

## ELIMINACIÓN DE OSCILACIONES EN LA VELOCIDAD UTILIZANDO RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS

### ELIMINATION OF VELOCITY OSCILLATIONS VIA A NEW VELOCITY CORRECTION

**Horacio J. Aguerre<sup>a</sup>, Cesar I. Pairetti<sup>a, b</sup>, César M. Venier<sup>a, b</sup>, Santiago Márquez Damián<sup>a</sup>  
y Norberto M. Nigro<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), CONICET/UNL, Colectora Ruta Nac  
Nro 168, Km 0, Paraje El Pozo 3000 Santa Fe*

<sup>b</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Berutti  
2301, 2000, Rosario, Santa Fe, Argentina*

**Palabras clave:** Oscilaciones de Velocidad, Reconstrucción de Flujos, Métodos Segregados, Mallas Colocadas, Método de los Volúmenes Finitos

**Resumen.** Este trabajo presenta un algoritmo de la familia SIMPLE diseñado para eliminar oscilaciones espúreas en la velocidad en problemas de flujo. En este contexto, se propone computar la velocidad a partir de una reconstrucción de los flujos máscicos definidos sobre las caras de la malla. En analogía con la interpolación de Rhie-Chow, este enfoque es equivalente a incluir un gradiente de presión modificado introduciendo difusión numérica en la ecuación de momento. Para preservar la exactitud del algoritmo original, se utiliza un operador de reconstrucción de alto orden el cual se define resolviendo un problema de minimización. La nueva formulación se evalúa se resolviendo ejemplos de flujo compresible, donde se eliminan las oscilaciones numéricas que resultan de la formulación estándar.

**Keywords:** Velocity oscillations, Flux reconstruction, Segregated method, Collocated grids, Finite Volume Method.

**Abstract.** This work presents a SIMPLE algorithm designed to eliminate spurious oscillations in flow problems. For this task, the velocity is computed via a reconstruction of the mass fluxes defined on mesh faces. Similar to the Rhie-Chow interpolation, this approach is equivalent to modify the pressure gradient and, as a consequence, introducing numerical diffusion in the momentum equation. To preserve the accuracy of the original method, a high-order reconstruction formula is employed which is defined by solving a minimization problem. The new proposal is validated by solving some numerical compressible fluid flow problems. In these problems, the spurious numerical oscillations resulting from the standard formulation are eliminated.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el contexto del Método de los Volúmenes Finitos (FVM, por sus siglas en inglés), los algoritmos segregados con mallas colocadas se encuentran dentro de las estrategias más populares para acoplar la velocidad y la presión cuando se desean resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, una de las mayores desventajas de estas estrategias es que son proclives a la aparición de las oscilaciones numéricas de alta frecuencia que provienen de desacoplar el tratamiento numérico de la presión y la velocidad.

Una forma usual de resolver este inconveniente es la introducción de un término estabilizador en la ecuación de presión, el cual se realiza a partir de la denominada interpolación de [Rhie y Chow \(1983\)](#). A partir de este desarrollo, esta técnica ha sido la alternativa más empleada para mitigar las oscilaciones de presión y es aún hoy, materia de múltiples discusiones en términos de su exactitud y estabilidad ([Choi, 1999](#); [Kawaguchi et al., 2002](#); [Majumdar, 1988](#); [Miller y Schmidt, 1988](#); [Oxtoby et al., 2013](#); [Mencinger y Žun, 2007](#); [Zhang et al., 2014](#)). Uno de los principales inconvenientes de esta técnica es que esta no garantiza la condición no oscilante de los campos para todas las condiciones de los problemas. [Oxtoby et al. \(2013\)](#) y [Mencinger y Žun \(2007\)](#) proponen nuevas reglas de discretización que eliminan valores no físicos que se producen usualmente en la cercanía de una discontinuidad, como una frontera porosa o una interfase en el contexto de *Volume of Fluid*. Otros autores proponen soluciones que involucran ajustes sobre la interpolación de Rhie-Chow en vías de solucionar estos problemas. En particular, [Zhang et al. \(2014\)](#) deja en evidencia las debilidades de la versión estándar de la interpolación de Rhie-Chow cuando los términos de corrección en la ecuación de masa se tornan demasiado grandes. En general, tales situaciones aparecen cuando se trabaja con discontinuidades en las fuentes de momento. Ellos proponen una corrección la cual consiste en suavizar el gradiente de presión en las caras de celda por medio de la introducción de fuerzas de cuerpo. En este sentido, [Nordlund et al. \(2016\)](#) trabajaron sobre problemas similares proponiendo dos métodos para eliminar las oscilaciones espúreas: una alternativa que involucra un ajuste de la resistencia porosa en las celdas cercanas a la interfaz del medio porosa y otra opción que introduce valores de presión adicionales en la misma región. Todos estos trabajos proponen soluciones particulares para eliminar las oscilaciones de los campos en diferentes situaciones. Sin embargo, para la velocidad, se necesita abordar un estudio más profundo de las razones primitivas que dan origen a las oscilaciones de alta frecuencia. Este punto es la principal motivación de este trabajo.

