

ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO ELASTOPLÁSTICA CON ELEMENTOS FINITOS Y CINEMÁTICA DE GRANDES DEFORMACIONES

Claudio A. Careglio^a, Anibal E. Mirasso^{a,c} y Carlos G. García Garino^{a,b}

^aLAPIC, Instituto Tecnológico, Universitario Universidad Nacional de Cuyo. Casilla de Correo 947,
5500 Mendoza, Argentina

^bCONICET: Miembro carrera de Investigador Científico

^cFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

ccareglio@uncu.edu.ar, aemirasso@uncu.edu.ar, cgarcia@itu.uncu.edu.ar

Palabras Clave: Estabilidad elastoplástica, cinemática de grandes deformaciones, sensibilidad a imperfecciones.

Resumen La extensión de un código de elementos finitos con grandes deformaciones de 2D al caso 3D ha sido presentada por los autores en (Careglio et al., 2005) y discutido el comportamiento de elementos Hexa de 8 nodos, en problemas de plasticidad J2. Se trata de una formulación constitutiva basada en hiperelasticidad y cinemática multiplicativa del tensor gradiente de deformación.

En este trabajo se presenta el comportamiento de dicho código en problemas de estabilidad del equilibrio para componentes estructurales con materiales elásticos lineales y elastoplásticos. Se aborda el problema de estabilidad como un análisis no lineal de estructuras con imperfecciones que se las relaciona con estados críticos de estructuras perfectas. Se comparan los resultados obtenidos para cargas de inestabilidad de columnas elastoplásticas con los resultados analíticos disponibles en la bibliografía. Se presentan trayectorias de equilibrio para estados alejados de los puntos críticos de estabilidad del equilibrio de las estructuras sin imperfecciones y se obtienen curvas de sensibilidad a las imperfecciones.

1 INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de pérdida de estabilidad en estructuras elásticas han sido ampliamente tratados en la literatura. En muchas situaciones, cuando la esbeltez es reducida comienza a tener importancia el comportamiento constitutivo del material en la capacidad portante de los sistemas estructurales, viéndose afectada la estabilidad del sistema estructural por la tensión de fluencia del material.

Los problemas de estabilidad elastoplásticos son de interés en ingeniería desde hace tiempo, y son de destacar los desarrollos realizados por diversos autores como Engesser, Kármán, Shanley para columnas metálicas desde el punto de vista experimental y analítico como está señalado en Bleich (1952). En general el enfoque fue en principio la solución de las ecuaciones de equilibrio para casos especiales como el de columnas con secciones transversales bien definidas como la rectangular.

El análisis de la estabilidad puede abordarse mediante la búsqueda de condiciones de pérdida de unicidad de la solución o bien mediante el análisis no lineal de estructuras con algún tipo de imperfección. El primero de los enfoques es el abordado entre otros por Koiter (1967); Thompson y Hunt (1973); Flores y Godoy(1992) para estructuras elásticas; y por Hill(1958), y Bazant y Cedolin (1991) para estructuras con comportamiento elastoplástico.

En base a trabajos previos (García Garino, 1993; García Garino y Oliver, 1995, 1996), la formulación constitutiva basada en hiperelasticidad y cinemática multiplicativa del tensor gradiente de deformación fue implementada para el caso 3D y presentada por Careglio et al. (2005), donde se discute el comportamiento de elementos Hexa de 8 nodos, en problemas de plasticidad J2. Las tensiones se calculan a partir del potencial hiperelástico y la implementación numérica se basa en un esquema predictor elástico, corrector plástico. Se han implementado elementos relativamente simples como resultan el hexaedro lineal (H1) y el bien conocido hexaedro lineal con presión constante (H1/P0), elemento mixto que resulta una extensión al caso 3D del elemento mixto Q1/P0.

En este trabajo se presenta el comportamiento de dicho código en problemas de estabilidad del equilibrio para componentes estructurales con materiales elásticos lineales y elastoplásticos. Se aborda el problema de estabilidad como un análisis no lineal de estructuras con imperfecciones que se las relaciona con estados críticos de estructuras perfectas.

Se comparan los resultados obtenidos para cargas de inestabilidad de columnas elastoplásticas con los resultados analíticos disponibles en la bibliografía y se obtienen curvas de sensibilidad a las imperfecciones.

2 FORMULACIÓN

El modelo implementado fue propuesto por García Garino (1993) y está ampliamente detallado en García Garino y Oliver (1995, 1996). Consiste en un modelo basado en la cinemática multiplicativa del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} en sus componentes elásticas \mathbf{F}^e y plásticas \mathbf{F}^p . Se asume una descomposición aditiva para el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} , en sus componentes elásticas \mathbf{d}^e y plásticas \mathbf{d}^p .

Las tensiones se derivan de un potencial hiperelástico y los efectos de plasticidad se tienen en cuenta mediante la teoría de variables internas. De esta manera el modelo es consistente con la termodinámica de los sólidos irreversibles Malvern (1969).

La implementación del modelo se ha realizado en la configuración deformada. Se utilizan las componentes elásticas y plásticas del tensor de Almansi. La primera se calcula como $\mathbf{e}^e = (1/2)(\mathbf{g} - \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1})$, siendo \mathbf{g} el tensor métrico espacial.

Cuando las deformaciones elásticas son pequeñas, como es el caso de metales, la

componente elástica de la energía libre se puede escribir como una forma cuadrática del tensor elástico de Almansi y de las llamadas constantes de Lamé del material.

La plasticidad se tiene en cuenta mediante una regla de flujo asociada con función de fluencia de tipo Von Mises o J_2 , y con endurecimiento isótropo lineal, en función de la deformación plástica efectiva.

