

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE FLUJOS TURBULENTOS USANDO UNA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS NO-RESIDUAL

NUMERICAL APROXIMATION OF TURBULENT FLUID FLOWS USING A NON-RESIDUAL FINITE ELEMENT FORMULATION

Amaru. González, Ernesto F. Castillo y Marcela A. Cruchaga

*Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile, Av. Bdo. O'Higgins 3363,
Santiago, Chile, amaru.gonzalez@usach.cl, <http://www.usach.cl>*

Palabras clave: elementos finitos, turbulencia, cascada de energía, cuerpo de Ahmed.

Resumen. En el presente trabajo se verifica numéricamente un nuevo método estabilizado de elementos finitos del tipo multiescalas variacionales (VMS) no-residual y dinámico. El trabajo incluye el análisis de convergencia del método en soluciones prefabricadas, utilizando elementos lineales, verificando la tasa de convergencia de los campos de velocidad y presión. Adicionalmente, se resuelven dos problemas tipo, la cavidad cúbica accionada por la tapa y el estudio de la dinámica del flujo turbulento en el cuerpo de Ahmed. En el problema de la cavidad cúbica accionada por la tapa, se determina el inicio de la bifurcación de Hopf, además de describir la dinámica del problema para un número de $Re=12.000$, determinando los espectros (puntuales) de presión y velocidad. En el problema del cuerpo de Ahmed, se resuelve el caso $Re=788.000$ para diferentes ángulos de inclinación, comprobando los resultados obtenidos con valores de referencia.

Keywords: finite elements, turbulent, energy wave, Ahmed's body.

Abstract. In the present work, a new non-residual dynamic variational multiscales (VMS) stabilized finite elements method is verified numerically. This work includes the convergence analysis of the method in prefabricated solutions, using linear elements, verifying the convergence rate of the velocity and pressure fields. Additionally, two types problems are solved, the cubic 3D lid-driven cavity and the turbulent study of the flow dynamics in Ahmed's body. In the problem of the cubic 3D lid-driven cavity, the beginning of the Hopf bifurcation is determined, describing the dynamics of the problem for a number of $Re = 12.000$, determining the spectrum (punctual) of pressure and velocity. The Ahmed's body problem is solved for $Re = 788.000$ using different slant angles, checking the results obtained with reference values.

1. INTRODUCCIÓN

Los flujos turbulentos son fenómenos que se pueden encontrar en un sin número de aplicaciones o situaciones, y se caracterizan principalmente por su comportamiento inestable, su alta vorticidad y tridimensionalidad, como por ejemplo, la turbulencia que afecta a un avión, la caída de una cascada o el humo de una chimenea (Stephen B. Pope, 2000). Además, el movimiento turbulento está asociado a escalas propias de este comportamiento, las que pueden clasificarse como grandes y pequeñas escalas. Las grandes escalas son determinadas por las condiciones de borde (geometría), las cuales son la característica distintiva del problema analizado y se pueden considerar como invíscidas por su alta inercia. Por el contrario, las pequeñas escalas se clasifican como isotrópicas y son responsables de la disipación de la energía cinética de la turbulencia. Estas interacciones entre grandes y pequeñas escalas dan lugar al concepto de cascada de energía, que consiste en la existencia de una producción de energía (grandes escalas) que se transfiere hasta su disipación (pequeñas escalas). Estos flujos turbulentos son un gran desafío en la mecánica de fluidos computacional, en los cuales los recursos computacionales y los modelos a elegir (Habisreutinger et al., 2007), influyen directamente en los resultados.

Una característica común en cualquier flujo turbulento es la componente convectiva dominante que define el problema. Es bien sabido en el ambiente numérico que las diferentes formulaciones no son capaces de hacer frente a este tipo de problemas y dentro de esta problemática es que nacen los métodos estabilizados. Una opción es usar discretizaciones para u y p que satisfagan la condición inf-sup que gobierna el problema de Navier-Stokes y la otra, nuevamente es usar formulaciones estabilizadas.

Por lo tanto, es posible plantear esta problemática como una formulación de multiescalas variacionales (VMS) (Castillo y Codina, 2014; Codina et al., 2017). La idea principal de cualquier método VMS, es realizar la separación de las incógnitas del problema continuo. Una parte pertenece al espacio de elementos finitos (Galerkin), y la otra parte que no puede ser captada por esta primera aproximación, se le llama sub-escala o subgrid scale (Colomé et al., 2015). De modo, que la componente total puede ser formulada como $u = u_h + \tilde{u}$, siendo u_h la componente de elementos finitos, y \tilde{u} la sub-escala. En esencia, el aspecto principal de cualquier formulación de VMS consiste en aproximar la componente de la sub-escala en términos de la componente de elementos finitos. Por último, después de algunas manipulaciones matemáticas, el problema final se puede escribir como el problema original de Galerkin más algunos términos adicionales (términos de estabilización), que están diseñados para garantizar la estabilidad del método sin alterar la precisión y manteniendo el número de grados de libertad. Los métodos de elementos finitos VMS, han demostrado ser capaces de resolver problemas turbulentos de una manera precisa y dando la posibilidad de representar las diferentes escalas del problema sin adicionar un modelo de turbulencia extra, unificando el análisis laminar y turbulento con una única formulación (Gravemeier et al., 2010; Bazilevs et al., 2007).

