

CONSIDERACIÓN DE LAS DIMENSIONES DE UNA MASA ADOSADA SOBRE UNA VIGA VIBRANTE

S. Maiz^{1,2}, C. A. Rossit^{1,2}, D. V. Bambill^{1,2}, D. H. Felix¹, P. A. A. Laura¹ y S. La Malfa^{1,2}

⁽¹⁾*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina*

⁽²⁾*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras Claves: Vibraciones, vigas, masas, inercia rotatoria, masa finita

Resumen: La presencia de masas adosadas sobre elementos estructurales vibrantes es un tema de permanente estudio por su aplicación tecnológica en el diseño, por ejemplo, de estructuras resistentes que soportan motores. La masa adosada interviene en el balance dinámico del problema a través de sus propiedades inerciales.

Es habitual considerar las masas adosadas sobre estructuras como masas puntuales, tal como lo hacen los tratados y manuales que brindan información sobre dinámica de vigas y placas y también la cuasi totalidad de los trabajos científicos referidos al tema.

Es evidente que dicha aproximación es conveniente desde el punto de vista de su tratamiento físico – matemático.

Dicha hipótesis simplificativa es razonable, cuando se considera el comportamiento traslacional del sistema acoplado.

Cuando se tiene en cuenta la inercia rotacional del sistema electromecánico adosado, será necesario en muchas situaciones prescindir de la hipótesis de “puntualidad” y considerar, además de la inercia rotacional, la “finitud” del elemento adosado.

En el presente trabajo se propone un modelo analítico, para una viga Bernoulli-Euler, con condiciones de borde generales que sostiene una masa finita, estableciendo condiciones de continuidad entre los tramos que separa la masa.

Los resultados obtenidos, que verifican exactamente situaciones particulares disponibles en la literatura que derivan del modelo general planteado, fueron comparados con un modelo experimental construido al efecto.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de vigas con masas adosadas de dimensiones finitas. Se obtuvieron resultados a través de la solución analítica de la ecuación diferencial, los que fueron comparados con los obtenidos de un modelo experimental construido al efecto.

Es común en la literatura técnico-científica considerar la masa puntual, ya que representa una conveniencia desde el punto de vista físico-matemático y resulta una buena aproximación cuando las dimensiones de la masa adosada al elemento estructural son despreciables.

Dicha aproximación no brinda resultados satisfactorios cuando las dimensiones de la masa adosada juegan un importante papel en la estructura. Pasa a tener trascendental importancia la inercia rotatoria de la masa así como también la rigidización generada en el elemento estructural en la zona donde se encuentra adosada la masa.

Por un lado la inercia rotacional de la masa disminuye las frecuencias naturales de vibración del sistema, teniendo mayor influencia en las frecuencias más altas (S. Maiz et al, 2005 y P. A. A. Laura et al, 1987). Sin embargo por otro lado, la masa adosada a la estructura puede rigidizar el sistema aumentando las frecuencias.

En el enfoque analítico se supone a la masa adosada como un cuerpo rígido (H. Su and J. R. Banerjee, 2005) y se calculan las primeras cuatro frecuencias con una masa adosada a la viga. En el análisis presentado se ha considerado en el estudio analítico que el “empotramiento” relativo que la masa impone sobre la viga, se extiende a toda la superficie de contacto entre ellas en el modelo experimental, por carecerse de antecedentes sobre esta situación particular.

En el ensayo experimental se materializó una viga simplemente apoyada a la que se le adosó una masa, la cual puede ser ubicada en distintas posiciones y se obtuvieron las cuatro primeras frecuencias las cuales se compararon con el método analítico.

2 MÉTODO ANALÍTICO

Consideremos la viga de la Figura 1 con una masa m_1 adosada rígidamente, cuya inercia rotacional con respecto a un eje perpendicular al plano es J_i , adosada en la posición x_1 . Dicha viga se encuentra vinculada elásticamente tanto a rotación como a traslación en sus extremos $x = 0$ y en $x = l$.

Los símbolos k_1 y k_2 representan las constantes de rigidez traslacional mientras que k_3 y k_4 representan los coeficientes de rigidez rotacional.