En este contexto, este trabajo presenta una nueva formulación numérica para reducir las oscilaciones espúreas de alta frecuencia en algoritmos de acople presión-velocidad incompresibles y compresibles. La propuesta esta inspirada por la naturaleza no oscilatoria de los flujos másicos presentes en las formulaciones FVM colocadas. Precisamente, el campo de velocidad se define como una reconstrucción cara-celda de los flujos másicos.

Los operadores de reconstrucción se pueden obtener a partir de diversos procedimientos, como problemas de minimización de diferencias de flujo ([Shashkov et al., 1998](#); [Weller, 2014](#); [Weller y Shahrokhi, 2014](#)) o de promedios pesados ([Perot et al., 2006](#)). En este trabajo, se aplica el operador de reconstrucción propuesto por [Aguerre et al. \(2018\)](#) el cual se basa en minimización de diferencia de flujos. El nuevo operador ha sido diseñado bajo ciertas restricciones de forma de mantener el orden de exactitud del algoritmo original.

## 2. TEORÍA

### 2.1. Algoritmo SIMPLE

La mayoría de los algoritmos de la familia SIMPLE (Patankar y Spalding, 1972) presentan la siguiente estructura general en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. En primer lugar se resuelve la ecuación de momento, la cual se linealiza como,

$$a_P \mathbf{u}_P + \sum_N a_N \mathbf{u}_N = b_P \mathbf{u}_P^0 + \Phi_P - \nabla p_P, \quad (1)$$

donde,  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidad discretizado, el subíndice  $P$  indica valores centrados de la celda en cuestión (posición diagonal en la matriz),  $N$  se refiere a valores de las celdas vecinas y  $f$  se designa a los valores en caras. El término  $b_P \mathbf{u}_P^0$  es la contribución del paso temporal previo y es función del esquema de discretización temporal y  $\Phi$  representa los términos fuente. El vector normal a la cara  $\mathbf{S}_f$  tiene la magnitud del área de la cara y apunta hacia afuera de la celda,  $F_f$  es el flujo de velocidad en la cara  $f$  y  $a_P$  y  $a_N$ , son los coeficientes de la diagonal y fuera de esta de la matriz de momento respectivamente. El operador  $\nabla p_P$  es un gradiente computado por medio del teorema de Gauss que utiliza valores de la presión en celdas vecinas. Despejando  $\mathbf{u}_P$  de la Ecuación (1),

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{H}_P - \frac{1}{a_P} \nabla p_P, \quad (2)$$

donde el término  $\mathbf{H}_P$  se computa como,

$$\mathbf{H}_P = \frac{b_P \mathbf{u}_P^0 + \Phi_P - \sum_N a_N \mathbf{u}_N}{a_P}. \quad (3)$$

El método SIMPLE se basa en combinar las ecuaciones de Navier-Stokes en una única expresión, que se obtiene aplicando el operador divergencia a ambos lados de la ecuación de momento, discretizada, Ecuación (2). Reordenando se llega a la siguiente expresión denominada como la ecuación para la presión,

$$\sum_f \left( \frac{1}{a_P} \nabla p_P \right)_f \cdot \mathbf{S}_f = \sum_f \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{S}_f. \quad (4)$$

La resolución de la ecuación previa puede generar oscilaciones de alta frecuencia en la presión. Para resolver este inconveniente, se reemplaza el término del lado izquierdo de la Ecuación (4) por  $\sum_f \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p_f \cdot \mathbf{S}_f)$ , donde  $\nabla p_f$  es un gradiente computado en las caras a través de valores en celdas vecinas (Jasak, 1996). Esta aproximación es análoga a la interpolación de Rhie y Chow (1983).