En este trabajo se utiliza una formulación estabilizada de elementos finitos no-residual en dos problemas de referencia: la cavidad cúbica accionada por la tapa y el cuerpo de Ahmed. Estudios iniciales sobre la cavidad cúbica accionada por la tapa (Shetty et al., 2010; Patel et al., 2014) muestran la dificultad para obtener resultados para Reynolds altos. Un enfoque inicial es modelar una cavidad bidimensional accionada por la tapa (Aguirre et al., 2018), pero en flujos turbulentos es importante ver las escalas pequeñas en toda la superficie cúbica (tridimensionalidad). Por ende, en este trabajo se mostrarán los resultados para un $Re=12.000$, en la cual se describirán las variaciones temporales de la velocidad y las cascadas energéticas para un paso de tiempo (Deshpande y Milton, 1998). Para el caso del cuerpo de Ahmed, se presentan los resul-

tados para un $Re=788.000$ ocupando el mismo enfoque numérico mencionado anteriormente, pero agregando una comparación con otros autores (Guilmineau et al., 2018; Serre et al., 2013) para verificar los coeficientes de arrastre con distintos números de elementos.

Este trabajo está compuesto por 5 secciones. La sección 2 corresponde al planteamiento del problema, en la sección 3 se presenta la formulación estabilizada de elementos finitos, para luego plantear el nuevo método de este trabajo. Finalmente, la sección 4 y 5 corresponden a la presentación de resultados y conclusiones, respectivamente.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. Ecuaciones Gobernantes

Si definimos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d = 2$ o 3 , como el espacio computacional ocupado por el fluido durante un intervalo de tiempo $(0, T)$, asumiendo que $\partial\Omega$ define su contorno. Las ecuaciones para un fluido incompresible, Newtoniano e isotérmico pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega, t \in (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ in } \Omega, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (1)$$

donde \mathbf{u} representa el campo de velocidad, ρ la densidad del fluido, la cual se considera constante en este trabajo, p es la presión y \mathbf{f} es el término fuerza. La ecuación (1) tiene solución bajo la definición de condiciones iniciales y de borde, las cuales pueden variar dependiendo del problema analizado. Por simplicidad en la explicación del método, se tomará $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega, \forall t \in (0, T)$.

2.2. Formulación Variacional

La forma variacional del problema consiste en encontrar \mathbf{u} y p en \mathcal{X} , definido por los espacios de la velocidad y presión que se definen como $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)^d$ y $\mathcal{Q} = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Ahora, si se denota $\mathcal{X} := \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$, la forma débil de la ecuación (1) consiste en encontrar $U = [\mathbf{u}, p] : (0, T) \rightarrow \mathcal{X}$ tal que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + B(\mathbf{u}; U, \mathbf{V}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad (2)$$

para todo $\mathbf{V} = [\mathbf{v}, q] \in \mathcal{X}$, y satisfaciendo la condición inicial en su forma débil, y con

$$B(\mathbf{a}; U, \mathbf{V}) := \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (3)$$

donde \mathbf{f} se ha asumido que pertenece a $(H^{-1}(\Omega))^d$ para cada $t \in (0, T)$.

2.3. Formulación de Galerkin

La contraparte discreta de (2) es representada en (4), la cual define el problema de Galerkin que consiste en encontrar $U_h = [\mathbf{u}_h, p_h] : (0, T) \rightarrow \mathcal{X}_h$, tal que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_h \right) + B(\mathbf{u}_h; U_h, \mathbf{V}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad (4)$$

para todo $\mathbf{V}_h = [\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathcal{X}_h$, en donde la condición inicial en su forma débil debe ser satisfecha. Es sabido que la ecuación (4) sufre de diferentes tipos de inestabilidades numéricas. Por

una parte, si el término convectivo de la ecuación de momento domina las viscosas, oscilaciones numéricas pueden aparecer. Por otra parte, el espacio velocidad-presión necesita satisfacer una condición inf-sup para asegurar que el problema este bien definido. Estas dificultades se superan mediante el uso de un método de elementos finitos estabilizados, como el usado en este trabajo.