A es el área de la sección transversal de la viga, I su momento de inercia centroidal; E y ρ son el módulo de Young y la densidad del material de la viga, respectivamente.

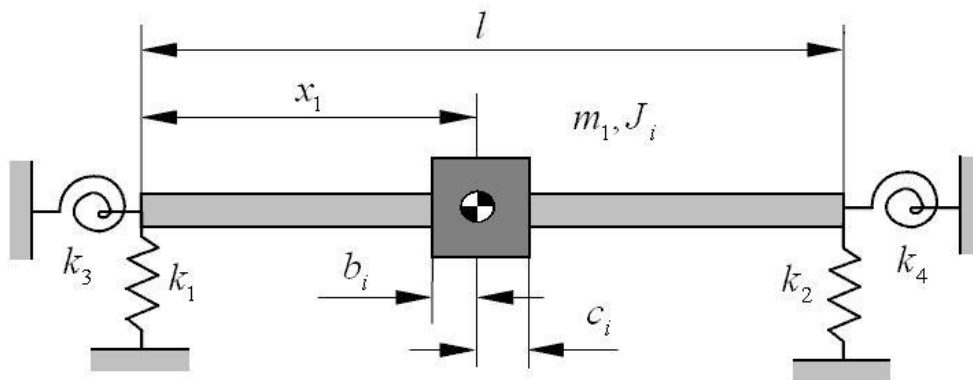


Figura 1: Viga con masa adosada de dimensiones finitas

En primer lugar introducimos la siguiente variable adimensional:

$$\eta = \frac{x}{l} \quad \text{por lo tanto} \quad \eta_1 = \frac{x_1}{l} \quad (1)$$

Cuando la viga vibra libremente, la ecuación que gobierna el movimiento una vez independizada del tiempo es:

$$\frac{d^4 V}{d\eta^4} - (\beta l)^4 V = 0 \quad (2)$$

donde $\beta^4 = \frac{A\rho}{EI} \omega^2$ y ω es la frecuencia natural circular del sistema.

La solución de la ecuación diferencial (2), aplicado a cada tramo de la viga será:

$$\begin{aligned} V_1(\eta) &= A_1 \cosh \beta l \eta + B_1 \sinh \beta l \eta + C_1 \cos \beta l \eta + D_1 \sin \beta l \eta & 0 \leq \eta \leq \eta_2 \\ V_2(\eta) &= A_2 \cosh \beta l \eta + B_2 \sinh \beta l \eta + C_2 \cos \beta l \eta + D_2 \sin \beta l \eta & \eta_3 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\eta_2 = \eta_1 - \frac{b_i}{l}$, $\eta_3 = \eta_1 + \frac{c_i}{l}$, b_i y c_i indican la posición del centroide de la masa y A_i , B_i , C_i y D_i son constantes a ser determinadas por las condiciones de borde y de continuidad.

2.1 Condiciones de borde

Como se muestra en la Figura 1, la viga se encuentra vinculada elásticamente en sus extremos, por lo tanto las condiciones de borde son:

$$\left. \frac{d^3 V_1(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=0} = -K_1 V_1(\eta) \Big|_{\eta=0} \quad (4)$$

$$\left. \frac{d^2 V_1(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = K_3 \left. \frac{dV_1(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (5)$$

$$\left. \frac{d^3 V_2(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=1} = K_2 V_2(\eta) \Big|_{\eta=1} \quad (6)$$

$$\left. \frac{d^2 V_2(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=1} = -K_4 \left. \frac{dV_2(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1} \quad (7)$$

2.2 Ecuaciones de continuidad

Las ecuaciones de continuidad en los puntos de la viga $\eta_2 = \eta_1 - \frac{b_i}{l}$ y $\eta_3 = \eta_1 + \frac{c_i}{l}$ son:

$$V_1(\eta_2) + \left(\frac{b_i + c_i}{l} \right) \frac{dV_1(\eta_2)}{d\eta} = V_2(\eta_3) \quad (8)$$