Finalmente, luego de resolver la Ecuación (4) se procede a actualizar los valores de velocidad utilizando los nuevos valores de presión. Valores del flujo de velocidad en caras  $F_f$ :

$$F_f = \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{S}_f - \left( \frac{1}{a_P} \right)_f \nabla p_f \cdot \mathbf{S}_f \quad (5)$$

y valores en celdas  $\mathbf{u}_P$ ,

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{H}_P - \frac{1}{a_P} \nabla p_P \quad (6)$$

A esta última ecuación se la denomina corrección explícita de la velocidad.

## 2.2. Oscilaciones de velocidad

Siguiendo al Ecuación (6), la velocidad es función de  $\mathbf{H}_P$ ,  $a_P$  y  $\nabla p_P$ . Se observa que, a pesar de eliminar cualquier oscilación en el campo de presiones, la velocidad seguirá afectada por oscilaciones potenciales presentes en los campos  $\mathbf{H}_P$  and  $a_P$ . Además, el gradiente de presión de la Ecuación (6) no puede generar un efecto de control ya que cualquier oscilación presente en  $\mathbf{H}_P$  and  $a_P$  no se manifiesta en la ecuación de presión debido a la interpolación lineal. Por lo tanto, no hay un efecto de retroalimentación posible entre las oscilaciones de velocidad y el gradiente de presión. El proceso de interpolación lineal es fundamental ya que es responsable de filtrar las oscilaciones de alta frecuencia presente en valores de celdas a las caras (Aguerre et al., 2018).

Finalmente, la formulación estándar del algoritmo SIMPLE no tiene mecanismo alguno para disipar las oscilaciones de velocidad en la ecuación de presión, debido a la eliminación de estas por medio de la interpolación lineal de los flujos de velocidad.

## 2.3. Corrección explícita de la velocidad basada en reconstrucción de flujos

Luego de resolver la ecuación de presión (4), se obtiene un campo (suave) de presiones el cual se utiliza para computar los flujos  $F_f$  por medio de la Ecuación (5). Por lo tanto, el campo  $F_f$  se encuentra libre de oscilaciones lo cual promueve su uso para eliminar estas anomalías en el campo de velocidad. En este sentido, se propone computar los valores de velocidad en centro de celdas a partir de una reconstrucción cara-celda de los flujos  $F_f$ ,

$$\tilde{\mathbf{u}}_P = \mathcal{R}(F_f), \quad (7)$$

donde  $\mathcal{R}$  es un operador lineal que reconstruye los flujos en caras en valores de velocidad centrados en celdas. Para ser consistente con la ecuación de momento, el gradiente de presión debe ser modificado incluyendo la Ecuación (11) en la Ecuación. (6),

$$\tilde{\nabla} p_P = a_P [\mathbf{H}_P - \mathcal{R}(F_f)]. \quad (8)$$

De hecho, el algoritmo original se puede preservar solamente modificando el gradiente de presión de acuerdo con la Ecuación (8) en la ecuación de momento algebraica expuesta en la Ecuación (6). Introduciendo la Ecuación (5) en Ecuación (8) y aplicando la propiedad lineal del operador  $\mathcal{R}$ ,

$$\tilde{\nabla} p_P = a_P \mathcal{R} \left[ \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \cdot \mathbf{S}_f \right] + a_P [\mathbf{H}_P - \mathcal{R}(\mathbf{H}_f \cdot \mathbf{S}_f)]. \quad (9)$$

Se puede observar que esta nueva fórmula del gradiente de presión está compuesta de dos contribuciones. El primer término utiliza el campo de presiones obtenido de la Ecuación (4) y el segundo es función de  $\mathbf{H}_P$  y  $a_P$ .

