

## MÉTODO DE GALERKIN LIBRE DE ELEMENTOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE FLUJO EN MEDIOS POROSOS BAJO LA LEY DE DARCY

### ELEMENT-FREE GALERKIN METHOD FOR SOLVING POROUS MEDIA FLOW PROBLEMS UNDER DARCY'S LAW

Juan C. Álvarez Hostos<sup>a,b</sup>, Joselyne C. Salazar Bove<sup>a,b</sup>, Gabriel S. Gerlero<sup>a</sup> y Fernando  
F. Benitez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral  
(UNL)/Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio  
CCT-CONICET Santa Fe, Argentina*

<sup>b</sup>*Departamento de Metalurgia Química, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela*

**Palabras clave:** Método de Galerkin libre de elementos, Medios Porosos, Fluido-Dinámica, Ley de Darcy.

**Resumen.** En este trabajo se presenta una implementación simple y directa del Método de Galerkin libre de elementos (MGLE) en la solución numérica de problemas de flujo en medios porosos bajo la ley de Darcy. Tal problema ha sido abordado como una ecuación de Poisson en términos de presión, la cual ha sido apropiadamente adaptada a la formulación débil global del MGLE. El método convencional de mínimos cuadrados móviles (MCM) ha sido utilizado en la construcción de las funciones de forma para la aproximación de la presión, lo cual ha permitido el cálculo continuo de velocidad y presión en todo el dominio del problema. El sistema de ecuaciones resultante ha sido adaptado a la solución de distintos problemas de prueba para flujo en medios porosos, y la precisión de este enfoque basado en el MGLE ha sido demostrada por comparación con soluciones analíticas.

**Keywords:** Element-free Galerkin Method, Porous Media, Fluid-Dynamics, Darcy's Law.

**Abstract.** The present work introduces a straightforward implementation of the element-free Galerkin method (EFGM) in the numerical solution of porous media flow problems under Darcy's law. Such a problem has been addressed in terms of a pressure-based Poisson's equation, which is properly adapted to the global weak-form of the EFGM. The standard moving least square method has been used in the construction of the shape functions for pressure field approximation, which has allowed the continuous computation of both pressure and velocity throughout the entire problem domain. The resulting system of equations has been adapted to the solution of several porous flow benchmark problems, and the accuracy of this EFG based approach has been proven by comparison with the analytical solutions.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las condiciones de flujo de Darcy toman parte en diversos fenómenos y casos aplicados en ciencias de la ingeniería, los cuales involucran el movimiento a bajas velocidades de fluidos viscosos en medios porosos. Tales condiciones se pueden encontrar en procesos de extracción de petróleo, flujo de resinas en la fabricación de materiales compuestos fibro-reforzados, filtración de fluidos en suelos porosos, flujo de gases en reactores de lecho fijo, entre otros [Nakshatrala et al. (2006); Bochev y Dohrmann (2006); Zhang y Li (2017)]. Las ecuaciones que rigen tales condiciones de flujo son la Ley de Darcy, la ecuación de continuidad y las condiciones de penetración en las fronteras [Zhang y Li (2017)]. Este grupo de ecuaciones se interpretan además como una simplificación de la formulación general de *Darcy-Forchheimer-Brinkman* (DFB) para flujo en medios porosos [Reddy y Gartling (2010)]. Los problemas de flujo en medios porosos bajo el régimen de Darcy pueden ser resueltos con el empleo de métodos numéricos basados en malla, tal como el método de elementos finitos (MEF) [Nakshatrala et al. (2006); Bochev y Dohrmann (2006); Reddy y Gartling (2010)]. La factibilidad de una solución basada en el MEF para problemas de fluido-dinámica, incluyendo también aquellos que involucren medios porosos, requiere de una selección adecuada de las funciones de forma para la aproximación elemental de la velocidad y la presión en modo de satisfacer la condición de estabilidad de Ladyzhenskaya-Babuzka-Brezzi (LBB) [Nakshatrala et al. (2006); Bochev y Dohrmann (2006)]. En el caso de modelos completos DFB para flujo en medios porosos, se pueden obtener resultados estables y convergentes bajo formulaciones clásicas mixtas o penalizadas con una selección apropiada de las funciones de forma [Reddy y Gartling (2010)]. Sin embargo, en la forma reducida para el régimen de Darcy, las formulaciones clásicas mixtas o penalizadas donde la función de forma para la aproximación de la presión es de orden menor respecto a aquella implementada para la interpolación de la velocidad, conllevan a una inconsistencia debido a que el enfoque directo bajo condiciones de flujo de Darcy da lugar a una ecuación de Poisson donde la presión es la variable a interpolar. Posteriormente, el perfil de velocidades calculado a partir del gradiente de presiones será consistente y de un orden menor [Reddy y Gartling (2010)]. En resumen, la implementación de formulaciones mixtas o penalizadas comunes, implican notables dificultades a menos que se introduzcan métodos de regularización que permitan la obtención de resultados estables y convergentes, independientemente del tipo de funciones de forma utilizadas para la aproximación de las variables [Nakshatrala et al. (2006); Bochev y Dohrmann (2006)]. Por otra parte, el enfoque directo de la ecuación de Poisson para la presión no está exento de dificultades cuando se resuelve por medio de esquemas convencionales bajo el MEF [Reddy y Gartling (2010)]. Tal enfoque proporciona una aproximación continua de la presión en todo el dominio, mientras que la velocidad es discontinua a trozos entre elementos debido a que se calcula a partir del gradiente de presiones por medio de la Ley de Darcy. Esta condición implica una notable pérdida de precisión en el cálculo de la velocidad, la cual requiere de técnicas de post-procesamiento para obtener una distribución continua en esta variable, sin garantizar en muchos casos la conservación de masa [Reddy y Gartling (2010); Nakshatrala et al. (2006); Bochev y Dohrmann (2006)].