$$\frac{dV_1(\eta_2)}{d\eta} = \frac{dV_2(\eta_3)}{d\eta} \quad (9)$$

$$\frac{d^3 V_1(\eta_2)}{d\eta^3} + (\beta l)^4 \left(M_1 + \left(\frac{b_i + c_i}{l} \right) \right) \left(V_1(\eta_2) \frac{1 - b_i}{b_i + c_i} + V_2(\eta_3) \frac{b_i}{b_i + c_i} \right) - \frac{d^3 V_2(\eta_3)}{d\eta^3} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d^2 V_1(\eta_2)}{d\eta^2} - \frac{d^2 V_2(\eta_3)}{d\eta^2} + \frac{b_i}{l} \frac{d^3 V_1(\eta_2)}{d\eta^3} + \frac{c_i}{l} \frac{d^3 V_2(\eta_3)}{d\eta^3} - M_1 r_{Gi}^2 \beta^4 \frac{dV_1(\eta_1)}{d\eta} = 0 \quad (11)$$

donde:

$$K_1 = \frac{k_1 l^3}{EI}, K_2 = \frac{k_2 l^3}{EI}, K_3 = \frac{k_3 l}{EI}, K_4 = \frac{k_4 l}{EI} \quad (12)$$

$$M_1 = \frac{m_1}{\rho A l}, r_{Gi} = \frac{r_i}{l} \text{ y } r_i = \sqrt{J_i / m_1}$$

Aplicando (3) en las ecuaciones (4) a (11), se llega a un sistema de ecuaciones homogéneo en las constantes A_i , B_i , C_i y D_i :

$$\begin{bmatrix} a_{1-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1-8} \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ a_{8-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{8-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

siendo la solución no trivial la nulidad del determinante de la matriz \mathbf{A} de los coeficientes a_{ij} :

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (14)$$

cuyas raíces, autovalores del problema $(\beta_n l)$, permiten obtener los coeficientes de frecuencia del sistema: $\Omega_n = (\beta_n l)^2$ y sus frecuencias de vibración en ciclos por segundo (Hertz):

$$f_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{(\beta_n l)^2}{2\pi}$$

2.3 Casos particulares

Para las distintas condiciones de borde se adoptan distintos valores de las constantes de rigidez de los resortes:

Extremo libre: $k_r = 0$ y $k_t = 0$

Extremo simplemente apoyado: $k_r = 0$ y $k_t = \infty$

Extremo guiado: $k_r = \infty$ y $k_t = 0$

Extremo empotrado: $k_r = \infty$ y $k_t = \infty$

Donde k_r representa la constante elástica de rotación y k_t la constante de traslación en cada extremo.

3 DETERMINACIONES EXPERIMENTALES

Al efecto de materializar el sistema en estudio, se construyó un sistema de apoyos simples como el mostrado en la [Figura 2](#), cuya luz entre apoyos es de $l = 1020\text{mm}$.

La viga utilizada para el ensayo estaba constituida por un tubo estructural de sección cuadrada de 25 mm de lado y 2 mm de espesor ([Figura 3](#)) y la masa se construyó de acero en dos mitades de forma de adosarla a la viga con cuatro bulones y que su centro de gravedad se ubique sobre el eje neutro de la viga como se puede apreciar en la [Figura 4](#). La masa se diseñó de forma rectangular de modo que al girar su eje 90° con respecto al de la viga se obtengan distintos parámetros de inercia rotacional y la magnitud del tramo de viga rigidizada también varíe.

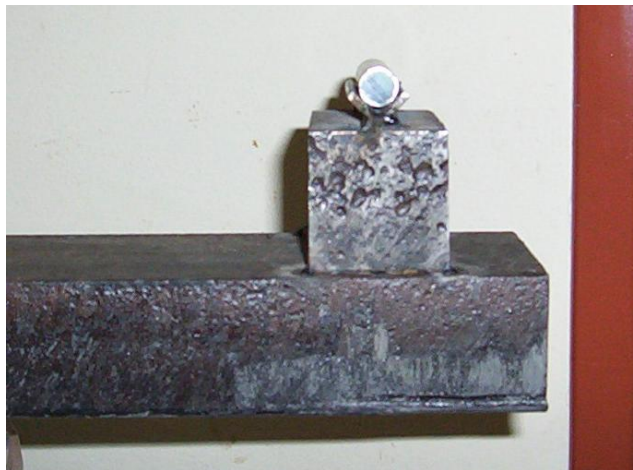


Figura 2: Sistema de apoyos simples



Figura 3: Viga en ensayo.

