

TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJO MULTIFÁSICO MEDIANTE EL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN

HEAT TRANSFER IN MULTIPHASE FLOW WITH LATTICE BOLTZMANN METHOD

Ezequiel O. Fogliatto^{a,c}, Federico E. Teruel^{a,b,c} y Alejandro Clausse^{a,b,d}

^a*Comisión Nacional de Energía Atómica, CNEA, Argentina. fogliatto@cab.cnea.gov.ar*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina.*

^c*Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 8400 San Carlos de Bariloche, Argentina.*

^d*Universidad Nacional del Centro, 7000 Tandil, Argentina.*

Palabras clave: lattice Boltzmann, flujo multifásico, transferencia de calor, cambio de fase.

Resumen. El método de lattice Boltzmann (LB) ha evolucionado desde sus orígenes hasta convertirse en una técnica numérica robusta y eficiente para la resolución de flujos complejos, como aquellos que requieren la representación de ebullición y condensación. A pesar de los recientes avances en el desarrollo de modelos multifásicos isotérmicos dentro de la familia pseudopotential que permiten simular casos con número Reynolds y relación de densidades elevadas, la construcción de modelos para el transporte de energía continúa presentando dificultades. En particular, las propuestas existentes sólo recuperan parcialmente la ecuación de energía de interés, o bien con términos adicionales no deseados. En el presente trabajo se introduce un modelo LB de dos ecuaciones, adecuado para la simulación de flujos multifásicos con transferencia de calor. La precisión y aplicabilidad del mencionado modelo son verificadas a través de la resolución de problemas que involucran cambio de fase en una y dos dimensiones, y que presentan soluciones analíticas conocidas.

Keywords: lattice Boltzmann, multiphase flow, heat transfer, phase change.

Abstract. The lattice Boltzmann method has turned into a robust and efficient numerical technique, capable of dealing with complex flow involving phenomena like boiling and condensation. Recent development in the pseudopotential family of multiphase LB models allow the simulation of flows with high Reynolds and high density ratio. However, construction of LB models for energy transport is still an open issue, due to error terms that are still observed in the recovered macroscopic equations. In this work, a two equation - LB model is presented and validated against problems with analytical solutions.

1. INTRODUCCIÓN

Las principales características del método de lattice Boltzmann (LB) lo convierten en un candidato ideal para la resolución de flujos multifásicos con transferencia de calor y cambio de fase, como aquellos presentes en los procesos de ebullición y condensación. Sin embargo, a pesar de los significativos avances logrados en la resolución precisa y eficiente de flujos multifásicos isotérmicos, la simulación de una ecuación de energía con esquemas LB aún continúa en desarrollo. Los principales inconvenientes asociados a la búsqueda de un esquema LB han sido documentados detalladamente en trabajos como los de [Li y Luo \(2014\)](#); [Huang y Wu \(2014\)](#), y están vinculados a la recuperación de una ecuación macroscópica para la temperatura con términos adicionales no deseados en las escalas de expansión relevantes. En particular, el uso de un modelo pseudopotencial para flujo multifásico introduce, por ejemplo, errores proporcionales a $\nabla \cdot (TF)$ ([Li y Luo, 2014](#)), donde F es la fuerza total, y a $\partial_t(Tu) + \nabla \cdot (Tuu)$ ([Huang y Wu, 2014](#)).

Este tipo de discrepancias motivó el desarrollo de esquemas LB que compensan explícitamente las fuentes de error en la ecuación de energía ([Márkus y HÁzi, 2011](#)), o bien que hacen uso de una metodología híbrida, que combina LB para las ecuaciones hidrodinámicas y diferencias finitas para la de energía ([Li et al., 2015](#)). A diferencia de las propuestas anteriores, en el presente trabajo se introduce un modelo que acopla dos ecuaciones con operador de colisión MRT, y que permite recuperar la ecuación de conservación de energía deseada sin términos de error adicionales. Por otro lado, se evalúa la precisión del modelo mediante la resolución de dos problemas adecuados para un modelo LB pseudopotencial: la estratificación de un fluido con ecuación de estado (EOS) de Van der Waals (VdW) con fuerza de gravedad y temperatura no uniforme, y la generación de burbujas sobre una placa horizontal calefaccionada. Finalmente, se evalúa la factibilidad de reproducir adecuadamente ebullición entre placas planas paralelas.

