O}(x, t)$ , se obtiene derivando respecto de la coordenada espacial  $x$  la ecuación (6). El mismo está dado por:

$${}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\theta}^{x/O}(x, t) = \{0, v'(x, t), w'(x, t)\}^T \quad (8)$$

donde  $v'(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}v(x, t)$ , y  $w'(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}w(x, t)$ . El vector velocidad angular de la sección transversal de la torre ubicada en la estación  $x$ , respecto del marco de referencia  $N$ , y expresado en la base  $\mathcal{N}$ ,  ${}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\omega}^{x/O}(x, t)$ , se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación (8). El mismo está dado por:

$${}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\omega}^{x/O}(x, t) = \{0, \dot{v}'(x, t), \dot{w}'(x, t)\}^T \quad (9)$$

donde  $\dot{v}'(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} v(x, t)$ , y  $\dot{w}'(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} w(x, t)$ .

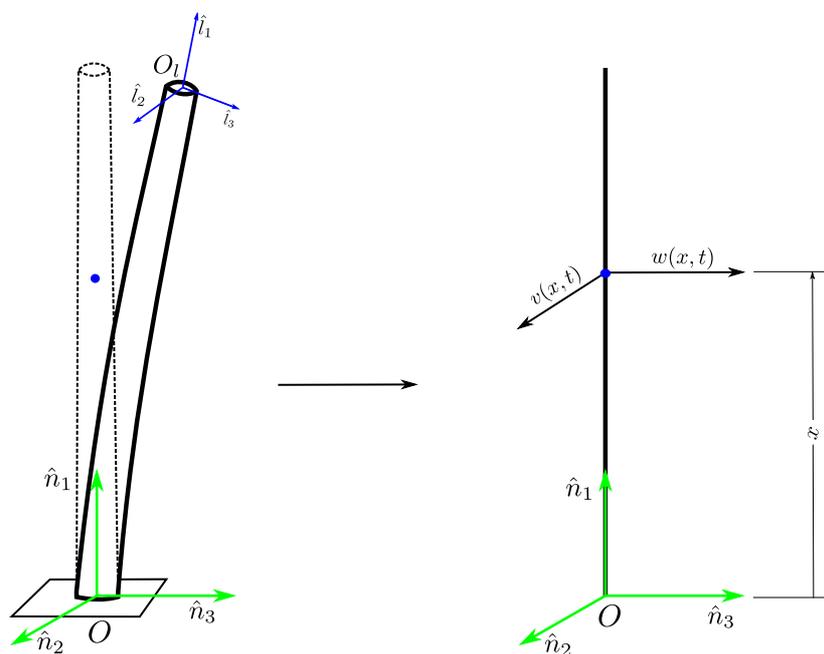


Figura 2: Torre y modelo de viga empotrada-libre:  $v(x, t)$  y  $w(x, t)$

### 2.2. Ecuaciones de restricción

El conjunto góndola-nariz-palas es modelado, como se mencionó anteriormente, como un cuerpo rígido. Dicho cuerpo se encuentra vinculado rígidamente al extremo libre de la torre. Surge de ello una relación entre los desplazamientos del extremo libre de la torre y el origen  $O_i$  del marco de referencia  $B$ . Especializando las ecuaciones (2) y (6) para el punto de anclaje:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{r}^{L/O}}(t) = \mathcal{N}_{\mathbf{r}^{O_i/O}}(t) \tag{10}$$

La ecuación (10) representa un conjunto de tres ecuaciones escalares de restricción.

La orientación del conjunto góndola-nariz-palas respecto del extremo libre de la torre no cambia en el tiempo. La misma está definida por una terna de ángulos de Euler,  $\theta_0$ , que definen la orientación relativa entre el marco de referencia  $B$ , ubicado en el punto  $O_i$  del conjunto góndola-nariz-palas, y el marco de referencia  $L$ , ubicado en el extremo superior de la torre, esto es:

$$\theta_0 = (\psi_0, \theta_0, \phi_0) = \text{constante} \tag{11}$$

La ecuación (11) representa tres ecuaciones escalares adicionales de restricción. Utilizando las ecuaciones (10) y (11) quedan expresados los seis grados de libertad del sólido rígido en términos de los seis grados de libertad del extremo de la torre.