El término que involucra la derivada del tiempo se discretiza usando un esquema de diferencias finitas hacia atrás de segundo orden, basado en:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} = \frac{3\mathbf{u}_h^{j+1} - 4\mathbf{u}_h^j + \mathbf{u}_h^{j-1}}{2\delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (5)$$

En ambos casos, δt corresponde al tamaño de una partición uniforme de un intervalo de tiempo $(0, T)$, mientras que $\mathcal{O}(\cdot)$ representa la aproximación del orden del esquema. El superíndice indica el intervalo de tiempo en el que se está aproximando la variable, de modo que \mathbf{u}_h^j es una aproximación a \mathbf{u}_h al tiempo $t^j = j\delta t$. Es importante destacar que el método estabilizado que va a ser descrito a continuación es independiente del esquema del tiempo usado.

3. FORMULACIÓN ESTABILIZADA DE ELEMENTOS FINITOS

3.1. Método VMS Basado en Residuos

Si consideramos un problema general definido por una ecuación diferencial parcial no lineal y dependiente del tiempo, podemos definir su forma fuerte:

$$M(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad (6)$$

donde \mathbf{U} es la incógnita, $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \cdot)$ corresponde al operador diferencial espacial, $M(\mathbf{U})$ es la matriz de masa y \mathbf{F} es un campo de fuerza.

Entonces, la segunda parte consiste en dividir U en dos partes, la primera parte corresponde a la discretización de elementos finitos U_h y la de la sub-escala \tilde{U} . El concepto de la sub-escala establece que:

$$\left(M(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \mathbf{V}_h \right) + \langle \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{V}_h \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{V}_h \rangle \quad \forall \mathbf{V}_h \in X_h, \quad (7)$$

$$\left(M(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{V}} \right) + \langle \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \tilde{\mathbf{V}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \quad \forall \tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{X}, \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8), son equivalentes a la ecuación (6) y su objetivo es aproximar \tilde{U} para así terminar con solamente U_h manteniendo del numero de incógnitas del problema de elementos finitos de Galerkin. En general, este método tiene una estructura basada en residuos y después de unas simplificaciones y manipulaciones matemáticas, la componente de la sub-escala puede ser escrita en términos de los elementos finitos:

$$M(\mathbf{U}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \tau^{-1}(\mathbf{U}) \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{P} \left[\mathbf{F} - M(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} - \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h) \right], \quad (9)$$

Donde $\tau^{-1}(\cdot)$ es llamado la matriz de parámetros de estabilización y \tilde{P} representa la proyección sobre el espacio de las sub-escalas. Finalmente, se puede formar el método VMS que incluye el modelo de las sub-escalas, las cuales están en función de la variable de elementos finitos. La siguiente ecuación (10) es conocida como el método VMS basado en residuos.

$$\left(M(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \mathbf{V}_h \right) + (\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_h), \mathbf{V}_h) + (\tau(\mathbf{U}) \tilde{P}(R_U), \mathcal{L}^*(\mathbf{U}, \mathbf{V}_h)) = (\mathbf{F}, \mathbf{V}_h). \quad (10)$$

3.2. Nueva Formulación: Split-OSS

En este apartado se plantean los esquemas esenciales para formular este nuevo método estabilizado. Este método viene desde la ecuación (9), dando lugar a que se eliminen todos los términos de producto interno cruzado. La siguiente ecuación muestra esto:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_h\right) + B(\mathbf{u}_h; \mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) - \sum_K (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, \tilde{p})_K - \sum_K (\hat{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{u}}_1)_K - \sum_K (\nabla q_h, \tilde{\mathbf{u}}_2)_K = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad (11)$$

para todo $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathcal{X}_h$. Ahora, si se formula $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2$ donde $\tilde{\mathbf{u}}_1$ y $\tilde{\mathbf{u}}_2$ son la soluciones de los problemas de evolución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial t} + \tau_1^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_1 &= -P_h^\perp (\hat{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h), \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial t} + \tau_1^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_2 &= -P_h^\perp (\nabla p_h), \end{aligned} \quad (12)$$

donde las sub-escalas $\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2$ está dada por la ecuación (12) y \tilde{p} por (13):

$$\tau_2^{-1} \tilde{p} = -P_h^\perp (\nabla \cdot \mathbf{u}_h). \quad (13)$$

Las expresiones usadas por los parámetros de estabilización τ_1 y τ_2 , aparecen en las ecuaciones (12,13), y son:

$$\tau_1 = \left(\frac{c_1 \nu}{\left(\frac{h_1}{k^2}\right)^2} + \frac{c_2 |\hat{\mathbf{u}}_h|}{\frac{h_2}{k}} \right)^{-1}, \tau_2 = \frac{\left(\frac{h_1}{k^2}\right)^2}{c_1 \tau_1}, \quad (14)$$