Finalmente, la nueva corrección explícita de la velocidad se escribe de la siguiente manera,

$$\tilde{\mathbf{u}}_P = \mathbf{H}_P - \frac{1}{a_P} \tilde{\nabla} p_P. \quad (10)$$

## 2.4. Reconstrucción de la velocidad en problemas compresibles

En problemas de flujo compresible, la formulación SIMPLE necesita intercalar, dentro del acople presión-velocidad, la ecuación de conservación de la energía que, en conjunto con la

ecuación de estado del fluido, se determina el acople entre todas las incógnitas del problema. En comparación con la formulación incompresible, el *solver* compresible utiliza flujos másicos en las caras en vez de flujos volumétricos. Por esta razón, se debe adoptar una estrategia al momento de reconstruir la velocidad en celdas a partir de la Ecuación (11). Este trabajo propone convertir los flujos másicos en volumétricos dividiendo los primeros por un valor de densidad en las caras computado a partir de interpolación lineal,

$$\tilde{\mathbf{u}}_P = \mathcal{R}(F_f) = \mathcal{R}(\dot{m}_f/\rho_f), \quad (11)$$

donde  $\dot{m}_f$  es el flujo másico definido en las caras y  $\rho_f$  es la densidad en las caras obtenidas por valores en celdas adyacentes mediante interpolación lineal.

## 2.5. Operador de reconstrucción

Una alternativa para reconstruir la velocidad a partir de los flujos en las caras consiste en minimizar la siguiente función:

$$g(\mathbf{u}_P) = \sum_f \frac{1}{\|\mathbf{S}_f\|} [F_f(\mathbf{u}_f) - F_f^*(\mathbf{u}_P)]^2, \quad (12)$$

donde  $F_f(\mathbf{u}_f)$  es el flujo másico definido en las caras luego de la ecuación de presión y  $F_f^*$  es un flujo aproximado que se expresa en función del valor de celda que se quiere reconstruir de forma que la operación de reconstrucción tenga solución única. Una alternativa de segundo orden a la hora de definir el flujo aproximado es aplicando una aproximación de Taylor de segundo orden utilizando un gradiente en la cara  $\nabla \mathbf{u}_f$  computado a partir de celdas adyacentes,

$$\mathbf{u}_f^* = \mathbf{u}_P + \nabla \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{d}_{Pf}. \quad (13)$$

El operador de reconstrucción debe actuar como la inversa de la operación de interpolación lineal celda-caras. Para hacer esto, la aproximación de los flujos se debe basar en la Ecuación (13).

Si el campo de velocidades del cual se parte es oscilatorio, y además, si se adopta el mismo gradiente en caras utilizado en la Ecuación (13), la reconstrucción generará la inversa exacta de la interpolación lineal, reconstruyendo entonces el campo oscilatorio del cual se partió. Por esta razón, el gradiente en caras de la Ecuación (13) se reemplaza por una aproximación basada en una interpolación lineal de gradientes computados en celdas  $(\overline{\nabla \mathbf{u}_P^i})_f$ . Por lo tanto, se propone la siguiente expresión para los valores en cara aproximados  $\mathbf{u}_f^*$ ,

$$\mathbf{u}_f^* = \mathbf{u}_P^{i+1} + (\overline{\nabla \mathbf{u}_P^i})_f \cdot \mathbf{d}_{Pf}. \quad (14)$$

Los flujos resultantes de esta aproximación adquieren la siguiente forma:

$$F_f^*(\mathbf{u}_P) = [\mathbf{u}_P^{i+1} + (\overline{\nabla \mathbf{u}_P^i})_f \cdot \mathbf{d}_{Pf}] \cdot \mathbf{S}_f. \quad (15)$$

Adoptando la definición del funcional a minimizar dado en la Ecuación (12), la velocidad  $\mathbf{u}_P^{i+1}$  se define como,

$$\mathbf{u}_P^{i+1} = \mathcal{R}(F_f) = \left( \sum_f \frac{\mathbf{S}_f \mathbf{S}_f}{\|\mathbf{S}_f\|} \right)^{-1} \cdot \left\{ \sum_f [F_f - (\overline{\nabla \mathbf{u}_P^i})_f \cdot \mathbf{d}_{Pf} \cdot \mathbf{S}_f] \frac{\mathbf{S}_f}{\|\mathbf{S}_f\|} \right\}. \quad (16)$$

donde  $(\overline{\nabla \mathbf{u}_P^i})_f$  se calcula utilizando valores de la velocidad disponibles de la iteración previa del algoritmo segregado.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 3.1. Compresión repentina de una celda en un problema unidimensional

En este ejemplo, se estudia un problema de flujo compresible unidimensional: este consiste en deformar el dominio unidimensional que motiva el movimiento del fluido dentro de este. La deformación del dominio se aplica sobre una única celda tal cual se muestra en la Fig. 1.