2. MODELO PSEUDOPOTENCIAL DE DOS ECUACIONES CON OPERADOR MRT

La resolución de las ecuaciones hidrodinámicas puede analizarse mediante la evolución de una función de distribución dada por ([Li et al., 2013](#)):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + e\delta_t, t + \delta_t) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{m} - \Lambda(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{eq}) + \delta_t(\mathbf{I} - 0,5\Lambda)\bar{\mathbf{S}}]_{(\mathbf{x},t)} \quad (1)$$

donde f_α es la distribución de densidad en el espacio de poblaciones, t el tiempo, \mathbf{x} la posición espacial, e las velocidades discretas a lo largo de las direcciones α y δ_t el paso de tiempo. En este caso, la notación usada en la Ec. (1) implica que la componente α -ésima del miembro izquierdo está dada por $f_\alpha(\mathbf{x} + e_\alpha\delta_t, t + \delta_t)$. El miembro derecho de la Ec. (1) corresponde a la etapa de post-colisión definida en el espacio de momentos, donde \mathbf{M} es una matriz de transformación ortogonal, $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f}$, $\mathbf{m}^{eq} = \mathbf{M}\mathbf{f}^{eq}$, \mathbf{I} el tensor identidad y $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{M}\mathbf{S}$ el término de fuente. Para una grilla D2Q9, Λ es una matriz diagonal:

$$\Lambda = \text{diag}(\tau_\rho^{-1}, \tau_e^{-1}, \tau_\zeta^{-1}, \tau_j^{-1}, \tau_q^{-1}, \tau_j^{-1}, \tau_q^{-1}, \tau_\nu^{-1}, \tau_\nu^{-1}) \quad (2)$$

mientras que la distribución de equilibrio está dada por:

$$\mathbf{m}^{eq} = \rho(1, -2 + 3|\mathbf{u}|^2, 1 - 3|\mathbf{u}|^2, u_x, -u_x, u_y, -u_y, u_x^2 - u_y^2, u_x u_y) \quad (3)$$

donde la densidad y velocidad macroscópica se obtienen mediante:

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \quad (4)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} + 0,5 \delta_t \mathbf{F} \quad (5)$$

En este caso, $\mathbf{F} = (F_x, F_y) = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{int}$ es la fuerza total, \mathbf{F}_b la fuerza volumétrica y \mathbf{F}_{int} representa la fuerza de interacción que actúa sobre el sistema a través de un potencial $\psi(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}_{int} = -G\psi(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^N w(|\mathbf{e}_{\alpha}|^2) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \delta_t) \mathbf{e}_{\alpha} \quad (6)$$

En la Ec. (6), G corresponde a la intensidad de interacción, $w(|\mathbf{e}_{\alpha}|^2)$ son los pesos correspondientes a una grilla D2Q9 y ψ está dado por:

$$\psi(\rho) = \sqrt{\frac{2(p_{EOS} - \rho c_s^2)}{G c^2}} \quad (7)$$

En el presente trabajo se adopta una EOS de VdW:

$$p_{EOS} = \frac{\rho R T}{1 - \rho b} - a \rho^2 \quad (8)$$

donde a y b son parámetros que determinan los valores críticos de temperatura, presión y densidad, y fueron fijados en $a = 1$ y $b = 4$. Finalmente, la fuerza de interacción se incorpora en la etapa de colisión mediante un término de fuente apropiado:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + \frac{12\sigma |\mathbf{F}_{int}|^2}{\psi^2 \delta_t (\tau_c - 0,5)} \\ -6\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - \frac{12\sigma |\mathbf{F}_{int}|^2}{\psi^2 \delta_t (\tau_c - 0,5)} \\ F_x \\ -F_x \\ F_y \\ -F_y \\ 2(u_x F_x - u_y F_y) \\ (u_x F_y + u_y F_x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde σ es un parámetro libre que es utilizado para ajustar el problema de inconsistencia termodinámica, es decir, la diferencia entre las densidades de cada fase obtenidas en la simulación y aquellas determinadas por la EOS correspondiente.