La integración de la ecuación de constitutiva se realiza mediante un esquema predictor elástico y corrector plástico. En el predictor elástico las variables internas plásticas permanecen fijas, y resulta en un algoritmo explícito evitando la integración numérica en el tiempo del predictor. En el corrector plástico permanece fija la configuración deformada y se actualizan las variables internas para satisfacer la ecuación constitutiva.

El modelo desarrollado e implementado en 2D por Garcia Garino (1993) se extendió al caso 3D por Careglio et al. (2005) y se lo validó con ejemplos típicos de grandes deformaciones plásticas.

Las ecuaciones no lineales de equilibrio resultantes se resuelven mediante un esquema incremental iterativo de tipo Newton Raphson.

3 EJEMPLOS

Con el propósito de analizar el comportamiento del elemento finito H1/P0 y la formulación presentados por Careglio et al. (2005) previamente, se analizan las condiciones de equilibrio de dos columnas con material elastoplástico de tipo J_2 , con distintas imperfecciones, y se obtienen las configuraciones de equilibrio para grandes desplazamientos y rotaciones. En los casos de comportamiento elástico se utiliza el elemento H1 estándar (Zienkiewicz y Taylor, 1991) y cuando el comportamiento es elastoplástico se utiliza el elemento H1/P0 (Zienkiewicz y Taylor, 1991).

3.1 Columna de Euler Elastoplástica

Se ha analizado una columna empotrada en un extremo y libre en el otro, de longitud L , con carga axial P de compresión aplicada en el extremo libre, con imperfecciones dadas por la excentricidad e respecto del eje baricéntrico de la sección. La estructura perfecta presenta una trayectoria fundamental lineal y un estado de equilibrio crítico asociado a una bifurcación simétrica estable; y en su versión imperfecta, un comportamiento no lineal con significativa pérdida de rigidez en la vecindad del estado de equilibrio crítico. Estos casos han sido ampliamente estudiados por diversos autores (Koiter, 1967; Thompson y Hunt, 1973; Flores y Godoy, 1992) con énfasis en la vecindad del estado crítico de la estructura perfecta.

La carga crítica de bifurcación de la estructura perfecta es (Timoshenko, 1982):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2} \quad (1)$$

Se ha adoptado un material con $E=21000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu=0.3$, $\sigma_y=25,31 \text{ kg/mm}^2$, de comportamiento elastoplástico con endurecimiento isotrópico $H=100 \text{ kg/mm}^2$. La sección transversal se ha adoptado de forma rectangular de $10 \times 20 \text{ mm}^2$, y radio de giro $r=2,887 \text{ mm}$. Se han realizado diferentes análisis no lineales para distintas longitudes L , con lo que las esbelteces $\lambda=L/r$ son tales que van desde el rango elástico al elastoplástico en la llamada Hipérbola de Euler (Bleich, 1952; Timoshenko, 1982). Se han adoptado excentricidades de carga $e=1,667 \text{ mm}$, $3,333 \text{ mm}$ y 5 mm , teniendo así relaciones $e/r=0,577$, $1,154$ y $1,732$.

En la Figura 1 se presentan las trayectorias de equilibrio, representadas por la evolución de los valores de carga aplicada P (kg) en función del desplazamiento lateral del extremo de

la ménsula u_y (mm), para los casos en que la columna tiene longitudes $L=200$ mm, 250mm y 300mm, con diferentes imperfecciones; que corresponden a esbelteces en el rango elástico de la Hipérbola de Euler (Bleich, 1952; Timoshenko, 1982). La carga crítica de bifurcación (1) para estos casos resultan $P_{cr}=215,9$ kg , 138,2kg y 95,97kg respectivamente.