El MEF ha sido exitosamente utilizado en la solución de diversos problemas de mecánica de sólidos y fenómenos de transporte, y su grado de desarrollo ha permitido su implementación en simulaciones cada vez más complejas. En este sentido, varias modificaciones han sido introducidas para poder abordar problemas relacionados con la distorsión de la malla en problemas de grandes deformaciones, discontinuidades durante transformaciones de fase, fronteras móviles, problemas de flujo con superficie libre, entre otros. Tales dificultades están principalmente relacionadas al proceso de mallado, que constituye la etapa donde se consume mayor tiempo en

problemas tridimensionales y geometrías complejas [Liu (2009); Álvarez-Hostos et al. (2018b, 2019)]. Por otra parte, varios autores han logrado superar tales dificultades de manera más directa y simple con el empleo de técnicas alternativas basadas en un conjunto de partículas o nodos para representar el dominio del problema, conocidas como métodos sin malla. Entre los problemas complejos abordados con éstas técnicas se pueden mencionar dinámica de fluidos no newtonianos [Li y Dong (2018)], problemas acoplados de fluido-dinámica y transferencia de calor [Hon et al. (2015)], elasticidad no lineal [Li y Tian (2018)], elastoplasticidad [Cheng et al. (2014)], problemas de transporte con coeficientes variables [Gharib et al. (2017); Dehghan y Narimani (2018)] y advección-difusión-reacción [Cheng et al. (2018)], mecánica de fractura [Pathak et al. (2014)], termo-mecánica no lineal [Álvarez-Hostos et al. (2018); Álvarez-Hostos et al. (2018a, 2016)], entre otros. En el caso particular del método de Galerkin libre de elementos (MGLE), su formulación débil global hace que tal técnica no esté exenta de ciertas dificultades comunes al MEF. Particularmente en la solución de problemas de transporte y fluido-dinámica se pueden mencionar las dificultades inherentes al bloqueo volumétrico [Álvarez-Hostos et al. (2018b)] y las condiciones de flujo predominantemente advectivas [Álvarez-Hostos et al. (2019)]. Afortunadamente varios autores han demostrado la posibilidad de superar tales dificultades a través de la extensión plausible de varias técnicas originalmente formuladas para el MEF, al MGLE. En principio, Wang et al. (2012) presentaron una interesante discusión basada en la idoneidad del MGLE para resolver problemas de fluido-dinámica incompresible en condiciones estacionarias bajo una formulación mixta velocidad-presión convencional con el objeto de evitar el problema puesto por la condición LBB, en comparación con métodos de pasos de tiempo fraccionados tales como la técnica de las características, o el método semi-implícito de ecuaciones vinculadas por la presión. Posteriormente, el método variacional multiescala de Hughes (1995) fue extendido al MGLE para resolver problemas de convección-difusión-reacción [Zhang y Xiang (2014)], convección natural [Zhang y Zhang (2015)] y finalmente flujo en medios porosos [Zhang y Li (2017)], dando lugar al MGLE variacional multiescala (MGLEVM). Un avance ulterior en este ámbito fue alcanzado por Zhang y Li (2018), al seguir las ideas del MEF Generalizado (MEFG) para formular el MGLE Generalizado (MGLEG), basándose en la propiedad de partición de la unidad que poseen las funciones de forma creadas por mínimos cuadrados móviles (MCM). Tal técnica, fue empleada adecuadamente en la solución de problemas de fluido-dinámica bajo condiciones de flujo reptante satisfaciendo simultáneamente las condiciones de LBB. Por otra parte, Álvarez-Hostos et al. (2018b) implementaron exitosamente los métodos de penalización consistente e integración reducida en el MGLE, para superar la dificultad del bloqueo volumétrico durante la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en condiciones de flujo incompresible. Más tarde, Álvarez-Hostos et al. (2019) propusieron una extensión plausible del esquema de estabilización corriente arriba de Petrov-Galerkin al MGLE para abordar el problema de transporte predominantemente advectivo durante el cambio de fase en procesos de colada continua con enfriamiento directo.