El modelo de Li et al. (2013) debe acoplarse con una segunda ecuación LB para poder incorporar transferencia de calor. En particular, puede adoptarse una segunda distribución de poblaciones \mathbf{g} bajo un operador de colisión MRT:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{e} \delta_t, t + \delta_t) = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{n} - \mathbf{Q}(\mathbf{n} - \mathbf{n}^{eq}) + \delta_t (\mathbf{I} - 0,5 \mathbf{Q}) \hat{\Gamma} \right]_{(\mathbf{x}, t)} \quad (10)$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{M} \mathbf{g}$ y $\hat{\Gamma}$ es una fuente en el espacio de momentos. La temperatura macroscópica T puede recuperarse mediante:

$$T = \sum_{\alpha} g_{\alpha} + \frac{1}{2} \delta_t \hat{\Gamma}_0 \quad (11)$$

La matriz de coeficientes de relajación \mathbf{Q} está compuesta por una parte diagonal

$$\text{diag}(\mathbf{Q}) = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8)^T \quad (12)$$

pero, a diferencia de $\mathbf{\Lambda}$, presenta elementos extra diagonales no nulos dados por:

$$Q_{3,4} = q_4 \left(\frac{q_3}{2} - 1 \right) \quad (13)$$

$$Q_{5,6} = q_6 \left(\frac{q_5}{2} - 1 \right) \quad (14)$$

Si se define una distribución de equilibrio \mathbf{n}^{eq} como:

$$\mathbf{n}^{eq} = T(1, \alpha_1, \alpha_2, u_x, -u_x, u_y, -u_y, 0, 0)^T \quad (15)$$

y el término fuente mediante:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = (s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (16)$$

con

$$s = \frac{\chi}{\rho} \nabla T \cdot \nabla \rho + T \left[1 - \frac{1}{\rho c_v} \left(\frac{\partial p_{EOS}}{\partial T} \right)_\rho \right] \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (17)$$

entonces la Ec. (10) puede recuperar adecuadamente la ecuación macroscópica derivada por Márkus y Házi (2011):

$$\partial_t T + \nabla \cdot (\mathbf{u}T) = \chi \nabla^2 T + s \quad (18)$$

Por simplicidad, en este trabajo se considera una difusividad térmica χ constante, la cual queda determinada mediante los factores de relajación de \mathbf{Q} y los parámetros libres de \mathbf{n}^{eq} :

$$\chi = \delta_t \left(\frac{1}{q_3} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{4 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2}{6} \right) \quad (19)$$

3. RESULTADOS

3.1. Estratificación de un fluido VdW con temperatura no uniforme

Como se muestra en el trabajo de Fogliatto et al. (2019), es posible extender la solución de Berberan-Santos et al. (2002) para obtener una ecuación diferencial ordinaria que permite determinar el perfil de densidad en una cavidad unidimensional ocupada por un fluido VdW, con fuerza de gravedad no nula y temperatura no uniforme. En particular, el gradiente de presión en la coordenada y está determinado por el balance hidrostático mediante

$$\frac{dP}{dy} = -gMC(y) \quad (20)$$

donde P es la presión, g la gravedad, M el peso molecular, $C = 1/v$ la concentración molar y v el volumen molar. La presión se encuentra relacionada con la densidad y temperatura mediante la Ec. (8). Si se introducen los parámetros adimensionales $E_r = Mgy/RT_c$, $c = Cv_c$, $P_r = P/P_c$ y $T_r = T/T_c$, donde el subíndice c denota el estado crítico, y se combinan las