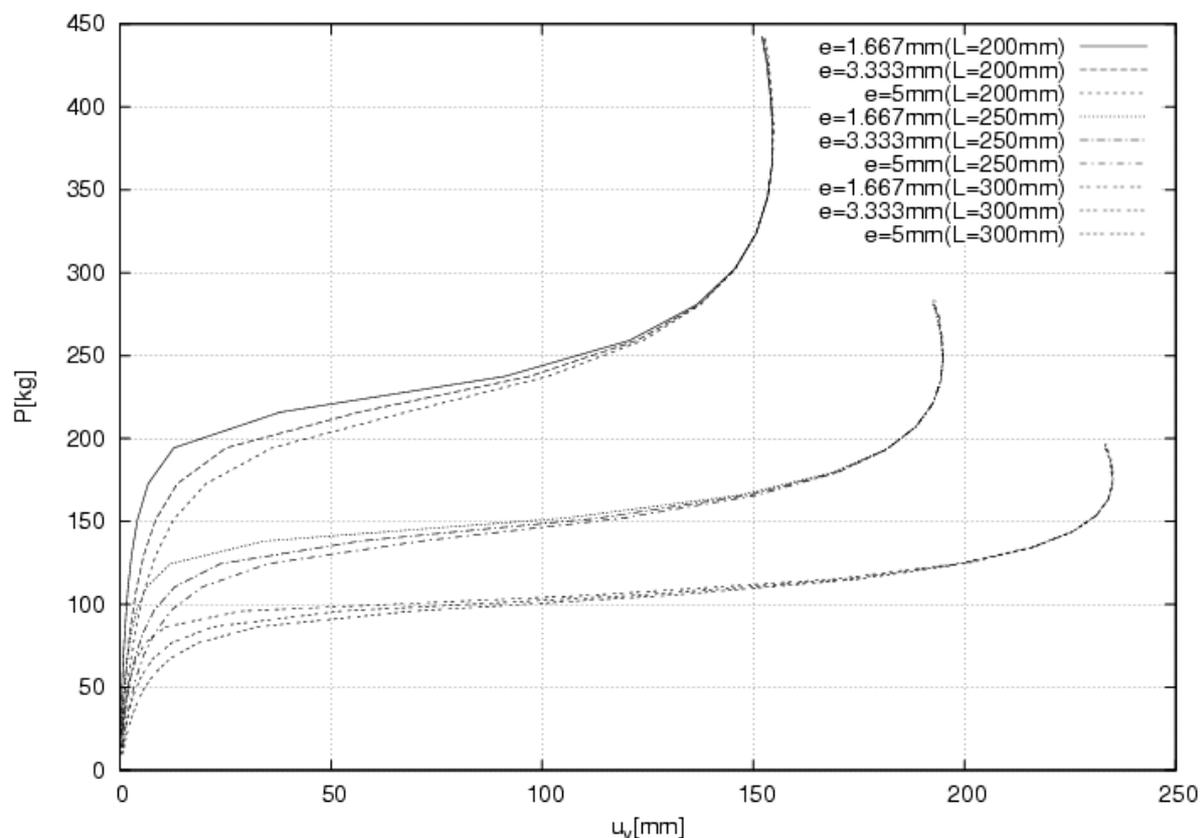


Figura 1: Columna elástica: Trayectorias de equilibrio no lineales.

En la Figura 1, se observa que se ha logrado alcanzar niveles importantes de desplazamientos laterales que van más allá de la vecindad del estado de equilibrio crítico de la estructura perfecta. Se observa que a esbeltez constante, las estructuras imperfectas se comportan en forma similar, alcanzando los valores de P_{cr} de las estructuras perfectas asociadas sólo con grandes desplazamientos laterales, típico de los fenómenos de bifurcaciones simétricos estables (Koiter, 1967; Thompson y Hunt, 1973). En las vecindades de las correspondientes cargas de bifurcación de las estructuras perfectas, es posible observar la disminución de la capacidad de carga debido a la significativa pérdida de la rigidez de la estructura. Con la formulación implementada, se ha logrado avanzar en configuraciones de equilibrio lejanas al estado de equilibrio crítico, observándose que los valores de desplazamiento lateral comienzan a disminuir, aún aumentando la carga.

En la Figura 2 se presenta en forma aislada la trayectoria de equilibrio no lineal para una esbeltez con una imperfección de 1.667mm, cuyo valor de carga crítica o carga de Euler es de 95,97 kg. Se pueden destacar distintos estados de equilibrio típicos a lo largo de la trayectoria, y la secuencia de configuraciones para los distintos niveles de carga se presenta en las Figuras 3 y 4. El estado de equilibrio indicado con la A, cercano al punto de bifurcación de la estructura perfecta, es en el cual comienza a manifestarse un cambio significativo en la rigidez global de la estructura. La configuración de equilibrio para dicho estado se presenta en

la Figura 3.

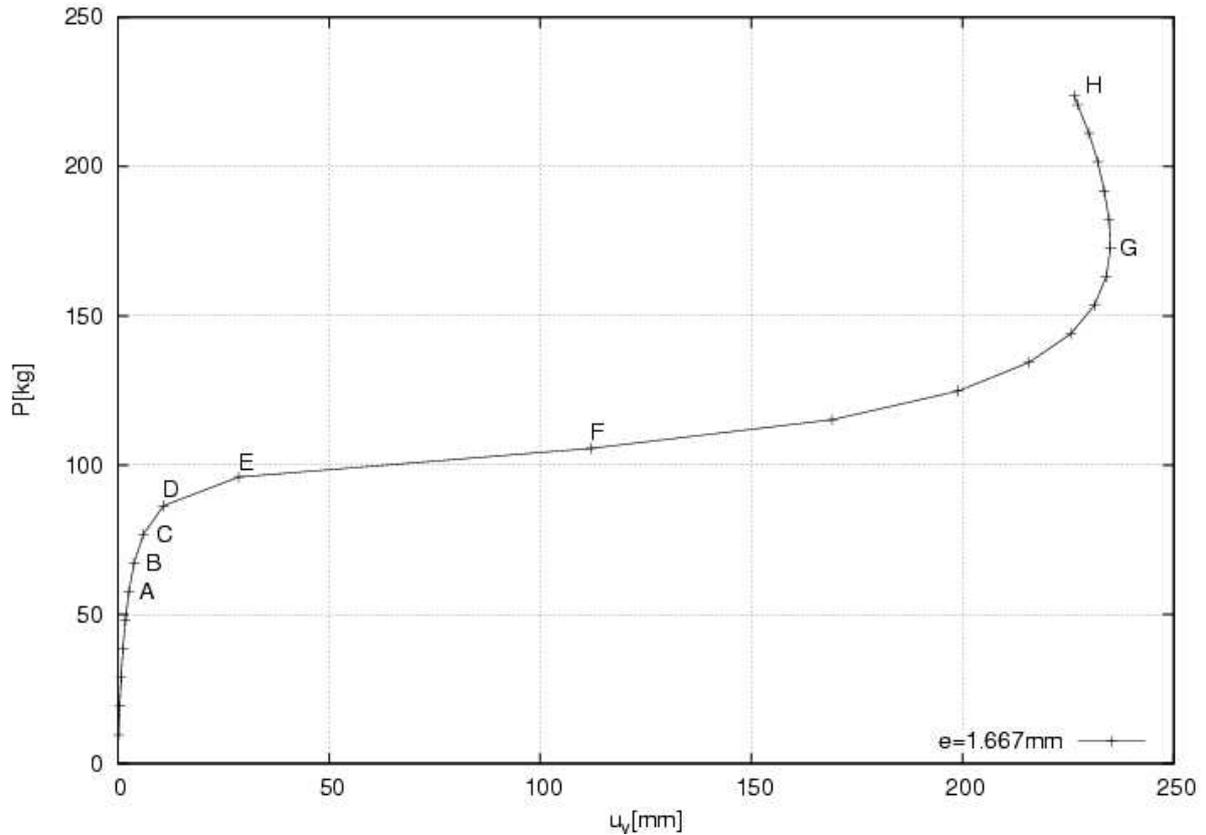


Figura 2: Columna elástica: Excentricidad a 1.667mm, L=300mm.