Particularmente en los casos de flujo en medios porosos bajo el régimen de Darcy, el MGLE ha sido implementado en problemas de flujo bifásico [Samimi y Pak (2014)] y en el análisis hidro-mecánico de fisuras en medios porosos [Samimi y Pak (2016)]. En tales comunicaciones las ecuaciones de conservación en la fase fluida han sido resueltas para calcular la distribución de presiones, sin dar mayor importancia o poner especial énfasis en el cálculo de velocidades. Es por esto que recientemente Zhang y Li (2017) han propuesto la implementación del MGLEVM con funciones de forma construidas por el método de MCM mejorados (MCMM), constituyendo el primer estudio en que el MGLE es usado en problemas de flujo de Darcy para el cálculo estable de velocidades y presiones de forma continua en todo el dominio del problema. El em-

pleo de los MCMM además permitió superar los problemas de condicionamiento de la matriz de ponderación involucrada en la construcción de las funciones de forma, especialmente para dominios de influencia pequeños [Li y Wang (2016)].

Con base en todos los aspectos mencionados hasta ahora, en el siguiente trabajo se propone el empleo del MGLE de una manera más simple y directa para la solución de problemas de flujo en medios porosos, considerando el enfoque directo para el cual la presión constituye la variable principal en la ecuación de Poisson inherente al problema de flujo de Darcy. Dadas las características de las funciones de forma creadas por MCM, este enfoque permite el cálculo de velocidades y presiones estables de forma continua en todo el dominio del problema abordado. La obtención de tales resultados es posible sin recurrir a técnicas de post-procesamiento que conllevan una pérdida de precisión y no garantizan el cumplimiento del principio de continuidad. La factibilidad y confiabilidad de este procedimiento será validado por comparación con las soluciones analíticas de varios problemas de referencia.

## 2. ECUACIONES GOBERNANTES

El problema de flujo de Darcy puede ser abordado bajo una formulación mixta o en forma potencial resolviendo un problema de Poisson para la presión, siendo la segunda opción aquella a implementar en este trabajo.

### 2.1. El problema de flujo de Darcy

El movimiento de fluidos en medios porosos bajo condiciones de flujo de Darcy en un dominio continuo  $\Omega$  con fronteras  $\Gamma$ , se rige por [Zhang y Li (2017)]:

$$\sigma v_i + p_{,i} = f_i \quad \text{en } \Omega, \quad (1)$$

sujeta a:

$$v_{i,i} = g \quad \text{en } \Omega, \quad (2)$$

$$v_i n_i = b \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3)$$

donde (1) y (2) son la ley de Darcy y la ecuación de continuidad, respectivamente, mientras que (3) son las condiciones de penetración o permeación en las fronteras. En tal grupo de ecuaciones  $v_i$  es el vector velocidad,  $p$  la presión,  $n_i$  es el versor normal a  $\Gamma$ , mientras que  $f_i$ ,  $g$  y  $b$  son funciones dadas. Por otra parte,  $\sigma = \mu/\kappa$  siendo  $\mu$  y  $\kappa$  la viscosidad del fluido y la permeabilidad del medio, respectivamente. La sustitución de (1) en (2) da lugar a la forma potencial del problema de Darcy en términos del problema de Poisson para la presión:

$$\left(\frac{p_{,i}}{\sigma}\right)_{,i} - \left(\frac{f_i}{\sigma}\right)_{,i} + g = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4)$$

### 2.2. Implementación del MGLE en la forma potencial del problema de Darcy

El MGLE es una técnica numérica para resolver la forma débil de las ecuaciones gobernantes. En este procedimiento, la formulación débil es resuelta en forma global utilizando funciones de forma creadas en un dominio local móvil, dando lugar a un cálculo continuo de las variables de campo y sus derivadas. La forma débil del problema de Poisson para la presión (4) es:

$$\int_{\Omega} \frac{\delta p_{,i} p_{,i}}{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta p \frac{f_i}{\sigma} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta p \underbrace{v_i n_i}_b d\Gamma - \int_{\Omega} \delta p \left(\frac{f_i}{\sigma}\right)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \delta p g d\Omega \quad (5)$$