### 2.3. Energías cinéticas y potenciales

El aporte del cuerpo rígido a la energía potencial total del sistema dinámico proviene solamente del campo gravitatorio, y está dado por:

$$V_{rb} = M_{rb}gL = \text{constante} \tag{12}$$

donde  $V_{rb}$  es la energía potencial gravitatoria del cuerpo rígido,  $M_{rb}$  es la masa del cuerpo rígido,  $g$  es la gravedad local y  $L$  la altura de la torre. No se considera el cambio de energía potencial del cuerpo rígido por la flexibilidad de la torre.

La energía cinética del conjunto góndola-nariz-palas,  $T_{rb}(t)$ , está dada por:

$$T_{rb}(t) = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}^p) (\mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{p/O}(t))^T \mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{p/O}(t) dV \quad (13)$$

donde  $V$  es el volumen del cuerpo rígido y  $\rho(\mathbf{r}^p)$  es la masa por unidad de volumen en el punto  $p$ . Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (13) y operando algebraicamente se llega a:

$$T_{rb}(t) = \frac{1}{2} \left[ M_{rb} (\mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{O_i/O})^T (\mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{O_i/O}) - 2 (\mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{O_i/O})^T I_{r\theta} \mathcal{B} \boldsymbol{\omega}^{B/N} + (\mathcal{B} \boldsymbol{\omega}^{B/N})^T I_{\theta\theta} \mathcal{B} \boldsymbol{\omega}^{B/N} \right] \quad (14)$$

donde  $\mathcal{B} \boldsymbol{\omega}^{B/N}$  es la velocidad angular del marco de referencia  $B$  respecto del marco de referencia  $N$ , expresado en la base  $\mathcal{B}$ ,  $I_{r\theta}$  es el momento de inercia másico de primer orden e  $I_{\theta\theta}$  es el momento inercia másico de segundo orden, cuyas expresiones son:

$$I_{r\theta} = T_{\mathcal{N}\mathcal{B}} \int_V \rho(\mathbf{r}^p) \mathcal{B} \tilde{R}^{p/O_i} dV \quad (15)$$

$$I_{\theta\theta} = \int_V \rho(\mathbf{r}^p) (\mathcal{B} \tilde{R}^{p/O_i})^T \mathcal{B} \tilde{R}^{p/O_i} dV$$

donde  $\mathcal{B} \tilde{R}^{p/O_i}$  es la matriz antisimétrica del vector posición de la partícula  $p$  respecto del origen  $O_i$ , expresado en la base  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{B} \tilde{R}^{p/O_i} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

El aporte a la energía potencial de la torre proviene de la deformación elástica. Considerando las hipótesis Euler-Bernoulli esta se expresa como:

$$V_b(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{N} \mathbf{r}^{x/O}(x,t) \right)^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{N} \mathbf{r}^{x/O}(x,t) dx \quad (17)$$

donde  $EI(x)$  es la rigidez a la flexión de la sección transversal ubicada en la estación  $x$ ,  $E(x)$  es el módulo elástico e  $I(x)$  es el momento de inercia de área de la sección transversal.

La energía cinética de la torre está dada por:

$$T_b(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{x/O}(x,t))^T \mathcal{N} \dot{\mathbf{r}}^{x/O}(x,t) dx \quad (18)$$

donde  $m(x) = A\rho(x)$  es la masa por unidad de longitud de la viga en la sección transversal ubicada en la estación  $x$ ,  $A(x)$  es el área de la sección transversal y  $\rho(x)$  es la densidad de la misma.