Se utiliza una formulación compresible basada en el algoritmo SIMPLE dentro de una formulación Lagrangiana-Euleriana-Arbitraria de forma de satisfacer las ecuaciones de conservación dentro de un marco de referencia móvil. La solución de este problema numérico por medio de la formulación estándar genera resultados oscilatorios para el campo de velocidades. En la Fig. 2, se presentan resultados para cuatro casos con diferentes grados de compresión en la celda inter-

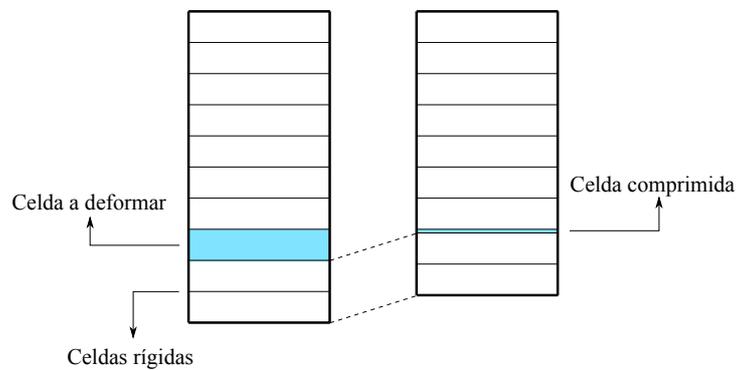


Figura 1: a

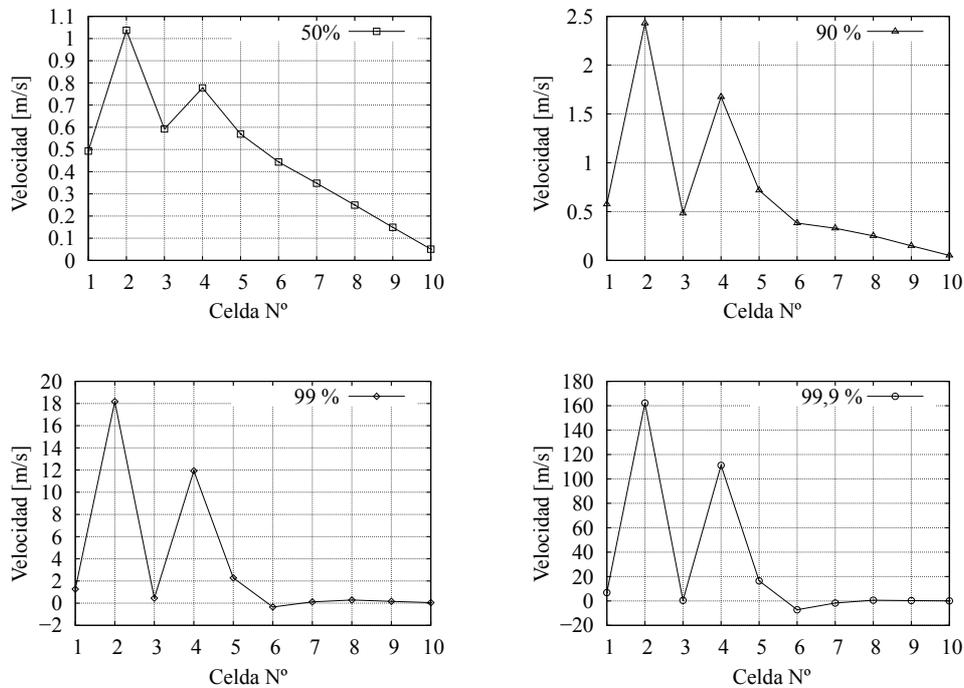


Figura 2: Resultados oscilatorios para diferentes tasas de compresión de la celda deformable. La amplitud de las oscilaciones crece de forma proporcional con la tasa de deformación.

media. Se aprecia claramente que la magnitud de las oscilaciones esta relacionada con la tasa de deformación de la celda. En contraste, los resultados de la formulación basada en la nueva reconstrucción de la velocidad no presentan oscilaciones tal cual se observa en la Fig. 3