Donde h_1 y h_2 son longitudes características, la primera es calculada como la raíz cuadrada del área del elemento en $2D$ o la raíz cúbica del volumen en $3D$, y la segunda es la longitud del elemento en la dirección de la línea recta. Las constantes $c_i, i = 1, 2$, son parámetros algorítmicos en la formulación, los cuales toman el valor de $c_1 = 4$ y $c_2 = 2$, y mientras que k es el orden de la interpolación de elementos finitos. Estos valores han demostrado ser robustos en diferentes problemas y para diferentes aplicaciones. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que los valores precisos de las constantes algorítmicas pueden afectar al error para un tamaño de malla determinado, pero la tasa de convergencia no se ve afectada.

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right) + (\rho u_h \cdot \nabla u_h, v_h) + \mu (\nabla u_h, v_h) - (p_h, \nabla \cdot u_h) \\ + (\tau_1 P_h^\perp(\tilde{\mathbf{u}}_1), \rho u_h \cdot \nabla v_h) + (\tau_2 P_h^\perp(\nabla \cdot u_h), \nabla \cdot v_h) &= (f, v_h), \\ (\nabla \cdot u_h, q_h) + (\tau_2 P_h^\perp(\tilde{\mathbf{u}}_2), \nabla q_h) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

La ecuación de arriba (15) es importante, ya que se reducen los términos con respecto a la ecuación (10) y la estructura es no-residual que representa una ventaja al reducir los términos a programar.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se mostrarán los test de convergencia de elementos lineales y los resultados numéricos obtenidos con el método definido en la ecuación (15). Los primeros resultados se asocian a la cavidad cúbica accionada por la tapa, que tiene como fin mostrar los resultados para un problema turbulento $Re=12.000$. En este problema se analizará la naturaleza propia que tiene la turbulencia en este benchmark clásico, enfocándose en la física del problema y así mostrar las variaciones temporales de la velocidad para un problema dado, obteniéndose así las cascadas de energías que demuestran el traspaso de energía cinética de las grandes escalas a las pequeñas escalas. El segundo problema corresponde al flujo turbulento sobre el cuerpo de Ahmed para un $Re=788.000$. Finalmente, los casos del apartado 4.2 y 4.3 fueron realizados mediante calculo paralelo.

4.1. Test de Convergencia

En esta sección se introduce como término fuerza el valor correspondiente a un campo de velocidad-presión analítica. De esta manera se evalúa la solución obtenida numéricamente comparada con su valor analítico. Las ecuaciones de este problema son:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x^2y(x-1)^2(y-1)(2y-1), \\ u_y(x, y) &= -2xy^2(x-1)(y-1)^2(2x-1), \\ p(x, y) &= \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \end{aligned}$$

donde x y y son las componentes de la velocidad y p es la presión. A continuación se muestran los resultados obtenidos para tres números de Reynolds:

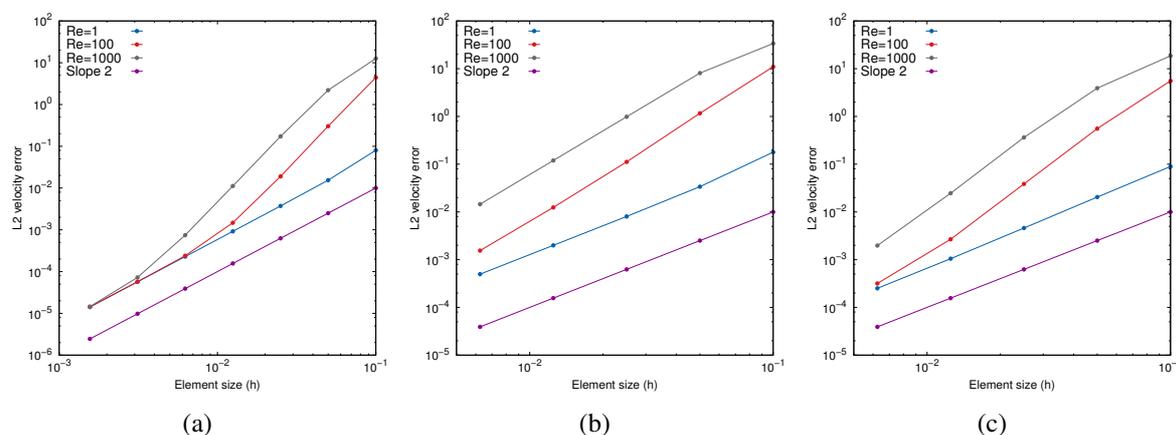


Figura 1: Resultados Test de Convergencia

La Fig. 1a) corresponde a una malla estructurada con elementos cuadriláteros, luego la Fig. 1b),c) corresponde a elementos triangulares con una malla estructurada y no-estructurada, respectivamente.