## 2.4. Proyección espacial de las expresiones de energía cinética y potencial usando el método de los modos asumidos

Los campos de desplazamiento transversal,  $v(x, t)$  y  $w(x, t)$ , son proyectados espacialmente mediante la técnica de modos asumidos:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_{v_i}(t) \\ w(x, t) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_{w_i}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son las funciones de prueba que se utilizan,  $q_{v_i}(t)$  son las coordenadas generalizadas en la dirección  $\hat{n}_2$  y  $q_{w_i}(t)$  son las coordenadas generalizadas en la dirección  $\hat{n}_3$ . Las funciones de prueba deben satisfacer las condiciones de borde de tipo esencial del problema de valores en la frontera:

$$\begin{aligned} v(0, t) = w(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} w(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

El conjunto de funciones de prueba propuestas fue tomado del trabajo [Beltamo et al. \(2018\)](#):

$$\phi_i(x) = 1 - \cos\left((2i - 1)\pi \frac{x}{2L}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

La expresión para las derivadas de las funciones de prueba es:

$$\phi'_i(x) = \frac{d}{dx} \phi_i(x) = \sin\left((2i - 1)\pi \frac{x}{2L}\right) \frac{(2i - 1)\pi}{2L} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Utilizando notación matricial, las ecuaciones (6), (7), y (8) pueden reescribirse como sigue:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{r}^{x/O}}(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{\phi}^T(x) & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\phi}^T(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \mathbf{q}_v(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

donde  $\boldsymbol{\phi}_i^T = \{\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ ,

$$\mathbf{q}_v(t) = \begin{Bmatrix} q_{v_1}(t) \\ \vdots \\ q_{v_n}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}_w(t) = \begin{Bmatrix} q_{w_1}(t) \\ \vdots \\ q_{w_n}(t) \end{Bmatrix}$$

el vector de coordenadas generalizadas en las direcciones  $\hat{n}_2$  y  $\hat{n}_3$  respectivamente.

$$\mathcal{N}_{\dot{\mathbf{r}}^{x/O}}(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{\phi}^T(x) & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\phi}^T(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{q}}_v(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_w(t) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

donde

$$\dot{\mathbf{q}}_v(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{v_1}(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_{v_n}(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_w(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{w_1}(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_{w_n}(t) \end{Bmatrix}$$

el vector de velocidades generalizadas en las direcciones  $\hat{n}_2$  y  $\hat{n}_3$  respectivamente.

$$\mathcal{N} \boldsymbol{\omega}^{L/O}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\phi}^{T'}(L) \\ 0 & \boldsymbol{\phi}^{T'}(L) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{q}}_v(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_w(t) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

donde  $\boldsymbol{\phi}_i^{T'}(L) = \{\phi_1'(L), \phi_2'(L), \dots, \phi_n'(L)\}$ .

## 2.5. Ecuaciones de movimiento de la turbina eólica

Para obtener las ecuaciones de movimiento se utilizan las ecuaciones de Lagrange (Hodges y Pierce, 2011), que en el caso en que no existan fuerzas no-conservativas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} L = \mathbf{0} \quad (26)$$

donde el lagrangiano,  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ , y se define como:

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = (T_{rb}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + T_b(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))) - (V_{rb} + V_b(\mathbf{q}(t))) \quad (27)$$

Reemplazando las expresiones de  $T_{rb}$ ,  $T_b$ ,  $V_{rb}$ ,  $V_b$  en la ecuación (27), y utilizando (26) se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias (con derivadas respecto del tiempo), acopladas, de segundo orden. Matricialmente pueden expresarse como:

$$[M]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [K]\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (28)$$

donde  $[M] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es la matriz de masa,  $[K] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es la matriz de rigidez,

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_{v_1}(t) \\ \vdots \\ q_{v_n}(t) \\ q_{w_1}(t) \\ \vdots \\ q_{w_n}(t) \end{Bmatrix}, y \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_{v_1}(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{v_n}(t) \\ \ddot{q}_{w_1}(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{w_n}(t) \end{Bmatrix}$$

son los vectores de coordenadas y aceleraciones generalizadas, respectivamente. Las matrices  $[M]$  y  $[K]$  son simétricas y definidas positivas. Proponiendo como solución de la ecuación (28) un movimiento sincrónico, esto es,  $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\psi} e^{i\omega t}$ , y separando variables, se obtiene un problema de autovalores generalizados. Las soluciones de dicho problema son los pares  $(\omega_k^2, \boldsymbol{\psi}_k)$  que representan las frecuencias naturales de vibrar al cuadrado y los modos normales, respectivamente. En la sección 3 se presentan resultados de un modelo paramétrico de la turbina eólica.