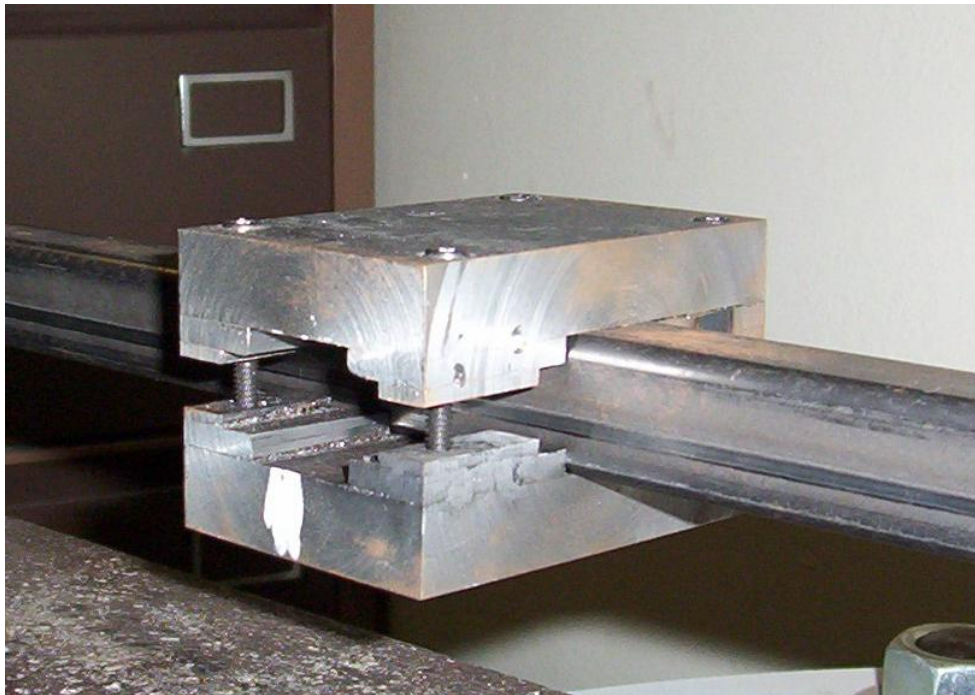


Figura 4: Masa adosada a la viga mediante cuatro bulones en la posición de menor rigidez transferida a la viga y menor inercia rotacional.

3.1 Datos

Viga:

$$l = 1020 \text{ mm.}$$

$$A = 184 \text{ mm}^2$$

$$I = 16345 \text{ mm}^4$$

$$m_v = 1.524 \text{ Kg.}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 5100000 \text{ mm/s}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\kappa = \frac{20(1+\nu)}{(48+39\nu)}$$

Donde c es la velocidad de propagación longitudinal de la onda y κ el coeficiente de corte para la sección de la viga (Karnovsky and Lebed, 2004), utilizado para vigas Timoshenko.

Masa:

$$m_1 = 1.735 \text{ Kg.}$$

$$r_1 = 50.148 \text{ mm.}$$

$$r_2 = 40.890 \text{ mm.}$$

$$b_1 = c_1 = 47.5 \text{ mm.}$$

$$b_2 = c_2 = 31.5 \text{ mm.}$$

En este caso r_1 representa el radio de giro de la masa, cuando el eje 1-1 coincide con el eje z y r_2 cuando el eje 2-2 de la masa coincide con el eje z como se indica en la Figura 5.