4.2. Cavidad Cúbica Accionada por la Tapa

Este problema clásico ha sido elegido por varios autores (Singh y You, 2013; Patel et al., 2014) para validar resultados, o bien para demostrar la eficiencia de nuevos códigos numéricos o formulaciones. Ya en este apartado, se demostrará la eficacia de este nuevo método estabilizado

para representar la turbulencia sin agregar un modelo. A continuación, se planteará la geometría del problema y sus condiciones de borde e iniciales.

4.2.1. Geometría y Condiciones de Flujo

La cavidad cúbica accionada por la tapa es descrita a continuación. Este cubo está centrado en el origen y es de longitud unitaria. Además, todas las paredes tienen la condición de no deslizamiento excepto la tapa superior donde se impone una condición de velocidad. Las magnitudes de las propiedades del fluido se ajustan para dar valor al número de Reynolds. En este caso se ocuparon los valores unitarios para la densidad, velocidad y longitud característica, por lo tanto queda definido por $Re = \frac{1}{\mu}$. La discretización de este problema fue realizada con una malla estructurada de 80^3 y compuesta por elementos hexáedricos, y con una concentración de elementos exponencial en cada arista Fig. 2a). La Fig. 2b) muestra la convergencia en malla para un $Re=2.000$ comparando la velocidad longitudinal con cuatro mallas estructuradas, en la cual se aprecia que no existe diferencias en la velocidad a lo largo de toda la longitud del cubo. Debido a este análisis se selecciona la malla de 80^3 .

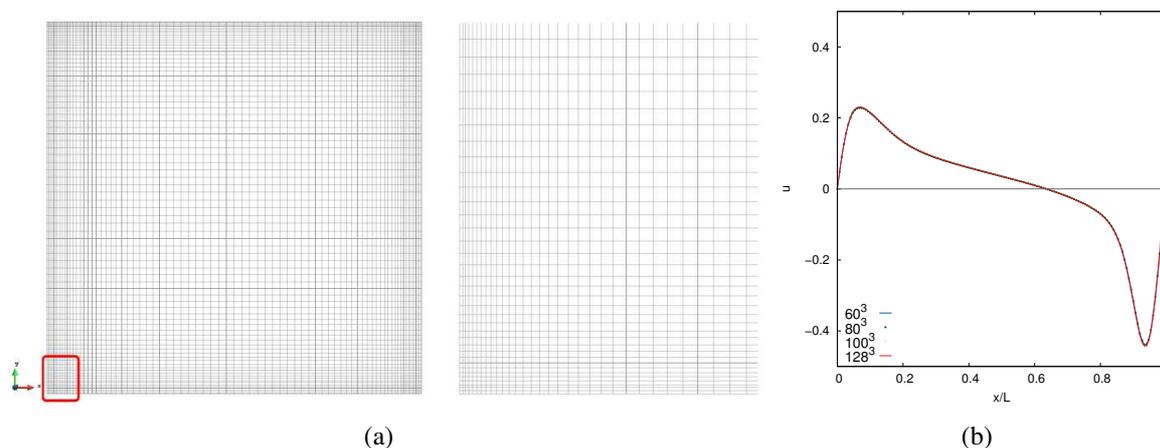


Figura 2: Mallado y Convergencia

La velocidad que se impone en la tapa superior corresponde a una condición regularizada (Lins et al., 2009), que busca evitar las discontinuidades de las condiciones de frontera de Dirichlet (de primer orden) y que establece un perfil de velocidad representado en la ecuación (16). En esta ecuación U es la máxima velocidad en la tapa superior y que toma un valor unitario. En consecuencia, la bifurcación de Hopf para esta condición establece un Reynolds crítico de $2300 \leq Re_c \leq 2350$ (Anupindi et al., 2014).

$$u(x, y, z) = U \left(1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^{18} \right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{2y}{L} \right)^{18} \right)^2 \quad (16)$$

4.2.2. Flujo Turbulento

En esta sección se mostrarán los comportamientos turbulentos que tiene este problema para un $Re=12.000$. Los resultados más abajo muestran la variación temporal de la componente u de la velocidad para un paso de tiempo $\delta t = 0,1$ y para un punto cercano al borde del cubo, esto con el fin de captar de mejor manera los torbellinos que se forman cerca de la singularidad propia de este problema, estos puntos son $(0,4, 0, 0,4)$. Tal como se aprecia en la Fig. 3a), las variaciones temporales de la velocidad u demuestran un comportamiento turbulento, en el cual no es posible

obtener un patrón o tendencia propia de la velocidad. Además, las fluctuaciones de la velocidad varían bastante con respecto al flujo medio \bar{U} . Un resultado interesante de estudiar es obtener las cascadas de energía en el espacio temporal y que demuestran los traspasos de energía cinética que son transferidos desde las grandes escalas hacia las pequeñas escalas, donde finalmente son disipados por la viscosidad del fluido.