Seguidamente a lo largo de la trayectoria, no hay demasiado incremento de carga pero sí de desplazamientos laterales, y los estados de equilibrio se los indica con B en la Figura 2 y sus configuraciones se presentan en la Figura 3.



Figura 3: Deformada en los puntos A, B, C, D, E y F respectivamente de la columna, con L=300mm y e=1.667mm.

Finalmente la estructura sigue desplazándose lateralmente hasta alcanzar un máximo valor de desplazamiento lateral con una configuración deformada que se presenta en la Figura 4. A partir de allí se rigidiza la trayectoria de equilibrio tal como se observa en la Figura 2. Estos estados corresponden a grandes rotaciones y desplazamientos.

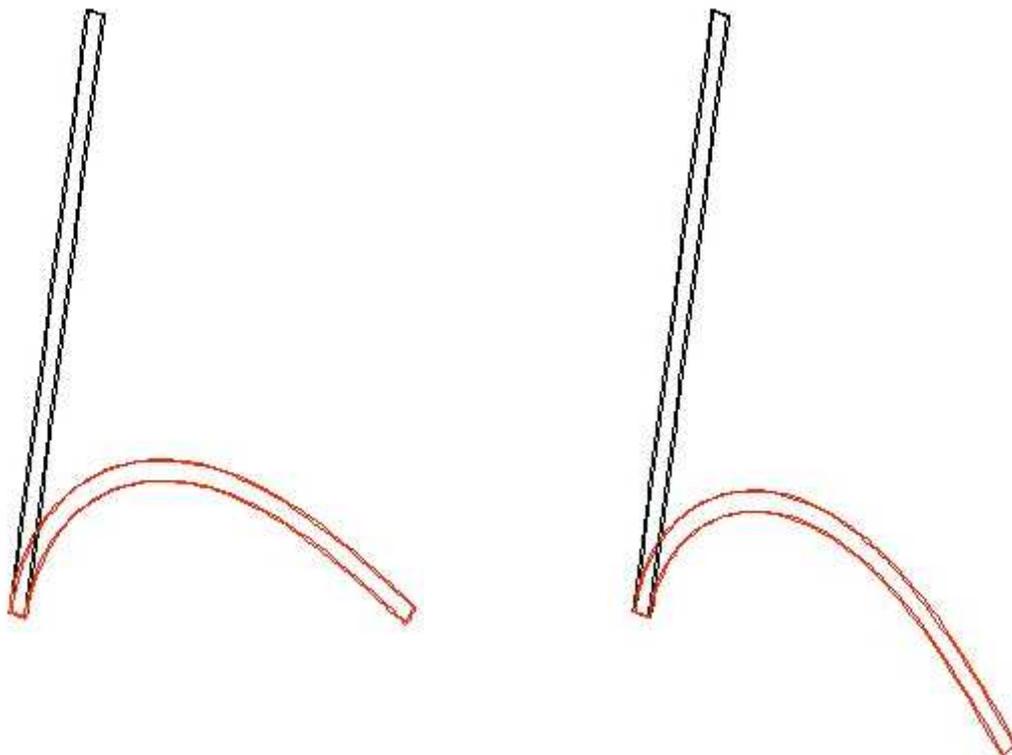


Figura 4: Deformada en los puntos G y H respectivamente de la columna, con $L=300\text{mm}$ y $e=1.667\text{mm}$.

A partir del buen comportamiento logrado con el elemento para el caso de inestabilidad elástica, se realizaron análisis no lineales para esbelteces menores correspondientes a la zona elastoplástica de la Hipérbola de Euler. En las Figuras 5 y 6 se presentan las trayectorias de equilibrio para longitudes de $L=90\text{mm}$ y 100mm respectivamente con distintas imperfecciones.

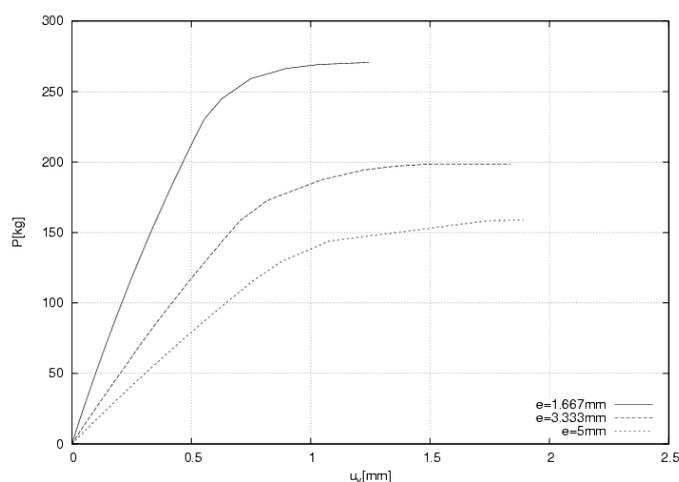


Figura 5: Columna elastoplástica, $L=90\text{mm}$, igual esbeltez para distintas excentricidades.