En un dominio representado con  $n$  nodos, la función de forma construida por MCM con un polinomio base bi-lineal para un nodo  $I$ -ésimo es [Liu (2009)]:

$$\varphi_{(\bar{x})}^{(I)} = [1 \quad x \quad y \quad xy] \left( \hat{W}_{(\bar{x}-\bar{x}_J)} \sum_{J=1}^n \begin{bmatrix} 1 & x_J & y_J & x_J y_J \\ x_J & x_J^2 & x_J y_J & x_J^2 y_J \\ y_J & x_J y_J & y_J^2 & x_J y_J^2 \\ x_J y_J & x_J^2 y_J & x_J y_J^2 & x_J^2 y_J^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \\ x_I y_I \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde la función de ponderación  $\hat{W}_{(\bar{x}-\bar{x}_J)}$  es construida sobre dominios de influencia rectangulares, utilizando trazadores cúbicos:

$$\hat{W}_{(r)} = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 - 4r^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\hat{W}_{(\bar{x}-\bar{x}_I)} = \hat{W}_{(r_x)} \cdot \hat{W}_{(r_y)},$$

donde:

$$r_x = \frac{\|x - x_I\|}{l_x \cdot d_x^{max}}, \quad r_y = \frac{\|y - y_I\|}{l_y \cdot d_y^{max}}. \quad (8)$$

En (8)  $d_x^{max}$  y  $d_y^{max}$  son los multiplicadores para definir el tamaño del dominio de influencia en términos del espaciado internodal en las direcciones  $x$  ( $l_x$ ) e  $y$  ( $l_y$ ), respectivamente. La formulación débil presentada en (5) será resuelta bajo el esquema centrado de Bunov-Galerkin. En este sentido, se utiliza la misma función de forma para aproximar la presión y también su variación virtual:

$$p(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} \hat{p}_I, \quad \delta p(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} \delta \hat{p}_I. \quad (9)$$

La formulación para resolver el problema de Darcy bajo el MGLE se obtiene luego de sustituir las aproximaciones (9) y (10) en la forma débil (5). El resultado de esta sustitución se escribe con operadores vectoriales para una lectura más simple:

$$\sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \delta \hat{p}_I \underbrace{\left[ \int_{\Omega} \frac{\nabla \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} \cdot \nabla \varphi_{(\bar{x})}^{(J)}}{\sigma} d\Omega \right]}_{K_{IJ}} \hat{p}_J = \sum_{I=1}^n \delta \hat{p}_I \underbrace{\left[ \int_{\Gamma} \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} \frac{\vec{f}}{\sigma} \cdot \hat{n} d\Gamma \right]}_{F_I^{\Gamma}} - \sum_{I=1}^n \delta \hat{p}_I \underbrace{\left[ \int_{\Gamma} \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} b d\Gamma \right]}_{B_I^{\Gamma}} - \sum_{I=1}^n \delta \hat{p}_I \underbrace{\left[ \int_{\Omega} \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} \nabla \cdot \left( \frac{\vec{f}}{\sigma} \right) d\Omega \right]}_{F_I^{\Omega}} + \sum_{I=1}^n \delta \hat{p}_I \underbrace{\left[ \int_{\Omega} \varphi_{(\bar{x})}^{(I)} g d\Omega \right]}_{G_I^{\Omega}}. \quad (10)$$

Todas las sumatorias son finalmente reescritas en un arreglo de vectores y matrices como sigue:

$$K^{n \times n} \hat{p}^n = F_{\Gamma}^n - B_{\Gamma}^n - F_{\Omega}^n + G_{\Omega}^n \quad (11)$$

### 3. EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS

Se abordarán tres ejemplos numéricos propuestos por Zhang y Li (2017) para evaluar la factibilidad y precisión del procedimiento utilizado en esta comunicación. Las soluciones basadas en el MGLE han sido codificadas en el editor del software Matlab<sup>®</sup>. Los códigos fueron ejecutados en un procesador i3-2.13 GHz (i3 es una marca de la corporación Intel, Santa Clara, C. A., USA) en sistema operativo WINDOWS7 Home Basic (WINDOWS es una marca registrada de la corporación Microsoft, Redmond, C.A., USA) con 4 GB de RAM instalados.

### 3.1. Flujo de Darcy compresible sin fuerzas de campo

Se considera un flujo con  $\sigma = 1$  y  $f_i = 0$ , para el cual la distribución exacta de presión es:

$$p(x, y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

La distribución de velocidades se calcula entonces de acuerdo a  $v_i = -p_{,i}$ . Bajo estas condiciones la función de compresibilidad es  $g(x, y) = 8\pi^2 \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$  y la condición de permeación en las fronteras  $b(x, y) = 0$ . Los resultados basados en el MGLE se muestran en las Figuras 1 (a)-(c).