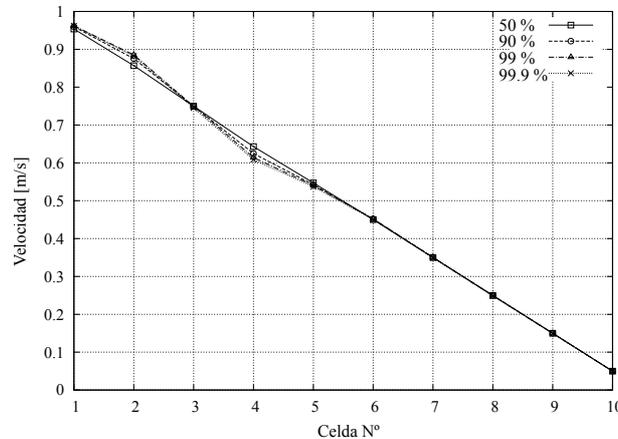


Figura 3: Resultados utilizando la nueva formula de corrección de la velocidad para diferentes grados de deformación de la celda.

### 3.2. Viaje de ondas de presión en una cavidad cúbica

Esta problema resuelve la evolución de una onda de presión dentro de una cavidad cúbica mediante una formulación compresible basada en SIMPLE. En el comienzo de la simulación, la cavidad se divide en dos zonas con valores diferentes de presión. Una mitad del dominio ( $\Omega_A$ ) contiene aire a una presión  $p_A$  mientras que la mitad restante ( $\Omega_B$ ) está llena de aire a presión  $p_B$ . El dominio  $\Omega$  es un cubo de 1 m de lado donde una pared central normal al eje  $x$  lo divide al comienzo de la simulación según se muestra en la Fig. 4. Las condiciones iniciales del problema se listan debajo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) &= (0, 0, 0) \text{ m/s} & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\
 T(\mathbf{x}, 0) &= 276 \text{ K} & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\
 p(\mathbf{x}, 0) &= 110000 \text{ Pa} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_A, \\
 p(\mathbf{x}, 0) &= 100000 \text{ Pa} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_B.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

En las paredes, se impone una condición de no deslizamiento y adiabática para la velocidad y temperatura respectivamente. El problema numérico se resuelve con discretizaciones de primer

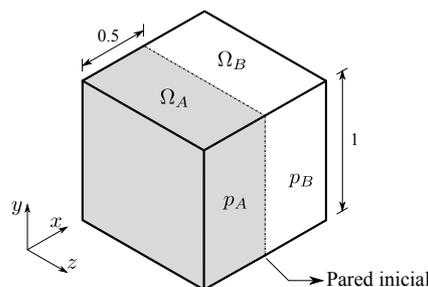


Figura 4: Dominio cúbico que contiene aire a diferentes presiones.

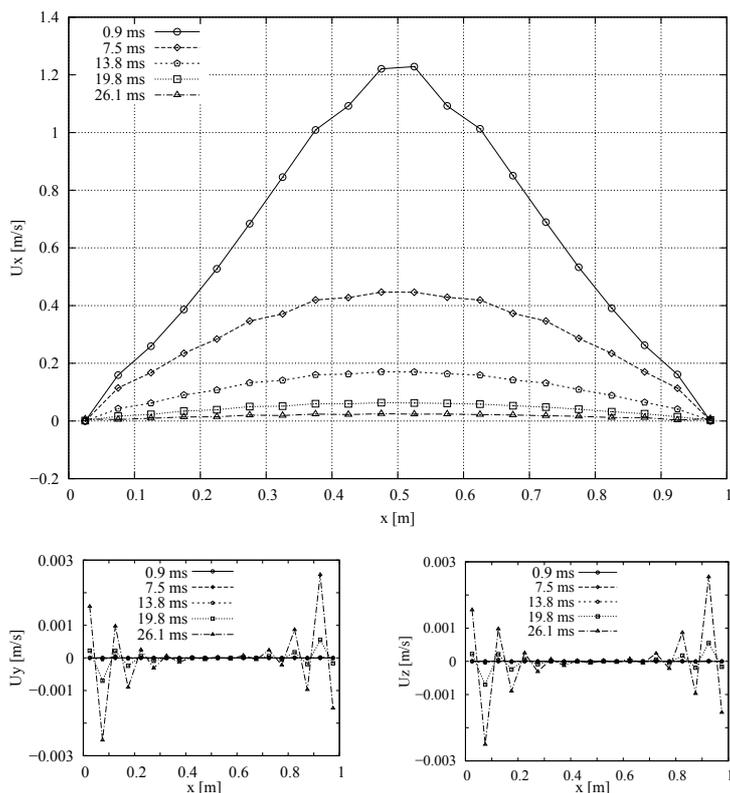


Figura 5: Resultados de las componentes de la velocidad utilizando la formulación numérica estándar.