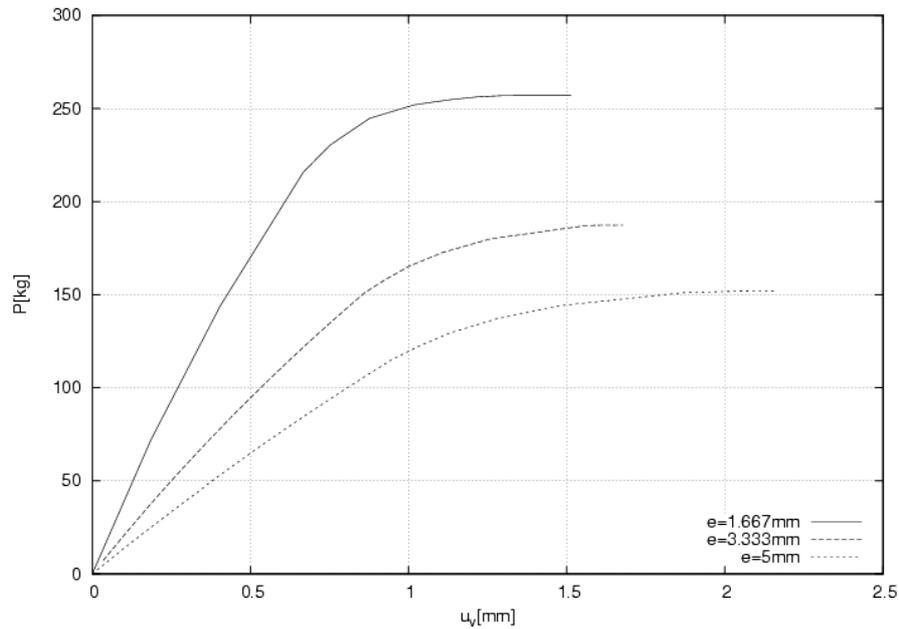


Figura 6: Columna elastoplástica, $L=100\text{mm}$, igual esbeltez para distintas excentricidades.

En la Figura 7 se presentan las trayectorias de equilibrio para una misma excentricidad y distintas esbelteces correspondientes a la zona elastoplástica de la Hipérbola de Euler.

En todos los casos se alcanzó una carga máxima para la cual se obtuvo una rigidez nula. Este valor de carga se adoptó como carga de inestabilidad elastoplástica para esa esbeltez e imperfección dadas.

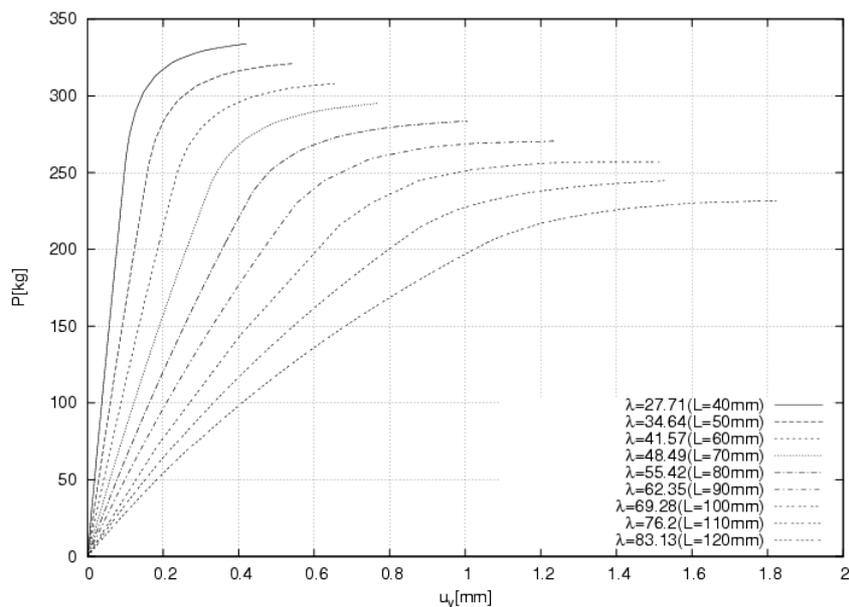


Figura 7: Columna elastoplástica, excentricidad $e=1.667\text{mm}$, para distintas esbelteces.

Los valores de carga límite tomados como cargas de inestabilidad elastoplástica divididos por el valor del área de la sección transversal, dan un valor de tensión crítica elastoplástica para cada esbeltez, e imperfección analizada. Dichos valores se los presenta en la Figura 8,

comparándolos con los resultados teóricos obtenidos de Bleich (1952). Se observa una muy buena correlación entre los resultados numéricos obtenidos con la formulación implementada y los teóricos.