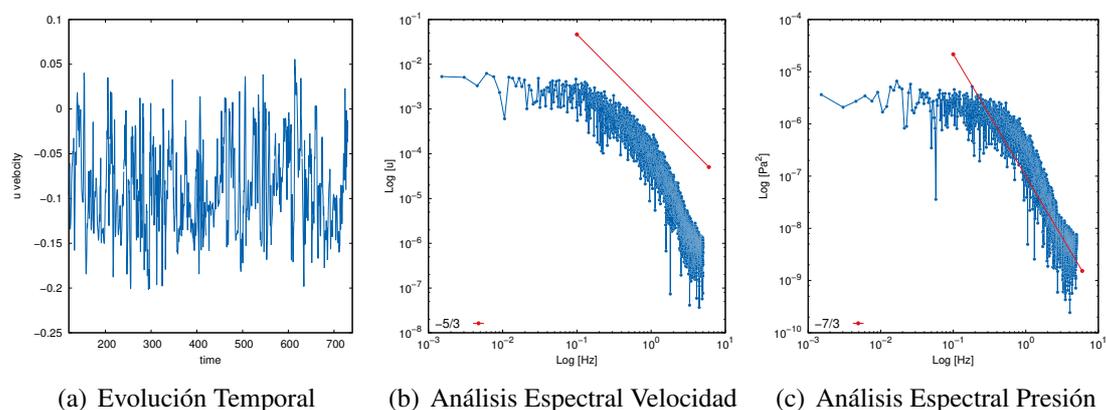


Figura 3: Resultados

Para obtener estas cascadas de energía es necesario obtener la Transformada Rápida de Fourier (FFT) de la evolución temporal de la velocidad u . En la Fig. 3b) se muestra la cascada de energía asociada a la velocidad, además se cumple con la pendiente $-5/3$ planteada por Kolmogorov, a pesar de ser registros numéricos temporales y no espaciales. Esta pendiente muestra un comportamiento universal que tiene el traspaso de energía cinética, y esta misma hipótesis de Kolmogorov se puede extrapolar al caso de la presión donde ahora la pendiente es $-7/3$, tal como se muestra en la Fig. 3c). Estas pendientes obedecen al análisis de una función de ley de potencia donde se demuestran los casos que predijo Kolmogorov y que han sido obtenidas en varios trabajos (Colomé et al., 2015; Courbebaisse et al., 2011).

4.3. Cuerpo de Ahmed

En esta sección se realiza un análisis tridimensional del cuerpo de Ahmed para dos ángulos 0° y 25° , con el fin de ver las variaciones del coeficiente de arrastre. Al ser este problema tridimensional se puede captar de forma más exacta, debido a la naturaleza propia de la turbulencia, logrando así un acercamiento a los fenómenos físicos reales, lo cual es provechoso para poder estudiar la efectividad de dispositivos aerodinámicos.

4.3.1. Geometría y Condiciones del Problema

Con respecto al dominio, se utilizaron las mismas dimensiones utilizadas por (Guilmineau et al., 2018), y replicando una condición de túnel de viento experimental con un factor de bloqueo igual a 4,28%. Las dimensiones de este dominio son un largo de $7,5 L$, un alto de $1 L$ y un ancho de $1,3 L$, siendo $L = 1044 \text{ mm}$, equivalente a la longitud inferior del cuerpo de Ahmed. Las propiedades del fluido son una densidad de $1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, una viscosidad dinámica de $0,000017894 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ y una velocidad de entrada de 40 m/s , resultado así un $\text{Re}=788.000$. Para la discretización se utilizaron tetraedros divididos por secciones con distintos tamaños de malla y un $\delta t = 0,00875$. El criterio para determinar el número de elementos fue la limitación

computacional, ya que se trabajó con un Intel Core i7-7820X CPU @ GHz 3.60 x16, 48 Gb de Ram, GPU GeForce GTX 1050, SSD 256 Gb. Con el equipo mencionado anteriormente se busca realizar una comparación de número de elementos cercano a los 20 millones de elementos (Guilmineau et al., 2018). La Fig. 4 muestra la malla utilizada y las líneas de corriente obtenidas en el cuerpo de Ahmed.