## 3. RESULTADOS

Los datos característicos de la turbina que se utilizó en este trabajo, fueron tomados del modelo *baseline* (Bir y Jonkman, 2008), de amplia difusión en el ámbito académico e industrial. La máquina posee una altura de torre de 87,6 [m] y un diámetro de rotor de 128 [m] con capacidad de generación de 5 [MW].

En la Tabla 1 se presentan valores de frecuencia natural para los modos de flexión: *Side-Side* (SS) en el plano  $\langle \hat{n}_1, \hat{n}_2 \rangle$  y *Fore-Aft* (FA) en el plano  $\langle \hat{n}_1, \hat{n}_3 \rangle$ . El cálculo de frecuencias naturales se hace para 8, 16 y 32 funciones de forma asumidas con el modelo completo y el

modelo sin el cuerpo rígido en el extremo. Para ambos casos se contrasta la aproximación lograda mediante la técnica de modos asumidos y el modelo de elementos finitos llamado *BModes* (<https://nwtc.nrel.gov/BModes>).

Núm. de modo	Tipo	Torre				Híbrido (torre + góndola-nariz-palas)			
		Frecuencia [Hz]				Frecuencia [Hz]			
		Bmodes	Modos Asumidos			Bmodes	Modos Asumidos		
		F.E.M.	8	16	32	F.E.M.	8	16	32
1	1 SS	0.891	0.891	0.891	0.891	0.329	0.322	0.322	0.322
2	1 FA	0.891	0.891	0.891	0.891	0.332	0.330	0.330	0.330
3	2 SS	4.374	4.373	4.372	4.372	1.881	2.288	2.256	2.240
4	2 FA	4.374	4.373	4.372	4.372	2.243	2.297	2.268	2.254
5	3 SS	11.391	11.392	11.386	11.385	4.653	5.532	5.247	5.125
6	3 FA	11.391	11.392	11.386	11.385	4.987	5.700	5.421	5.301
7	4 SS	21.866	21.908	21.858	21.854	11.314	12.552	11.903	11.649
8	4 FA	21.866	21.908	21.858	21.854	11.459	12.700	12.042	11.783
9	5 SS	35.827	35.929	35.819	35.808	21.705	24.078	22.615	22.129
10	5 FA	35.827	35.929	35.819	35.808	21.763	24.191	22.718	22.225
Error Relativo %									
1	1 SS		0.03 %	0.03 %	0.04 %		2.25 %	2.28 %	2.27 %
2	1 FA		0.03 %	0.03 %	0.04 %		0.75 %	0.75 %	0.76 %
3	2 SS		0.03 %	0.05 %	0.05 %		21.69 %	19.94 %	19.10 %
4	2 FA		0.03 %	0.05 %	0.05 %		2.38 %	1.08 %	0.46 %
5	3 SS		0.01 %	0.05 %	0.05 %		18.90 %	12.76 %	10.15 %
6	3 FA		0.01 %	0.05 %	0.05 %		14.31 %	8.72 %	6.32 %
7	4 SS		0.20 %	0.04 %	0.05 %		10.94 %	5.20 %	2.96 %
8	4 FA		0.20 %	0.04 %	0.05 %		10.83 %	5.09 %	2.82 %
9	5 SS		0.28 %	0.02 %	0.05 %		10.93 %	4.19 %	1.95 %
10	5 FA		0.28 %	0.02 %	0.05 %		11.16 %	4.39 %	2.12 %

Tabla 1: Comparación de resultados: *BModes* vs. *Modos Asumidos*

En todos los casos se observa convergencia de las frecuencias a medida que aumentan la cantidad de funciones de aproximación y una disminución del error relativo respecto de la frecuencia de comparación. El mismo se detalla en la parte inferior de la Tabla 1.