Ecs. (8) y (20) considerando además la posibilidad de un perfil de temperatura arbitrario, puede obtenerse una ecuación adimensional para la distribución de concentración molar reducida (Fogliatto et al., 2019):

$$\frac{dc}{dE_r} = - \left[c + \frac{dT_r}{dE_r} \left(\frac{c}{1 - c/3} \right) \right] \left[\frac{1}{\frac{T_r}{(1 - c/3)^2} - \frac{9}{4}c} \right] \quad (21)$$

donde la posición de la interface dentro de la cavidad puede determinarse utilizando la masa inicial del sistema y se utiliza como condición inicial para la integración de la Ec. (21). La Ec. (21) puede resolverse iterativamente junto con la Ec. (18) para obtener distribuciones de densidad y temperatura en una cavidad, y de esta forma constituir un excelente caso de prueba para verificar la correcta separación de fases dada por un modelo LB pseudopotencial.

El problema de estratificación de un fluido VdW fue resuelto mediante el modelo LB en una cavidad de $L = 3$ unidades de grilla en la dirección horizontal (x) y $H = 300$ unidades en dirección vertical (y), con condiciones de contorno periódicas y de extrapolación de no equilibrio (Guo et al., 2002) respectivamente. En todos los casos se consideró $G = -1$, $E_{r_{max}} = 10^{-3}$, $\sigma = 1/8$, $R = M_m = 1$, $\tau_\rho = \tau_j = 1,0$ y $\tau_e^{-1} = \tau_\zeta^{-1} = \tau_\nu^{-1} = \tau_q^{-1} = 1,1$. Para la ecuación de energía se empleó $q_0 = q_1 = q_2 = q_4 = q_6 = q_7 = q_8 = 1$, $q_3 = q_5 = 1,5$, $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = 2$. Inicialmente la cavidad se encuentra llena con un fluido de densidad igual al valor crítico (ρ_c) con una perturbación aleatoria de $\pm 1\%$, y se deja evolucionar el sistema hasta alcanzar un estado estacionario. En las Figs. 1a y 1b se muestran los perfiles de concentración y temperatura lo largo de la coordenada vertical para cavidades con diferente temperatura en $E_r = 0$, y con $T_r(E_{r_{max}}) = 0,99$. Como puede observarse, el modelo LB produce perfiles de densidad continuos en la interface, mientras que el uso de $\sigma = 1/8$ permite representar adecuadamente la distribución de concentración y temperatura reducida en el interior de cada fase.