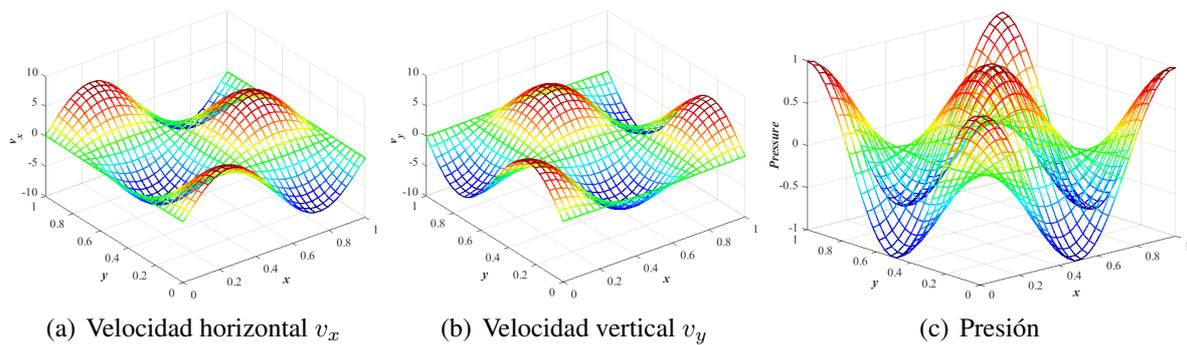


Figura 1: Distribuciones de velocidad y presión obtenidas bajo el MGLE, en el problema de flujo de Darcy compresible sin fuerzas de campo: (a) Velocidad horizontal, (b) Velocidad vertical, y (c) Presión.

### 3.2. Flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo

El segundo ejemplo a analizar involucra el flujo de Darcy de un fluido incompresible con  $\sigma = 1$ , cuyas soluciones exactas para la velocidad y la presión son:

$$p(x, y) = x^3 + y^3, \quad u_i = [2y(1-x)^2, -2x(1-y)^2]^T \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Dadas estas condiciones, las fuerzas de campo se pueden calcular como  $f_i(x, y) = u_i + p_{,i}$ , la función de compresibilidad es nula  $g(x, y) = 0$ , y la permeación en las fronteras es  $b(x, y) = 0$ . Los resultados basados en el MGLE se muestran en las Figuras 2 (a)-(c).

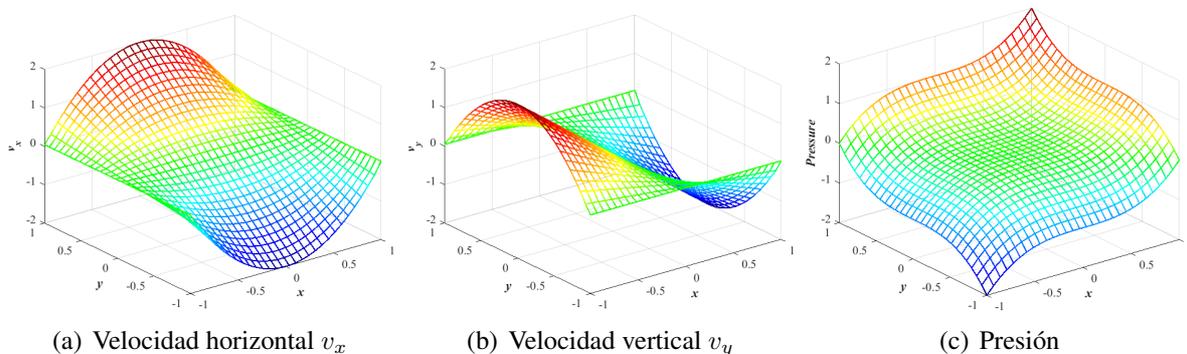


Figura 2: Distribuciones de velocidad y presión obtenidas bajo el MGLE, en el problema de flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo: (a) Velocidad horizontal, (b) Velocidad vertical, y (c) Presión.

### 3.3. Flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo y permeabilidad baja

Por último se analiza el flujo de Darcy de un fluido incompresible con  $\mu = 1$  y en un medio de permeabilidad homogénea  $\kappa = 0,01$ , cuyas soluciones exactas para la velocidad y la presión son:

$$p(x, y) = \mu (x^2 - y^2), \quad u_i = [(x + 1)^2/4, -(x + 1)(y + 1)/2]^T \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Dadas estas condiciones, las fuerzas de campo se pueden calcular como  $f_i(x, y) = \sigma u_i + p_{,i}$ , la función de compresibilidad es nula  $g(x, y) = 0$ , y la permeación en las fronteras está dada por  $b(-1, y) = b(x, -1) = 0$ ,  $b(1, y) = 0$  y  $b(x, 1) = -x - 1$ . Los resultados basados en el MGLE se muestran en las Figuras 3 (a)-(c). Es importante resaltar que los campos de velocidad-