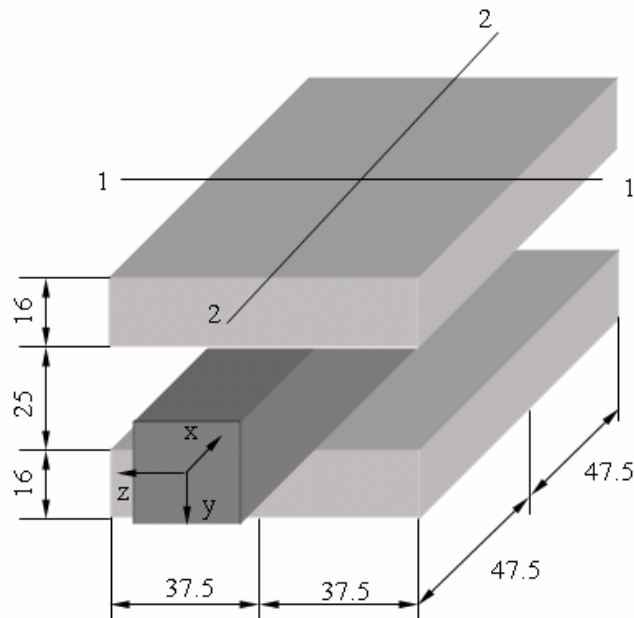


Figura 5: Detalle de la masa adosada a la viga (medidas en mm).

3.2 Medición de frecuencias

Para la medición de frecuencias se usó un transductor óptico y un acelerómetro unidireccional conectado a una tarjeta adquisidora de datos PCI 4451 de National Instruments.

Se midieron las primeras cuatro frecuencias de la viga sin masa y se compararon con la teoría de vigas de Bernoulli-Euler y Timoshenko (Karnovsky and Lebed, 2004) para verificar los datos, como se muestra en la Tabla 1.

Sin masa		f_1	f_2	f_3	f_4
Analítico	B-E	72.57	290.29	653.16	1161.17
	Timoshenko	72.51	289.22	647.75	1144.31
Experimental		71.15	286.20	640.70	

Tabla 1: frecuencias de vibración en Hertz de la viga sin masa.

Como se puede apreciar en la Tabla 1, la diferencia para las dos teorías de vigas utilizadas es muy baja, por esto, se decidió emplear la teoría de vigas Bernoulli-Euler. Para no perturbar la viga con el acelerómetro se utilizó un transductor óptico, lo que dificultó la tarea para encontrar frecuencias superiores a la tercera, ya que este mide desplazamientos.

En el caso de la viga con la masa adosada, se tuvo en cuenta la masa del acelerómetro en el valor de la misma y se obtuvieron las cuatro primeras frecuencias (Figura 6).

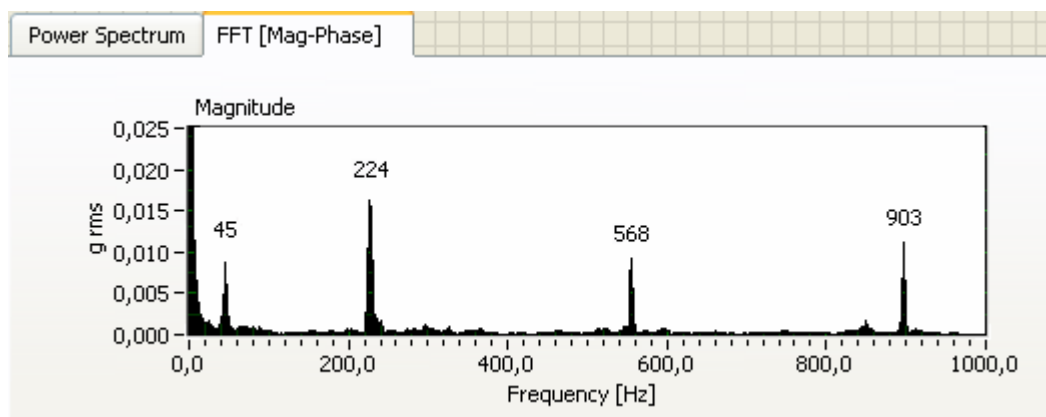


Figura 6: Espectro de frecuencias de vibración en Hertz de la viga con masa adosa en $x = 1/3$, $r = 40.90\text{mm}$.

4 RESULTADOS

En la Tabla 2 se muestran las primeras cuatro frecuencias para distintas posiciones de la masa sobre la viga y para distintas orientaciones de la misma. En el cálculo analítico se consideró primeramente la masa puntual, tomando los valores $b = c = 0$, y luego se consideró la dimensión de la masa para las dos posiciones previstas.