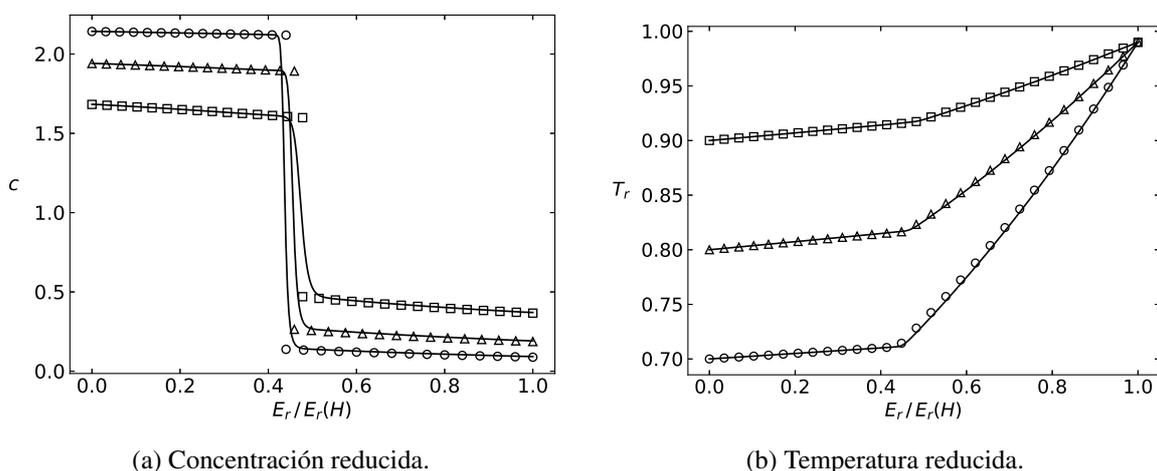


Figura 1: Distribución espacial de concentración y temperatura reducidas con gravedad uniforme ($E_r = 0,001$). La temperatura reducida en $y = H$ se encuentra fija en 0,99. Los símbolos corresponden a la solución de las Ecs. (18) y (21) con $T_r(0) = 0,9$ (\square), $0,8$ (\triangle), $0,7$ (\circ). Las curvas corresponden a la solución numérica con $\sigma = 1/8$.

3.2. Generación de burbujas sobre una superficie horizontal calefaccionada

En forma similar al problema de estratificación de un fluido VdW, la creación, crecimiento y partida de una única burbuja sobre una superficie horizontal calefaccionada, constituye un caso

de prueba para completar la evaluación de modelos LB multifásicos con transferencia de calor. De esta forma, y con el objetivo de reproducir efectos de ebullición nucleada, se realizaron simulaciones LB en una grilla bidimensional de $L = 300$ y $H = 500$, periódica en la dirección horizontal, con temperatura fija $T_s = 0,8T_c$ sobre las paredes. Una zona calefaccionada de longitud $L_h = 12$ y temperatura $T_w = 0,94T_c$ se sitúa en el centro de la pared inferior. Las simulaciones se iniciaron con temperatura uniforme T_s , $\rho = \rho_l$ para $y \leq 0,7H$ y ρ_g para $y > 0,7H$, donde ρ_l y ρ_g son las densidades de líquido y vapor en equilibrio a T_s . Los factores de relajación y parámetros libres son los utilizados en la simulación de la columna de fluido VdW. A modo de ejemplo, en la Fig. 2 se muestra la región de fluido de menor densidad producto de la simulación con $g = 2 \cdot 10^{-6}$ (en unidades de grilla), de modo que pueden apreciarse diferentes etapas del proceso de crecimiento y desprendimiento de una única burbuja.