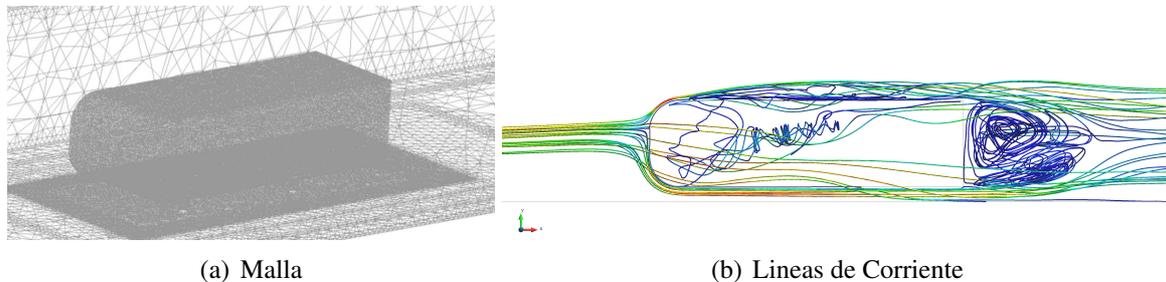


Figura 4: Malla y líneas de corriente

4.3.2. Resultados: Coeficientes de Arrastre

A continuación, en la Tabla 1, se presentan los coeficientes de arrastre para los dos ángulos, una comparación con otros trabajos y la variación de estos parámetros con respecto al método propuesto en este trabajo.

Artículo	Número de Elementos	Cd 0°	Cd 25°	Variación Split OSS
Split OSS	2.300.00	0.430	0.464	-
(Guilmineau et al., 2018) - DES	23.100.000	-	0.437	5.8 %
(Serre et al., 2013) - LES	23.100.000	-	0.431	7.1 %
Ahmed Experimental	-	-	0.298	35.7 %

Tabla 1: Comparación coeficientes de arrastre

En este caso se observa el comportamiento esperado del coeficiente de arrastre, el cual es mayor para el ángulo de inclinación de 25°. Experimentalmente, el cuerpo de Ahmed aumenta su coeficiente de arrastre en un 14 % cuando se tiene un ángulo de inclinación de 25°, respecto al ángulo de 0°, en las presentes simulaciones se obtuvo un aumento del 8 %, lo cual se aleja en un 6 % del valor esperado. Comparando el valor del coeficiente de arrastre con su valor experimental, se tiene una variación de un 35,7 %, esto quiere decir que a pesar de que se logró capturar bien el comportamiento del problema y tener un orden de magnitud cercano al de otros autores, no se logró capturar correctamente la magnitud real de la variable de interés. Sin embargo, esto es positivo ya que el modelo logró captar el aumento en la magnitud de dicha variable utilizando un número de elementos muy inferior al que se utiliza en otros trabajos académicos del mismo problema, por tanto, el método es capaz de captar correctamente el comportamiento del coeficiente de arrastre frente a variaciones en el ángulo de inclinación. Otra observación de la Tabla 1, es que el valor determinado se encuentra en un orden de magnitud cercano a las simulaciones generadas por (Guilmineau et al., 2018), dado que la variación con dichos autores es inferior a un 8 %, esto es favorable, debido a que se está usando casi la décima cantidad de elementos, lo cual implica un menor consumo de recursos computacionales. Una observación importante

es que a pesar de que en las presentes simulaciones no se utilizó un modelo de turbulencia, el método logra acercarse a las soluciones usadas en los otros dos métodos que si utilizaron modelos de turbulencia (DES y LES), esto confirma que la sub-escala de la nueva formulación Split-OSS si logra capturar el comportamiento turbulento del problema.

5. CONCLUSIONES

El método planteado en este trabajo ofrece diferentes ventajas, tales como una menor programación de los términos de estabilización, ayudando así a una optimización del código y una mayor eficiencia numérica. Dicho esto, este método fue puesto a prueba para dos problemas turbulentos; cavidad cúbica accionada por la tapa y el cuerpo de Ahmed. Para ambos casos el método Split OSS puede modelar y acercar el estudio de la turbulencia sin ocupar modelos clásicos, tales como: RANS, LES o DNS, provocando así una mayor eficiencia entre el coste computacional y resultados propios de la turbulencia. Para el problema de la cavidad cubica, la turbulencia es demostrada mediante las evoluciones temporales de una de las componentes de la velocidad. Además, las cascadas de energía demuestran la teoría detrás de este traspaso energético desde las grandes escalas a las pequeñas escalas, cumpliéndose así la pendiente $-5/3$ para la velocidad y $-7/3$ para la presión, planteadas por Kolmogorov. Por ultimo, en el cuerpo de Ahmed se demuestra como este método es capaz de acercarse a un coeficiente de arrastre cercano a otros trabajos ocupando una discretización de casi un 90 % menor.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por CONICYT pfcha/doctorado beca doctorado nacional/2018 – 21180186, FONDECYT 11160160 y FONDECYT 1170620