orden para el espacio y tiempo respectivamente. Con estos esquemas se desea evitar potenciales oscilaciones provenientes de esquemas de mayor orden. Todas las simulaciones se realizan utilizando un paso de tiempo de  $\Delta t = 0,0003$  s. Al comienzo de la simulación, la pared central del dominio desaparece y, en consecuencia, dos ondas de presión se desplazan en direcciones opuestas a lo largo del eje  $x$ . Esta dinámica continua con el rebote de las ondas en las paredes de la cavidad. Las ondas de presión se van disipando hasta alcanzar una presión uniforme en toda la cavidad. El rebote de las ondas de presión contra las paredes produce oscilaciones en las propiedades físicas del aire con un período igual a  $T \approx L/c$  donde  $L$  m es el lado de la cavidad y  $c$  es la velocidad del sonido en el aire. La solución del problema con la formulación estándar genera resultados oscilatorios en el campo de velocidad. Estos resultados se presentan en la Fig 5. Esta figura muestra los valores de la componente de velocidad sobre una línea paralela al eje  $x$  y coincidente con el centro de la cavidad. A medida que transcurre la simulación, las ondas de velocidad se van disipando por causa de la disipación viscosa y la magnitud de la componente  $x$  de la velocidad decrece tal cual se aprecia en la Fig. 5. Por su lado, aparecen oscilaciones espúreas en las componentes  $y$  y  $z$  de la velocidad. Estos resultados no son físicos y también se observan en la componente principal del flujo.

De forma contraria, la nueva propuesta basada en reconstrucción de la velocidad predice un campo de velocidades suave en todas sus componentes tal cual se aprecia en la Fig. 6.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó por medio de ejemplos numéricos compresibles una nueva formulación que elimina las oscilaciones de velocidad utilizando FVM. El método se basa en una reconstrucción de los flujos másicos presentes en las caras de un algoritmo segregado de la

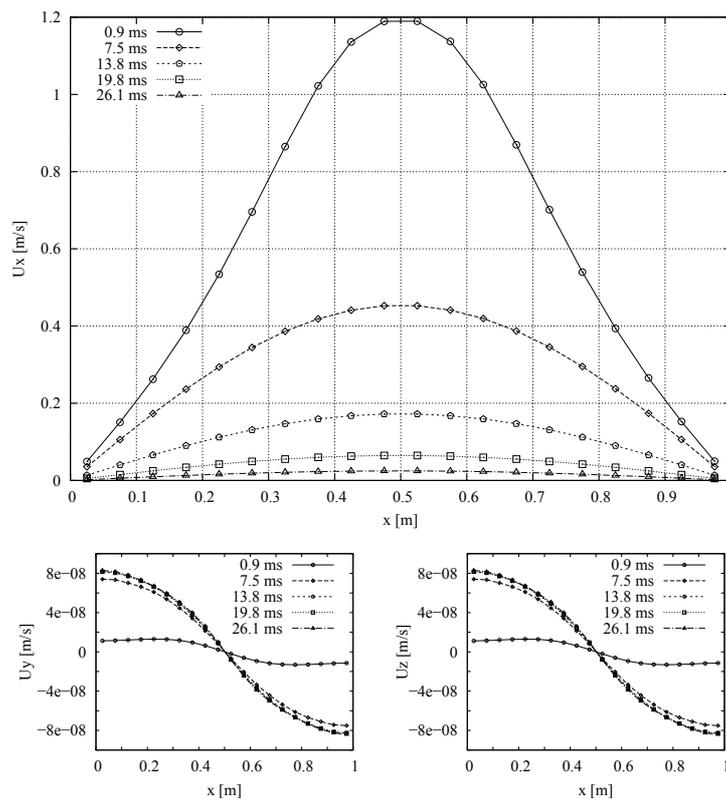


Figura 6: Componentes de la velocidad utilizando reconstrucción.

familia SIMPLE, para definir los valores de velocidad en centros de celdas.