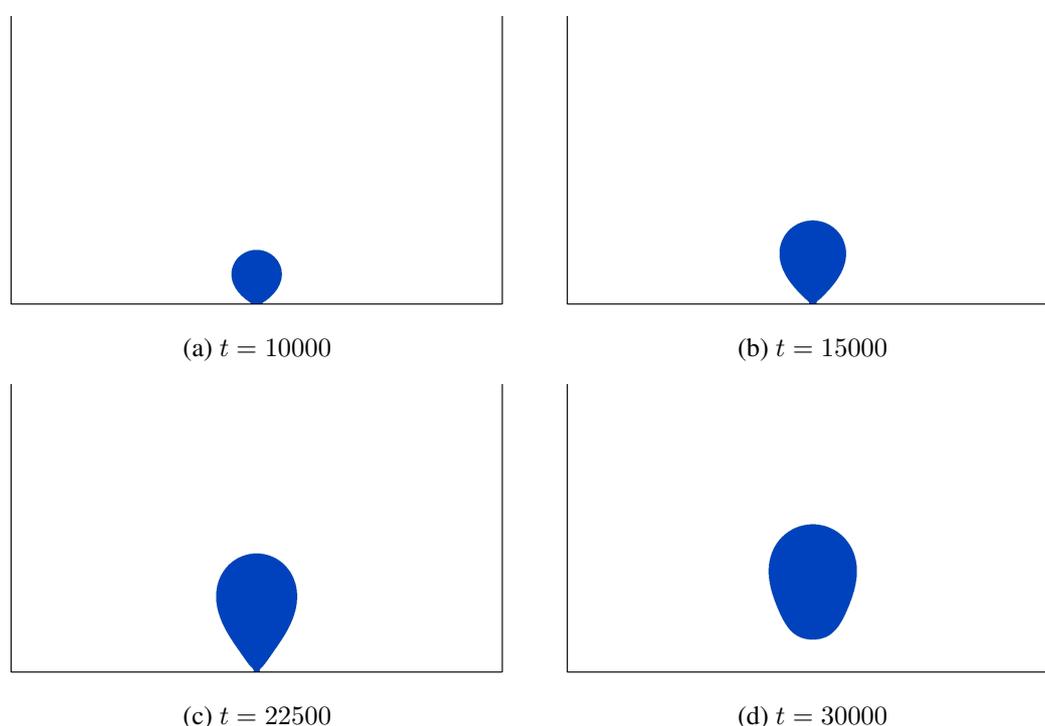


Figura 2: Formación, crecimiento y desprendimiento de una burbuja sobre una superficie horizontal calefaccionada.

A diferencia de las técnicas numéricas tradicionales, el método LB captura la solución de una ecuación de transporte de forma indirecta, dado que ésta se determina a partir de la solución de otra ecuación cuya resolución computacional es más sencilla. Esta limitación intrínseca implica que es necesario considerar procedimientos adicionales para analizar la convergencia en malla y consistencia de los resultados obtenidos. Una de las metodologías habituales consiste en evaluar la solución mediante los números adimensionales característicos de las ecuaciones macroscópicas, que en este caso resultan (Ajaev y Homsy, 2006):

$$Re = \frac{\rho_l g^{1/2} D^{3/2}}{\mu_l}, \quad Bo = \frac{\rho_l g D^2}{\kappa}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ja = \frac{c_v}{h_{fg}} (T_w - T_s) \quad (22)$$

donde D es una dimensión característica, κ la tensión superficial y h_{fg} el calor latente de vaporización. Si se fijan las constantes de la EOS entonces quedan determinados, entre otros parámetros, ρ_l , κ , h_{fg} y el espesor de la interfase en unidades de grilla. De esta forma, pueden simularse

problemas en diferentes grillas pero que preserven los números adimensionales de la Ec. (22), y de este modo evaluar la convergencia de parámetros de interés. En la Tabla 1 se muestran los valores de diámetro equivalente normalizado para diferentes grillas, obtenidos siguiendo el criterio descrito anteriormente y a partir de un caso de referencia (A) con $g = 2 \cdot 10^{-6}$. Puede observarse que la resolución del caso B es suficiente para reproducir satisfactoriamente el valor extrapolado siguiendo el criterio de ASME (Freitas et al., 2003).

Caso	Grilla ($L \times H$)	D_{eq}/L
A	300x500	0.2276
B	600x1000	0.2105
C	1200x2000	0.2087
Extrapolado		0.2069

Tabla 1: Evaluación de independencia de malla para el cálculo de diámetro de partida.

Existen numerosos intentos por construir correlaciones capaces de precedir correctamente características macroscópicas del fenómeno de ebullición nucleada, como diámetro o frecuencia de partida de las burbujas. En particular, Phan et al. (2010) derivaron una expresión donde el diámetro de partida está dado por:

$$D = 1,94 \left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_g)} \right]^{0,5} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{-0,5} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right)^{1/3} \tan^{1/6} \theta_c \quad (23)$$

donde θ_c es el ángulo de contacto sobre la superficie calefaccionada. Es necesario destacar que para un mismo valor de temperatura T_s , un modelo LB pseudopotencial reproduce las mismas densidades de coexistencia y tensión superficial, de modo que debería obtenerse un diámetro de partida proporcional a $g^{-0,5}$. Como puede observarse en la Fig. 3, efectivamente existe un buen acuerdo en la dependencia funcional del diámetro equivalente obtenido a partir de las simulaciones LB en dos dimensiones, con aquel predicho por la Ec. (23).