REFERENCIAS

- Aguirre A., Castillo E., Cruchaga M., Codina R., y Baiges J. Stationary and time-dependent numerical approximation of the lid-driven cavity problem for power-law fluid flows at high Reynolds numbers using a stabilized finite element formulation of the VMS type. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 257(March):22–43, 2018. ISSN 03770257. doi:10.1016/j.jnnfm.2018.03.014.
- Anupindi K., Lai W., y Frankel S. Characterization of oscillatory instability in lid driven cavity flows using lattice Boltzmann method. *Computers and Fluids*, 2014. ISSN 00457930. doi: 10.1016/j.compfluid.2013.12.015.
- Bazilevs Y., Calo V.M., Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Reali A., y Scovazzi G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(1-4):173–201, 2007. ISSN 00457825. doi:10.1016/j.cma.2007.07.016.
- Castillo E. y Codina R. Variational multi-scale stabilized formulations for the stationary three-field incompressible viscoelastic flow problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279(February 2018):579–605, 2014. ISSN 00457825. doi:10.1016/j.cma.2014.07.006.
- Codina R., Badia S., Baiges J., y Principe J. Variational Multiscale Methods in Computational Fluid Dynamics. *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, páginas 1–28, 2017. doi:10.1002/9781119176817.ecm2117.
- Colomé O., Badia S., Codina R., y Principe J. Assessment of variational multiscale models for the large eddy simulation of turbulent incompressible flows. *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering*, 285:32–63, 2015. ISSN 00457825. doi:10.1016/j.cma.2014.10.041.
- Courbebaisse G., Bouffanais R., Navarro L., Leriche E., y Deville M. Time-scale joint representation of DNS and LES numerical data. *Computers and Fluids*, 43(1):38–45, 2011. ISSN 00457930. doi:10.1016/j.compfluid.2010.09.004.
- Deshpande M.D. y Milton S.G. Kolmogorov scales in a driven cavity flow. *Fluid Dynamics Research*, 22(6):359–381, 1998. ISSN 01695983. doi:10.1016/S0169-5983(97)00043-9.
- Gravemeier V., Gee M.W., Kronbichler M., y Wall W.A. An algebraic variational multiscale-multigrid method for large eddy simulation of turbulent flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13-16):853–864, 2010. ISSN 00457825. doi:10.1016/j.cma.2009.05.017.
- Guilmineau E., Deng G.B., Queutey P., y Visonneau M. Assessment of hybrid LES formulations for flow simulation around the ahmed body. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multi-disciplinary Design*, 135:171–176, 2018. ISSN 16122909. doi:10.1007/978-3-319-60387-2_18.
- Habisreutinger M.A., Bouffanais R., Leriche E., y Deville M.O. A coupled approximate deconvolution and dynamic mixed scale model for large-eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 224(1):241–266, 2007. ISSN 00219991. doi:10.1016/j.jcp.2007.02.010.
- Lins E.F., Elias R.N., Guerra G.M., Rochinha F.A., y Coutinho A.L. Edge-based finite element implementation of the residual-based variational multiscale method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 61(9):1–22, 2009. ISSN 09727302. doi:10.1002/flid.
- Patel D.K., Das M.K., y Roy S. LES of turbulent flow in a cubical cavity with two parallel lids moving in opposite direction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 72:37–49, 2014. ISSN 00179310. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.12.062.
- Serre E., Minguez M., Pasquetti R., Guilmineau E., Deng G.B., Kornhaas M., Schäfer M., Fröhlich J., Hinterberger C., y Rodi W. On simulating the turbulent flow around the Ahmed body: A French-German collaborative evaluation of LES and DES. *Computers and Fluids*, 78:10–23, 2013. ISSN 00457930. doi:10.1016/j.compfluid.2011.05.017.
- Shetty D.A., Fisher T.C., Chunekar A.R., y Frankel S.H. High-order incompressible large-eddy simulation of fully inhomogeneous turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 229(23):8802–8822, 2010. ISSN 00219991. doi:10.1016/j.jcp.2010.08.011.
- Singh S. y You D. A dynamic global-coefficient mixed subgrid-scale model for large-eddy simulation of turbulent flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 42:94–104, 2013. ISSN 0142727X. doi:10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.02.008.
- Stephen B. Pope. *Turbulent Flows*. 2000. ISSN 13053515. doi:10.1088/0957-0233/12/11/705.