$m_1/m_v=1.14$	$r = 50.15mm$			$r = 40.90mm$		
	$b = c = 0$	$b = c = 47.5mm$	Exp.	$b = c = 0$	$b = c = 31.5mm$	Exp.
$x = l/2$	39.93	45.58	42.50	39.93	43.52	41.00
	260.03	264.69	248.30	269.80	271.40	249.00
	494.72	594.88	518.90	494.72	557.80	496.00
	758.87	906.17	891.00	846.96	928.17	933.00
$x = l/3$	43.38	48.81	46.00	43.41	46.91	45.00
	221.63	245.41	226.00	224.11	238.89	224.00
	503.84	546.19	555.00	547.66	565.80	568.00
	906.62	1069.74	916.00	921.12	1028.45	903.00
$x = l/4$	48.31	53.17	49.30	48.40	51.59	48.00
	200.74	232.61	203.90	201.27	220.91	195.40
	501.26	555.96	541.80	534.25	562.12	526.30
	790.80	925.26	910.20	857.31	937.46	950.00

Tabla 2: frecuencias de vibración en Hertz de la viga con masa adosada.

4.1 Otras configuraciones

Se realizaron los cálculos para dos configuraciones de vigas comúnmente encontrados en la literatura:

Viga biempotrada: Se calcularon los cuatro primeros coeficientes de frecuencias de vibración de una viga biempotrada para distintas dimensiones de masas en tres posiciones sobre la viga. En la Tabla 3 se obtuvieron resultados para una relación de $r/l=0.05$ y en la tabla 4 para $r/l=0.04$.

$m_1/m_v=1$	$r/l=0.05$			
	$b/l = c/l = 0$	$b/l = c/l = 0.02$	$b/l = c/l = 0.04$	$b/l = c/l = 0.05$
$x = l/2$	11,82	12,45	13,16	13,54
	52,02	52,69	53,64	54,24
	95,76	103,47	112,22	117,04
	126,73	139,19	151,98	158,69
$x = l/3$	13,47	13,98	14,50	14,78
	45,15	47,49	50,28	51,89
	86,83	91,28	96,07	98,72
	151,36	162,83	175,01	181,43
$x = l/4$	15,89	16,16	16,42	16,55
	41,40	44,25	47,45	49,18
	86,49	92,33	99,33	103,44
	128,11	138,72	149,99	156,08

Tabla 3: coeficientes Ω de frecuencias de vibración de la viga biempotrada con masa adosada.

$m_1/m_v=1$	$r/l=0.04$			
	$b/l = c/l = 0$	$b/l = c/l = 0.02$	$b/l = c/l = 0.04$	$b/l = c/l = 0.05$
$x=l/2$	11,82	12,45	13,16	13,54
	55,31	55,71	56,40	56,89
	95,76	103,47	112,22	117,04
	141,75	152,88	164,22	170,25
$x=l/3$	13,50	14,01	14,54	14,81
	45,85	48,16	50,92	52,50
	96,73	99,90	103,65	105,88
	156,42	167,99	180,14	186,52
$x=l/4$	15,97	16,24	16,51	16,64
	41,47	44,29	47,47	49,19
	93,43	98,16	104,18	107,82
	140,56	151,11	162,03	167,98

Tabla 4: coeficientes Ω de frecuencias de vibración de la viga biempotrada con masa adosada.

Viga en voladizo: Para este caso se tomo el extremo $x = 0$ empotrado y el extremo $x = l$ libre. En las tablas 5 y 6 se muestran los primeros cuatro coeficientes de frecuencias Ω para distintas dimensiones de la masa y distintas posiciones de la misma sobre la viga.

$m_1/m_v=1$	$r/l=0.05$			
	$b/l = c/l = 0$	$b/l = c/l = 0.02$	$b/l = c/l = 0.04$	$b/l = c/l = 0.05$
$x=l-c$	1,55	1,59	1,63	1,65
	15,43	16,00	16,62	16,94
	43,26	45,34	47,72	49,06
	78,01	84,65	91,93	95,87
$x=2l/3$	2,36	2,36	2,36	2,36
	18,16	19,06	19,99	20,48
	48,62	51,90	55,85	58,12
	88,84	93,39	98,41	101,24
$x=l/2$	2,88	2,89	2,90	2,91
	14,18	15,18	16,31	16,93
	52,55	53,22	54,15	54,76
	95,28	102,95	111,64	116,42

Tabla 5: coeficientes Ω de frecuencias de vibración de la viga en voladizo con masa adosada.