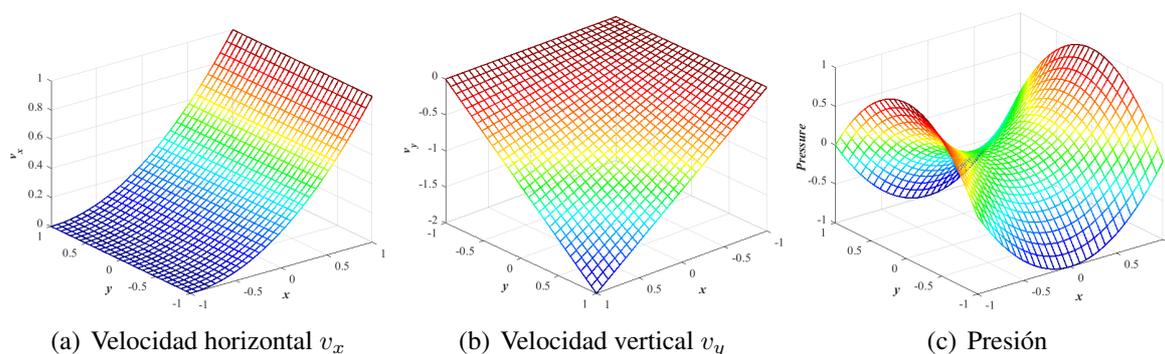


Figura 3: Distribuciones de velocidad y presión obtenidas bajo el MGLE, en el problema de flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo: (a) Velocidad horizontal, (b) Velocidad vertical, y (c) Presión.

des obtenidos bajo el MGLE, han sido calculados a partir de (1), sin recurrir a ningún tipo de post-procesamiento. El carácter continuo de las derivadas en las funciones de forma construidas por MCM, permite el cálculo continuo de la velocidad en un dominio local móvil donde las funciones de forma se ajustan a los parámetros nodales cuyos dominios de influencia encierran al punto de interés. Los resultados en los tres problemas de referencia abordados, fueron obtenidos utilizando  $31 \times 31$  nodos distribuidos uniformemente para representar el dominio del problema. En los problemas abordados, el coeficiente  $\sigma = \mu/\kappa$  es considerando constante. Sin embargo, es importante mencionar que la formulación desarrollada en el inciso 2.2) contempla la variación de  $\sigma = \mu/\kappa$  en el dominio del problema.

## 4. DISCUSIÓN

Los resultados presentados en la sección anterior han demostrado la posibilidad de obtener distribuciones continuas y estables de velocidad y presión, con el empleo del MGLE en la solución problemas de Darcy bajo su forma potencial en términos de presión. Para todos los casos abordados, los resultados basados en el MGLE han exhibido un excelente grado de correspondencia con las soluciones analíticas, comprobando así la precisión de esta técnica en el cálculo de velocidades y presiones. Tales resultados se obtuvieron de manera muy simple, al utilizar funciones de forma construidas por MCM sólo para la aproximación de la presión, las cuales además permitieron un cálculo continuo, directo y preciso de la velocidad sin introducir deterioro alguno en las soluciones con el empleo de técnicas de post-procesamiento. En las tablas 1, 2 y 3 se presentan los errores en el cálculo de velocidad y presión para los casos de flujo de Darcy compresible sin fuerzas de campo, flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo y flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo y permeabilidad baja, respectivamente.

Estos errores se reportan incrementando progresivamente el número de divisiones regulares en el dominio del problema  $N_x \times N_y$ . Los errores de las aproximaciones numéricas respecto a

Tabla 1: Errores y tiempos de cálculo de la solución basada en el MGLE para el problema de flujo de Darcy compresible sin fuerzas de campo

$N_x \times N_y$	Compresible sin fuerzas de campo		
	$E(p)$	$E(v_i)$	Tiempo de Cálculo (s)
$10 \times 10$	$4,61 \times 10^{-3}$	$3,98 \times 10^{-2}$	0,426
$20 \times 20$	$7,38 \times 10^{-4}$	$1,33 \times 10^{-2}$	1,826
$30 \times 30$	$2,79 \times 10^{-4}$	$7,11 \times 10^{-3}$	4,345
$40 \times 40$	$1,43 \times 10^{-4}$	$4,63 \times 10^{-3}$	8,392
$50 \times 50$	$8,66 \times 10^{-5}$	$3,32 \times 10^{-3}$	14,143

Tabla 2: Errores y tiempos de cálculo de la solución basada en el MGLE para el problema de flujo de Darcy compresible con fuerzas de campo

$N_x \times N_y$	Incompresible con fuerzas de campo		
	$E(p)$	$E(v_i)$	Tiempo de Cálculo (s)
$10 \times 10$	$1,84 \times 10^{-3}$	$6,51 \times 10^{-2}$	0,467
$20 \times 20$	$3,37 \times 10^{-4}$	$2,21 \times 10^{-2}$	1,870
$30 \times 30$	$1,16 \times 10^{-4}$	$1,22 \times 10^{-2}$	4,453
$40 \times 40$	$5,23 \times 10^{-5}$	$8,00 \times 10^{-3}$	8,533
$50 \times 50$	$2,75 \times 10^{-5}$	$5,80 \times 10^{-3}$	14,212