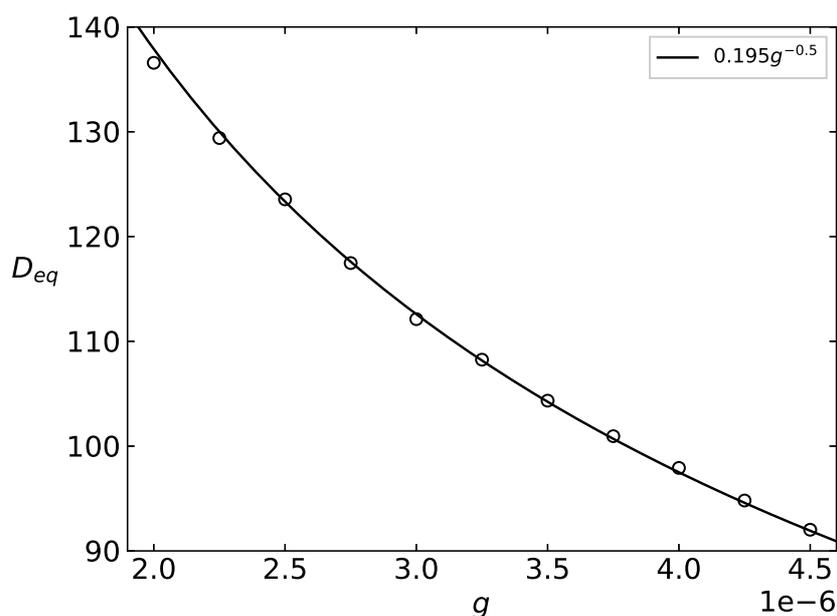


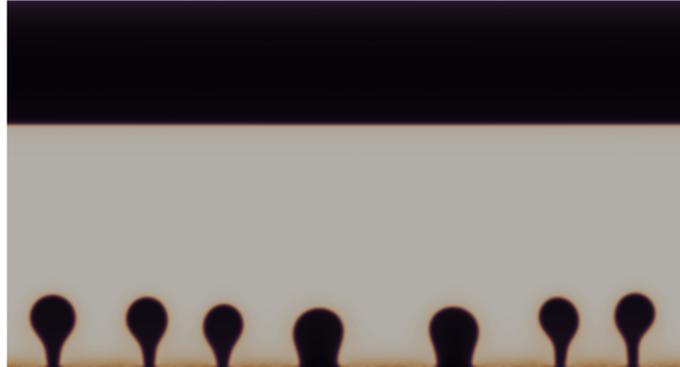
Figura 3: Diámetro de partida en función de g , en unidades de grilla. Las burbujas se producen sobre una zona calefactora con $L_h = 12$ y $T_w = 0,94T_c$.

3.3. Ebullición entre placas planas paralelas

El modelo LB de dos ecuaciones con operador MRT permite reproducir perfiles de densidad y temperatura de un fluido VdW en una cavidad, así como comportamientos macroscópicos específicos del proceso de generación de burbujas sobre placas calefaccionadas. Por lo tanto, resulta de interés evaluar la factibilidad del modelo para representar un fenómeno más complejo como la ebullición entre placas paralelas. De esta manera, se simularon cavidades de $L = 1200$, $H = 600$, con iguales condiciones iniciales al problema de una única burbuja, pero donde la temperatura de toda la pared inferior es igual a T_w con una perturbación aleatoria de $\pm 5\%$. En las Figs. 4 y 5 se muestran distribuciones de densidad a distintos instantes de tiempo, para regiones con diferente T_w respectivamente. Puede observarse que el cambio de temperatura en la placa inferior conduce a regímenes de generación de burbujas que, al menos cualitativamente, pueden asociarse a los modos de ebullición nucleada y de película. Estos resultados preliminares inducen a considerar que, después de una validación rigurosa, el modelo LB pueda ser utilizado para simular diferentes regímenes de ebullición.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se introdujo un modelo LB de dos ecuaciones con operador de colisión MRT, adecuado para la resolución de flujos multifásicos con transferencia de calor y cambio de fase. Adicionalmente, se incorporaron problemas de cambio de fase en una y dos dimensiones, con solución analítica o bien asociados a aproximaciones que describen características específicas. Los resultados obtenidos con el modelo LB muestran que es posible reproducir de manera precisa los perfiles de densidad y temperatura de un fluido Van der Waals en una cavidad bajo la acción de la gravedad y con temperatura no uniforme, así como el diámetro de partida de una burbuja sobre una superficie calefaccionada. Por otro lado, en un estudio cualitativo se observó que el mencionado modelo es potencialmente capaz de reproducir diferentes regímenes de ebullición sobre placas planas.