El método propuesto reproduce con un alto grado de exactitud los valores de frecuencia natural sin considerar el conjunto góndola-nariz-palas. Entre las características que reviste la torre se destaca la variación lineal de diámetro y espesor con la altura y, debido a su axisimetría, los modos SS y FA coinciden en sus magnitudes. Al añadir el conjunto góndola-nariz-palas, la estimación con pocas funciones de forma no resulta tan precisa. En este punto hay dos aspectos fundamentales a observar: *i*) hay convergencia al valor estimado por *BModes* para mayor número de modos asumidos y, *ii*) es clara la asimetría producida por el cuerpo en el extremo entre los modos SS y los FA.

Tal como se describió en la Sección 2.3 aparecen dos matrices de inercia máscas asociadas a la posición del punto de vinculación. Tales matrices acaban por producir acoplamiento dinámico entre los diferentes campos de desplazamiento de la torre por lo que al tener rigidez infinita a la

torsión, los modos SS muestran un valor mayor que el estimado.

#### 4. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS DE DESARROLLO

La mejora en las técnicas constructivas y el avance de la tecnología han permitido sistemáticamente incrementar las capacidades operativas de las turbinas eólicas. La disponibilidad de vientos adecuados, junto con políticas de estímulo al sector, han puesto a la Argentina en el plano internacional de la industria eólica.

Resulta de interés analizar la LHAWT como parte de un modelo de granja eólica que tome en consideración la interacción aerodinámica entre turbinas, la capa límite terrestre y la dinámica propia del aerogenerador. Frente a este panorama, se requieren nuevas herramientas computacionales que permitan avanzar en la investigación y el desarrollo de estas máquinas minimizando el costo computacional que implica el proceso de interacción multifísica.

Se ha desarrollado un modelo matemático de aerogenerador mediante la formulación Lagrangiana en conjunto con la técnica de modos asumidos. Este trabajo aporta una herramienta versátil que permite minimizar los recursos informáticos necesarios para el cálculo características dinámicas de la estructura y la posterior integración de las ecuaciones de movimiento.

La magnitud del error en el cálculo de frecuencias naturales en que se incurre es del orden 0.05 % cuando no se considera el conjunto góndola-nariz-palas y un error promedio de un 2 % cuando el mismo es tenido en cuenta. En ambos casos, el error relativo está asociado a los modos FA, ya que los modos SS sobrestiman el valor de frecuencia dada la rigidez infinita de la torre a torsión.

Se observa además, que la presencia de la masa en el extremo de la torre produce en promedio una disminución del 40 % aproximadamente sobre las primeras cuatro frecuencias naturales de la torre. Por lo tanto, para el cálculo preliminar de diseño de una turbina eólica de importantes características como la que está en estudio, muestra un buen nivel de aproximación sobre las frecuencias naturales.

Finalmente, se plantean propuestas de desarrollo tales como: *i)* considerar la rigidez finita a la torsión, *ii)* considerar la rigidez finita axial con efectos de segundo orden, y *iii)* considerar la velocidad angular del rotor y sus correspondientes efectos giroscópicos.

#### REFERENCIAS

- Beltamo E., Stuardi J., y Preidikman S. Análisis paramétrico de un cosechador aeroelástico de energía: Aspectos generales. *Congreso Argentino de Mecánica Computacional*, XXXVI:1879–1888, 2018.
- Bir G. y Jonkman J. Modal dynamics of large wind turbines with different support structures. *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2008.
- Hodges D. y Pierce A. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity Second Edition*. Cambridge University Press, 2011.
- Rao S. *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- Ribero S., Brewer A., y Preidikman S. Preprocesamiento de la matriz de cambio de base de velocidades angulares para sistemas de cuerpos rígidos utilizando ángulos de euler. *Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 7:445–448, 2019.