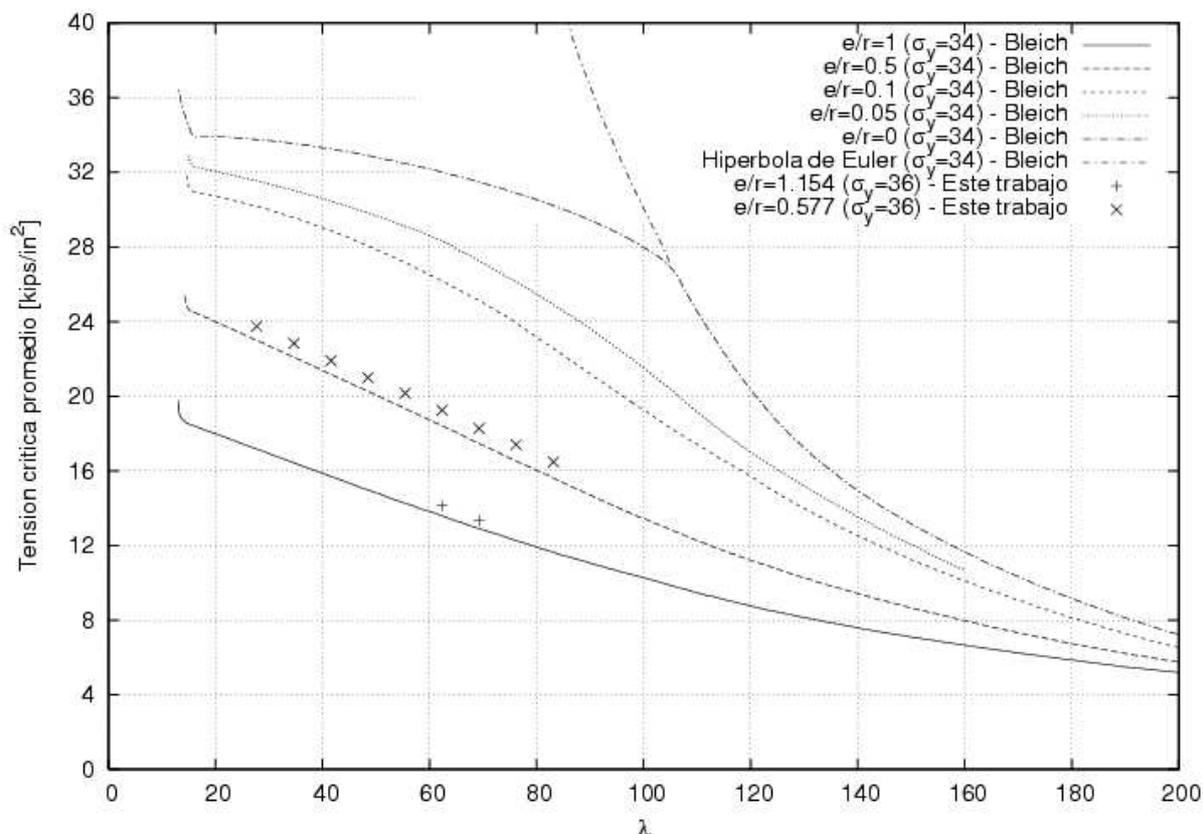


Figura 8: Hipérbola de Euler para el caso analizado.

Se debe destacar que los valores de cargas de inestabilidad elastoplásticas dependen de la sección transversal de la columna analizada y de las características de la ecuación constitutiva del material. Con la formulación y el elemento finito implementado surge la posibilidad de determinar en forma numérica las distintas cargas de inestabilidad elastoplástica para distintos esbelteces e imperfecciones de estructuras de interés. Para ello se deben obtener una gran cantidad de análisis no lineales, por lo que resulta de natural aplicación el empleo de computación distribuida.

3.2 Cruciforme

Se ha analizado una columna de sección transversal tipo cruz, simétrica, con material elástico y material elastoplástico. Este caso ha sido abordado por Lubliner (1990) y por Bazant y Cedolin (1991) entre otros. Para esta estructura, la carga crítica de bifurcación del equilibrio teórica y con material elástico lineal es (Bazant y Cedolin, 1991)

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (2)$$

Siendo E el módulo de elasticidad, ν el módulo de Poisson, h el espesor de las alas y b la longitud de cada una de las cuatro alas de la sección transversal. La configuración deformada

asociada a este estado de equilibrio es de tipo torsional. Con los datos asumidos, la carga crítica de bifurcación torsional es de $P_{cr}=3150$ kg, con una tensión crítica $\sigma_{cr}=80,77$ kg/mm².

Se ha realizado un análisis no lineal a partir de configuraciones imperfectas y aplicando un desplazamiento impuesto uniforme para toda la sección transversal del extremo $x=L$. Como imperfección se ha impuesto un giro de la sección transversal cuya magnitud varía a lo largo de la longitud de la columna desde cero en un extremo al valor máximo de imperfección en el otro.

En la Figura 9 se muestran las trayectorias de equilibrio obtenidas para distintas imperfecciones.