Se analizó resumidamente el algoritmo SIMPLE y se mostró que las potenciales oscilaciones presentes en  $H_P$  y  $a_P$  permanecen luego de una iteración del algoritmo, por lo cual, se introducen directamente dentro de la definición de la velocidad. Por otro lado, los flujos computados por la ecuación de presión están libres de este comportamiento oscilatorio debido al efecto de filtrado ejercido por la interpolación lineal. De esta manera, la reconstrucción de estos flujos permite generar valores en centros de celdas libre de oscilaciones. Este nuevo procedimiento para definir la velocidad es equivalente a utilizar un gradiente de presión modificado en la ecuación de momento. De esta forma, se agrega difusión numérica proporcional a una derivada de alto orden de  $H_P$ , disipando las oscilaciones de velocidad de manera análoga a como la corrección de Rhie-Chow actúa sobre la presión.

La naturaleza no oscilatoria de la nueva formulación se evaluó en dos problemas de flujo compresible en donde los resultados en velocidad utilizando la formulación original presentan oscilaciones. En ambos casos, la nueva propuesta elimina las oscilaciones espúreas y conduce a resultados físicamente consistentes.

Finalmente, vale la pena aclarar que esta nueva formulación afecta de forma significativa la estructura global del algoritmo de partida. Esta característica posiciona a esta estrategia como una mejora directa, factible de aplicar a las diferentes implementaciones computacionales del algoritmo SIMPLE.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al CONICET, a la Universidad Nacional del Litoral, a la Universidad Nacional de Rosario, a la ANPCyT y a la Universidad Tecnológica Nacional por su

apoyo financiero a través de los *grants* CAI+D 2011 501 201101 00435 LI, PICT-2013 0830.

## REFERENCIAS

- Aguerre H.J., Pairetti C.I., Venier C.M., Damián S.M., y Nigro N.M. An oscillation-free flow solver based on flux reconstruction. *Journal of Computational Physics*, 365:135 – 148, 2018.
- Choi S.K. Note on the use of momentum interpolation method for unsteady flows. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, 36(5):545–550, 1999.
- Jasak H. *Error analysis and estimation for the Finite Volume Method with applications to fluid flows*. Tesis de Doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
- Kawaguchi Y., Tao W.Q., y Ozoe H. Checkerboard pressure predictions due to the underrelaxation factor and time step size for a nonstaggered grid with momentum interpolation method. *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, 41(1):85–94, 2002.
- Majumdar S. Role of underrelaxation in momentum interpolation for calculation of flow with nonstaggered grids. *Numerical Heat Transfer*, 13(1):125–132, 1988.
- Mencinger J. y Žun I. On the finite volume discretization of discontinuous body force field on collocated grid: Application to VOF method. *Journal of Computational Physics*, 221(2):524–538, 2007.
- Miller T. y Schmidt F. Use of a pressure-weighted interpolation method for the solution of the incompressible navier-stokes equations on a nonstaggered grid system. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 14(2):213–233, 1988.
- Nordlund M., Stanic M., Kuczaj A., Frederix E., y Geurts B. Improved PISO algorithms for modeling density varying flow in conjugate fluid–porous domains. *Journal of Computational Physics*, 306:199–215, 2016.
- Oxtoby O., Heyns J., y Suliman R. A finite-volume solver for two-fluid flow in heterogeneous porous media based on OpenFOAM R G. 2013.
- Patankar S.V. y Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787–1806, 1972.
- Perot J., Vidovic D., y Wesseling P. Mimetic reconstruction of vectors. *Compatible Spatial Discretizations*, páginas 173–188, 2006.
- Rhie C. y Chow W. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21(11):1525–1532, 1983.
- Shashkov M., Swartz B., y Wendroff B. Local reconstruction of a vector field from its normal components on the faces of grid cells. *Journal of Computational Physics*, 139(2):406–409, 1998.
- Weller H. Non-orthogonal version of the arbitrary polygonal C-grid and a new diamond grid. *Geoscientific Model Development*, 7(3):779–797, 2014.
- Weller H. y Shahrokhi A. Curl-free pressure gradients over orography in a solution of the fully compressible Euler equations with implicit treatment of acoustic and gravity waves. *Monthly Weather Review*, 142(12):4439–4457, 2014.
- Zhang S., Zhao X., y Bayyuk S. Generalized formulations for the Rhie-Chow interpolation. *Journal of Computational Physics*, 258:880–914, 2014.