(a) $t = 34000$

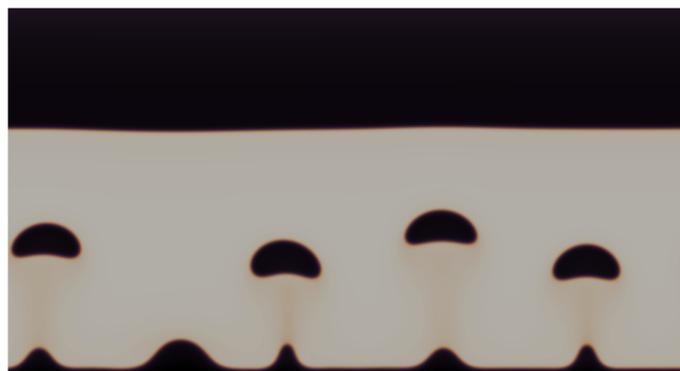


(b) $t = 80000$



(c) $t = 120000$

Figura 4: Ebullición sobre placas paralelas. $T_w = 1,2T_C$.

(a) $t = 34000$ (b) $t = 80000$ (c) $t = 120000$ Figura 5: Ebullición sobre placas paralelas. $T_w = 1,3T_C$.

REFERENCIAS

- Ajaev V.S. y Homsy G.M. Modeling shapes and dynamics of confined bubbles. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 38:277–307, 2006.
- Berberan-Santos M.N., Bodunov E.N., y Pogliani L. Liquid–vapor equilibrium in a gravitational field. *American Journal of Physics*, 70(4):438, 2002.
- Fogliatto E.O., Clause A., y Teruel F.E. Simulation of phase separation in a Van der Waals fluid under gravitational force with Lattice Boltzmann method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2019.
- Freitas C.J., Ghia U., Celik I., Roache P., y Raad P. ASME’s quest to quantify numerical uncertainty. *AIAA Paper*, 627, 2003.
- Guo Z., Zheng C., y Shi B. An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids*, 14(6), 2002.
- Huang R. y Wu H. A modified multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for convection–diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, 274, 2014.
- Li Q., Kang Q., Francois M., He Y., y Luo K. Lattice Boltzmann modeling of boiling heat transfer: The boiling curve and the effects of wettability. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 85:787–796, 2015.
- Li Q. y Luo K.H. Effect of the forcing term in the pseudopotential lattice Boltzmann modeling of thermal flows. *Physical Review E*, 89(5), 2014.
- Li Q., Luo K.H., y Li X.J. Lattice Boltzmann modeling of multiphase flows at large density ratio with an improved pseudopotential model. *Physical Review E*, 87(5), 2013.
- Márkus A. y Házi G. Simulation of evaporation by an extension of the pseudopotential lattice Boltzmann method: A quantitative analysis. *Physical Review E*, 83(4), 2011.
- Phan H.T., Caney N., Marty P., Colasson S., y Gavillet J. A model to predict the effect of contact angle on the bubble departure diameter during heterogeneous boiling. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37(8):964–969, 2010.