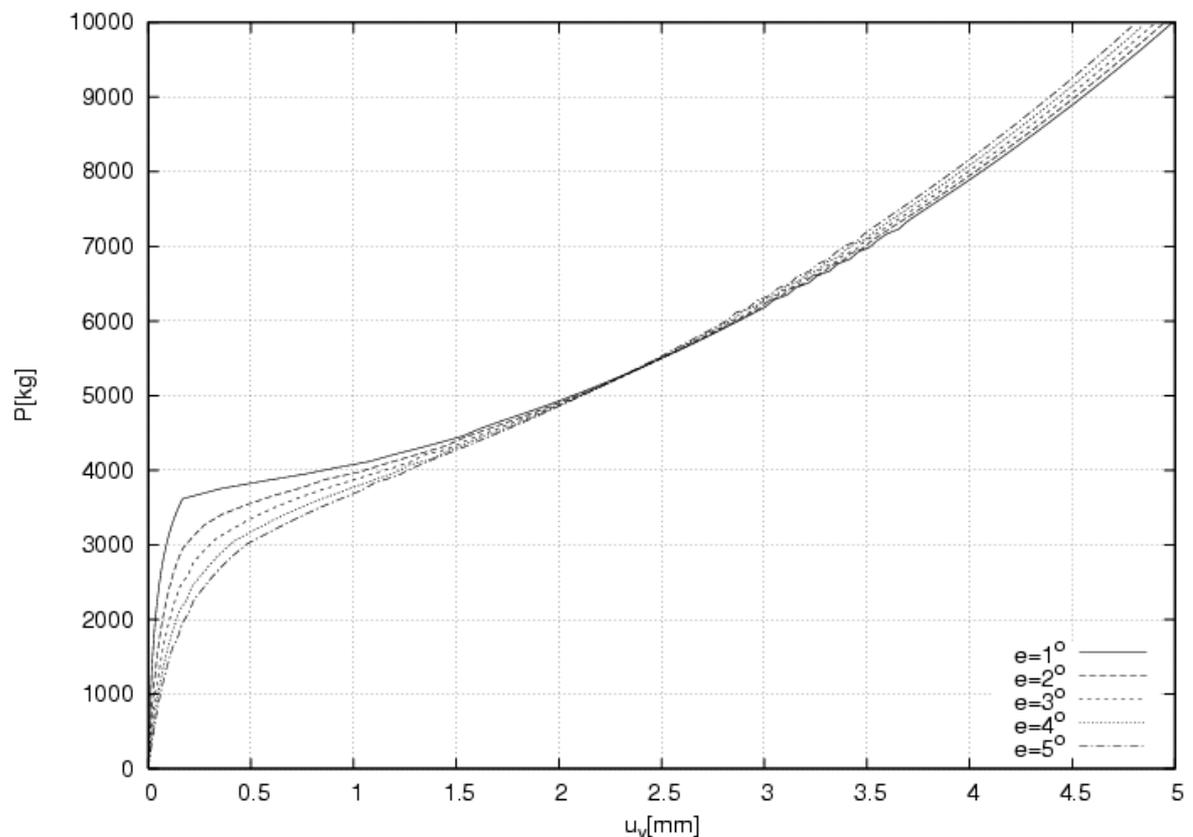


Figura 9: Trayectorias de equilibrio elástico.

Se observa un comportamiento típico de las llamadas bifurcaciones estables según la teoría de estabilidad elástica (Koiter, 1967; Thompson y Hunt, 1973). En la Figura 10 se presenta la configuración deformada en un estado de equilibrio postcrítico donde se observan las grandes rotaciones alcanzadas con el elemento y la formulación implementada.

En la Figura 10 se presenta la configuración de equilibrio de la columna con imperfección de 1 grado, obtenida para un desplazamiento impuesto de 0,73 mm, equivalente a una carga de 7882 kg, sensiblemente superior a la carga crítica. Los desplazamientos laterales en el centro del ala son del orden de 4mm. Se observan las grandes rotaciones alcanzadas por los elementos.

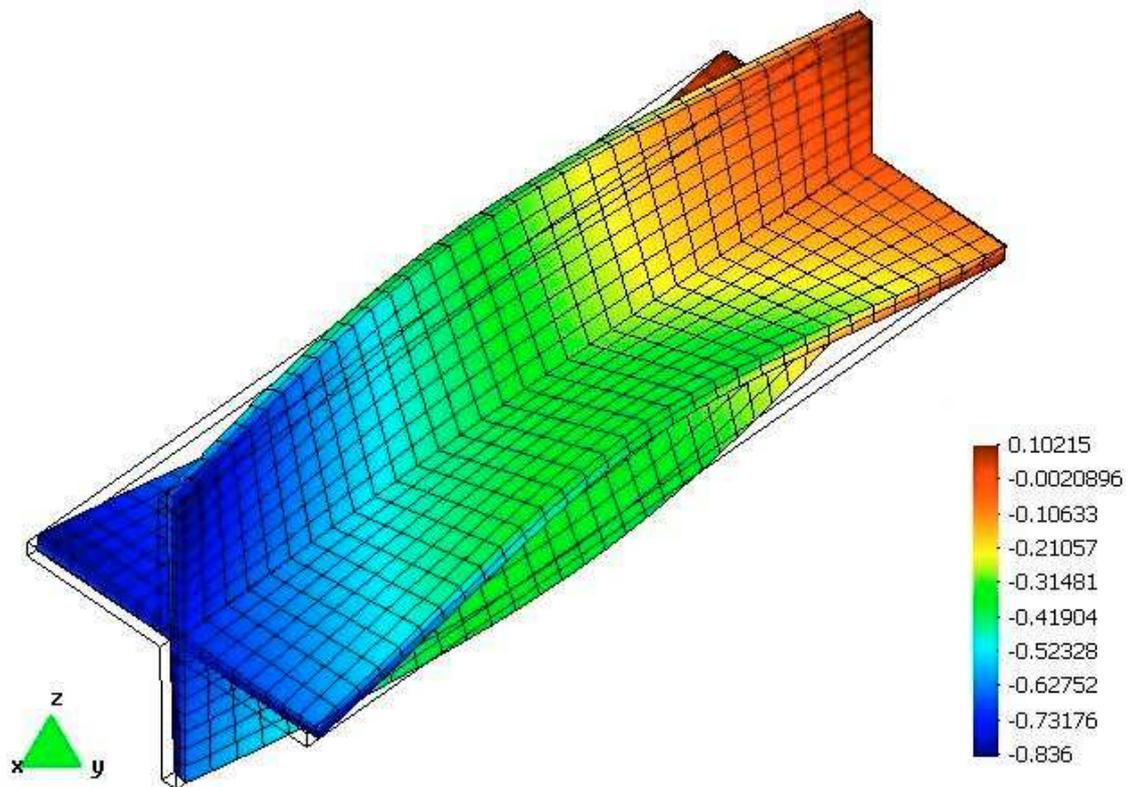


Figura 10: Configuración deformada para imperfección de 1 grado y $u=0,73$ mm

Cuando la tensión de fluencia se fija en $\sigma_y=25,31$ kg/mm² el comportamiento es de tipo elastoplástico, y la respuesta global es bien distinta a la del comportamiento elástico. Se ha realizado análisis no lineal para diferentes imperfecciones y las trayectorias de equilibrio obtenidas se muestran en la Figura 11. Un valor de referencia es la carga $P_y= A * \sigma_y =987$ kg para la cual se plastifica la sección considerada en un estado de esfuerzo axial puro. De comparar las respuestas elásticas (Figura 9) con la elastoplástica (Figura 11), se puede observar que la capacidad portante de la estructura se limita considerablemente, debido al fenómeno elastoplástico.