$m_1/m_v=1$	$r/l=0.04$			
	$b/l = c/l = 0$	$b/l = c/l = 0.02$	$b/l = c/l = 0.04$	$b/l = c/l = 0.05$
$x=l-c$	1,56	1,59	1,63	1,65
	15,72	16,32	16,95	17,28
	45,93	47,90	50,18	51,45
	84,49	90,64	97,45	101,18
$x=2l/3$	2,36	2,36	2,36	2,36
	18,44	19,37	20,32	20,82
	48,88	52,11	56,00	58,24
	98,37	101,60	105,54	107,92
$x=l/2$	2,88	2,90	2,91	2,92
	14,19	15,20	16,33	16,95
	55,67	56,06	56,74	57,24
	95,28	102,95	111,64	116,42

Tabla 6: coeficientes Ω de frecuencias de vibración de la viga en voladizo con masa adosada.

5 CONCLUSIONES

En el modelo resuelto como se expresara previamente, la masa ejerce dos efectos contrapuestos.

Por un lado, su inercia, tanto traslatoria como rotacional, producen disminuciones en el valor de las frecuencias naturales.

Por otro lado la hipótesis de considerar rígido al tramo de viga en contacto con la masa (finitud de la masa), eleva las frecuencias naturales.

En general, descontado el efecto de la inercia traslatoria que ha sido largamente estudiado en la literatura, puede notarse que la incidencia de la rigidización de la viga es mayor que la de la inercia rotatoria de la masa. Esta tendencia se invierte solo cuando la masa está ubicada en cercanías de nodos del modo de vibración, donde la rotación de la viga es alta y su curvatura es baja.

Es por ello que cuando las dimensiones de la masa aconsejan tener en cuenta su inercia rotatoria, debe considerarse también el efecto de rigidización sobre el elemento estructural al que se encuentra adosada.

En estudios futuros, será tema de interés determinar si al igual que sucede con la materialización de empotramientos rígidos como vínculos externos en este caso, dicha materialización se produce para una posición distinta de la que físicamente corresponde a los límites de la masa adosada.

En ese sentido, se menciona el concepto de “radio efectivo” en el estudio experimental de vibración de placas circulares (C. A. Rossit et al, 2005 y D. V. Bambill et al, 2004)

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al Sr. Osvaldo Álvarez, Técnico Principal de la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), por su valiosa colaboración en la preparación del modelo experimental.

También agradecen al Dr. Mariano Febbo por su colaboración y asesoramiento en las mediciones de frecuencias.

El presente estudio ha sido financiado por el CONICET y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- D. V. Bambill, S. La Malfa, C. A. Rossit and P. A. A. Laura, Analytical and experimental investigation on transverse vibration of solid circular and annular plates carrying a concentrated mass at an arbitrary position with marine application. *Ocean Engineering*, 31, 127-138, (2004)
- I. A. Karnovsky and O. I. Lebed. *Non-classical vibrations of arches and beams*, ISBN 0-07-143188-8, McGraw-Hill, New York, 2004.
- P. A. A. Laura, C. P. Filipich and V. H. Cortinez, Vibrations of beams and plates carrying concentrated masses, *Journal of Sound and Vibrations*, **117**, pp. 459-465, (1987)
- S. Maiz, D. V. Bambill, C. A. Rossit, Transverse vibrations of Bernolli-Euler beams carrying point masses and taking into account their rotatory inertia: exact solution, *Journal Of Sound and Vibration*, aceptado para publicación.
- C. A. Rossit, D. V. Bambill, S. La Malfa, S. Maiz y P. A. A. Laura. Estudios analíticos y experimentales sobre vibraciones de placas circulares delgadas con una masa adosada, VIII Congreso Argentino de Mecánica Computacional MECOM 2005, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV, 3255-3265, 2005

H. Su and J. R. Banerjee, Exact natural frequencies of structures consisting of two part beam-mass systems. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 19, N°5: 551-556, 2005.