Tabla 3: Errores y tiempos de cálculo de la solución basada en el MGLE para el problema de flujo de Darcy incompresible con fuerzas de campo y baja permeabilidad

$N_x \times N_y$	Incompresible con fuerzas de campo y baja permeabilidad		
	$E(p)$	$E(v_i)$	Tiempo de Cálculo (s)
$10 \times 10$	$7,56 \times 10^{-4}$	$2,64 \times 10^{-4}$	0,449
$20 \times 20$	$1,17 \times 10^{-4}$	$1,05 \times 10^{-4}$	1,716
$30 \times 30$	$3,53 \times 10^{-5}$	$6,07 \times 10^{-5}$	4,052
$40 \times 40$	$1,36 \times 10^{-5}$	$4,13 \times 10^{-5}$	7,884
$50 \times 50$	$6,158 \times 10^{-6}$	$3,08 \times 10^{-5}$	13,408

las soluciones analíticas han sido calculados en términos de la raíz de la media cuadrática de velocidad y presión, respectivamente:

$$E(p) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^n (\bar{p}^q - p^q)^2}{\sum_{q=1}^n (\bar{p}^q)^2}}, \quad E(v_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^n \|\bar{v}_i^q - v_i^q\|^2}{\sum_{q=1}^n \|\bar{v}_i^q\|^2}}, \quad (12)$$

Donde  $v_i$  y  $p$  son calculadas en las posiciones nodales  $n$ . La metodología propuesta en esta comunicación proporciona resultados muy precisos, aún más que aquellos obtenidos bajo el MGLEVM propuesto por Zhang y Li (2017). En este sentido, la implementación del MGLE bajo el enfoque directo en donde se resuelve el problema de Poisson inherente al flujo de Darcy da lugar a resultados muy precisos tanto en presión como en velocidad, de una manera más simple involucrando menos grados de libertad. La posibilidad de obtener funciones de forma

y derivadas más suaves y continuas en un dominio local móvil por medio de la técnica de MCM, permite capturar de mejor manera gradientes de presiones. Ésta última característica ha permitido obtener también una muy buena precisión en el cálculo de velocidades por medio de (1). Es importante notar que tal precisión se pudo lograr también para valores de permeabilidad bajos, llegando a ser inclusive un orden de magnitud más precisos que aquellos obtenidos por Zhang y Li (2017) bajo formulación mixta y el MGLEVM.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han demostrado las potencialidades del MGLE bajo su forma convencional para la solución numérica de problemas de flujo de Darcy en medios porosos. En esta formulación, se considera solo la presión como variable primaria en un problema de Poisson, donde posteriormente se puede recuperar la distribución de velocidades en forma continua gracias a las características de las funciones de forma basadas en MCM. Bajo este esquema se pueden obtener soluciones muy precisas sin la necesidad de incluir grados de libertad adicionales en una formulación mixta, o de calcular parámetros adicionales de estabilización para obtener una distribución regular de presiones y velocidades en el dominio del problema. En este sentido, este es el primer estudio donde se ha demostrado la posibilidad de calcular campos de velocidades precisos bajo el enfoque potencial del problema de Darcy, cuando el mismo es resuelto utilizando el MGLE con funciones de forma construidas por MCM. Por lo tanto, este enfoque básico resulta adecuado y simple de implementar para aplicaciones en ingeniería, lo que no sería posible bajo una formulación convencional basada en un método con malla tal como el MEF.

## REFERENCIAS

- Álvarez-Hostos J., Bencomo A., Puchi Cabrera E., Guérin J.D., y Dubar L. Modeling the viscoplastic flow behavior of a 20MnCr5 steel grade deformed under hot-working conditions, employing a meshless technique. *International Journal of Plasticity*, 103:119–142, 2018. doi:10.1016/j.ijplas.2018.01.005.
- Álvarez-Hostos J.C., Bencomo A.D., y Cabrera E.S.P. Simple iterative procedure for the thermal–mechanical analysis of continuous casting processes, using the element-free galerkin method. *Journal of Thermal Stresses*, 41(2):160–181, 2018a. doi:10.1080/01495739.2017.1389325.
- Álvarez-Hostos J.C., Bencomo A.D., Puchi-Cabrera E.S., Fachinotti V.D., Tourn B., y Salazar-Bove J.C. Implementation of a standard stream-upwind stabilization scheme in the element-free galerkin based solution of advection-dominated heat transfer problems during solidification in direct chill casting processes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 106:170–181, 2019. doi:10.1016/j.enganabound.2019.05.008.
- Álvarez-Hostos J.C., Cabrera E.S.P., y Bencomo A.D. Stress analysis of a continuous casting process, on the basis of the element-free galerkin formulation. *steel research international*, 88(2):1600019, 2016. doi:10.1002/srin.201600019.
- Álvarez-Hostos J.C., Fachinotti V.D., Piña A.J.S., Bencomo A.D., y Cabrera E.S.P. Implementation of standard penalty procedures for the solution of incompressible navier–stokes equations, employing the element-free galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 96:36–54, 2018b. doi:10.1016/j.enganabound.2018.08.008.
- Bochev P.B. y Dohrmann C.R. A computational study of stabilized, low-order  $c_0$  finite element approximations of darcy equations. *Computational Mechanics*, 38(4-5):323–333, 2006. doi:10.1007/s00466-006-0036-y.
- Cheng H., Peng M., y Cheng Y. A hybrid improved complex variable element-free galerkin method for three-dimensional advection-diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 97:39–54, 2018. doi:10.1016/j.enganabound.2018.09.007.
- Cheng Y., Bai F., y Peng M. A novel interpolating element-free galerkin (IEFG) method for two-

- dimensional elastoplasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 38(21-22):5187–5197, 2014. doi:10.1016/j.apm.2014.04.008.
- Dehghan M. y Narimani N. An element-free galerkin meshless method for simulating the behavior of cancer cell invasion of surrounding tissue. *Applied Mathematical Modelling*, 59:500–513, 2018. doi:10.1016/j.apm.2018.01.034.
- Gharib M., Khezri M., y Foster S. Meshless and analytical solutions to the time-dependent advection-diffusion-reaction equation with variable coefficients and boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 49:220–242, 2017. doi:10.1016/j.apm.2017.04.033.
- Hon Y.C., Šarler B., y fang Yun D. Local radial basis function collocation method for solving thermo-driven fluid-flow problems with free surface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 57:2–8, 2015. doi:10.1016/j.enganabound.2014.11.006.
- Hughes T.J. Multiscale phenomena: Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4):387–401, 1995. doi:10.1016/0045-7825(95)00844-9.
- Li D. y Tian L.R. Large deformation analysis of a gel using the complex variable element-free galerkin method. *Applied Mathematical Modelling*, 61:484–497, 2018. doi:10.1016/j.apm.2018.04.004.
- Li X. y Dong H. The element-free galerkin method for the nonlinear p-laplacian equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(7):2549–2560, 2018. doi:10.1016/j.camwa.2017.12.019.
- Li X. y Wang Q. Analysis of the inherent instability of the interpolating moving least squares method when using improper polynomial bases. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 73:21–34, 2016. doi:10.1016/j.enganabound.2016.08.012.
- Liu G. *Mesh Free Methods*. CRC Press, 2da edición, 2009. doi:10.1201/9781420040586.
- Nakshatrala K., Turner D., Hjelmstad K., y Masud A. A stabilized mixed finite element method for darcy flow based on a multiscale decomposition of the solution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36):4036–4049, 2006. doi:10.1016/j.cma.2005.07.009.
- Pathak H., Singh A., y Singh I.V. Fatigue crack growth simulations of homogeneous and bi-material interfacial cracks using element free galerkin method. *Applied Mathematical Modelling*, 38(13):3093–3123, 2014. doi:10.1016/j.apm.2013.11.030.
- Reddy J. y Gartling D. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, 3ra edición, 2010. ISBN 978-1-4200-8599-0.
- Samimi S. y Pak A. A novel three-dimensional element free galerkin (EFG) code for simulating two-phase fluid flow in porous materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 39:53–63, 2014. doi:10.1016/j.enganabound.2013.10.011.
- Samimi S. y Pak A. A fully coupled element-free galerkin model for hydro-mechanical analysis of advancement of fluid-driven fractures in porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 40(16):2178–2206, 2016. doi:10.1002/nag.2525.
- Wang X., Ouyang J., Su J., y Yang B. On the superiority of the mixed element free galerkin method for solving the steady incompressible flow problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(11):1618–1630, 2012. doi:10.1016/j.enganabound.2012.05.006.
- Zhang T. y Li X. Meshless analysis of darcy flow with a variational multiscale interpolating element-free galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 100:237–245, 2017. doi:10.1016/j.enganabound.2017.10.017.
- Zhang T. y Li X. A generalized element-free galerkin method for stokes problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(9):3127–3138, 2018. doi:10.1016/j.camwa.2018.01.035.
- Zhang X. y Xiang H. Variational multiscale element free galerkin method for convection-diffusion-reaction equation with small diffusion. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 46:85–92, 2014. doi:10.1016/j.enganabound.2014.05.010.
- Zhang X. y Zhang P. Meshless modeling of natural convection problems in non-rectangular cavity using the variational multiscale element free galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 61:287–300, 2015. doi:10.1016/j.enganabound.2015.08.005.