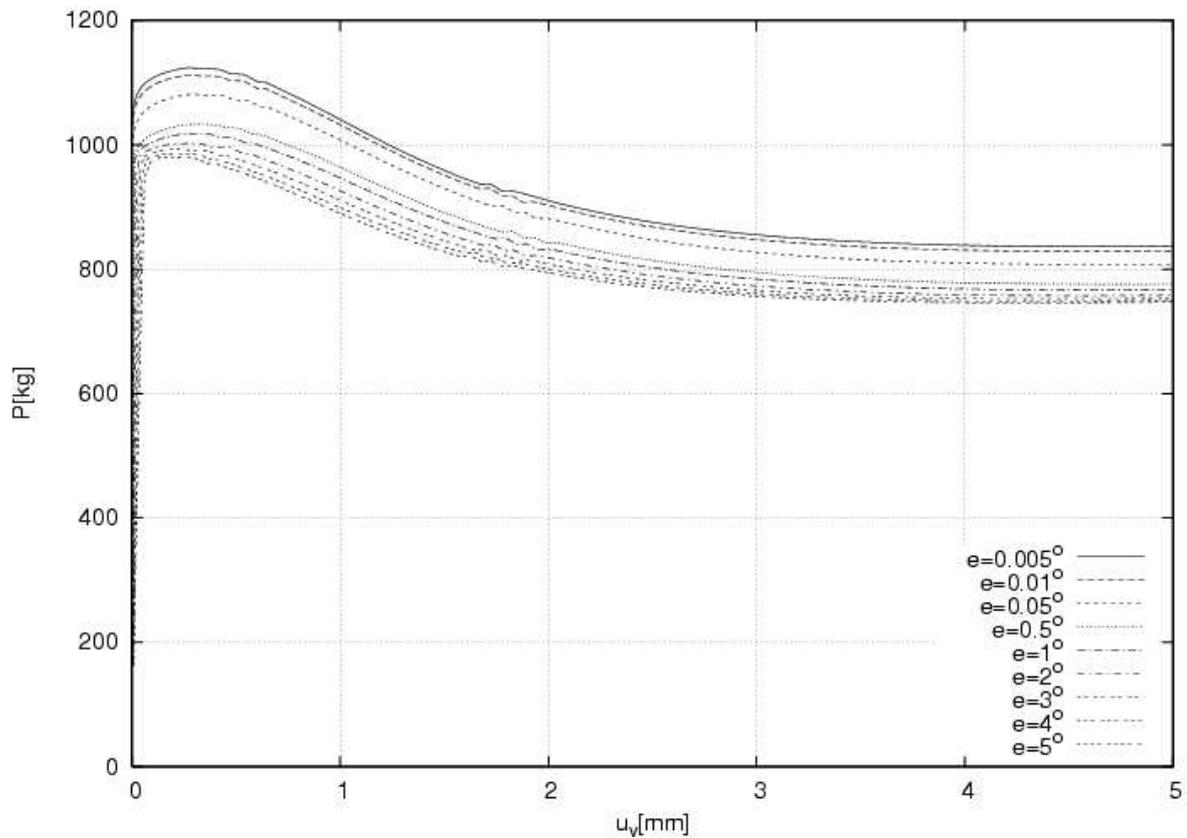


Figura 11: Trayectorias de equilibrio elastoplástico.

En la Figura 11 se pueden distinguir en cada trayectoria tres valores de carga característicos. En primer lugar se observa lo que se puede denominar Carga Crítica Imperfecta ($P_{cr}(e)$) para el cual existe un cambio de rigidez notorio en la trayectoria de equilibrio, que se puede medir con la rigidez secante entre dos incrementos sucesivos de carga, relativo a la rigidez al origen.

Las trayectorias de carga son tales que sigue aumentando la carga hasta alcanzar un valor de Carga Límite ($P_L(e)$) en la cual la rigidez se anula. Posteriormente la estructura pierde capacidad de carga, con un comportamiento de tipo ablandamiento, hasta terminar con un valor de Carga Residual ($P_R(e)$) para el cual la rigidez es nula.

En la Tabla 1 se representan los tres valores de cargas característicos de cada trayectoria de equilibrio imperfecta, en función de la imperfección.

Imperfección	$P_{cr}(e)$	$P_{cr}(e)/P_{cr}(0)$	$P_L(e)$	$P_L(e)/P_L(0)$	$P_R(e)$	$P_R(e)/P_R(0)$
0,005	956,61	1,0000	1124,26	1,000	837,319	1,000
0,01	956,61	1,0000	1112,56	0,990	829,1302	0,990
0,05	956,61	1,0000	1079,08	0,960	807,6093	0,965
0,5	956,48	0,9999	1032,91	0,919	775,7424	0,926
1	956,26	0,9996	1017,51	0,905	766,4636	0,915
2	955,68	0,9990	1002,62	0,892	757,7084	0,905
3	953,95	0,9972	992,67	0,883	752,8807	0,899

Tabla 1: Sensibilidad a imperfecciones.

En la Figura 12 se presentan las curvas de sensibilidad a imperfecciones de las cargas $P_{cr}(e)$, $P_L(e)$ y $P_R(e)$. Se observa que la $P_{cr}(e)$ tiene una bajísima incidencia de las

imperfecciones, mientras que la $P_L(e)$ y la $P_R(e)$ son marcadamente sensibles a las mismas, sobre todo para pequeños valores de la imperfección. Las curvas de sensibilidad para la carga límite y para la carga residual son del mismo tipo. La carga $P_{cr}(e)$ se ha determinado como la carga para la cual se tiene una rigidez secante entre dos incrementos sucesivos de la trayectoria de equilibrio determinada del orden del 50% de la rigidez inicial de dicha trayectoria. Para un nivel de carga de 980 kg en todos los casos analizados se tiene una rigidez secante inferior al 6% de la rigidez inicial, valor próximo al valor de fluencia de la sección que es la carga $P_y = A \cdot \sigma_y = 987$ kg.

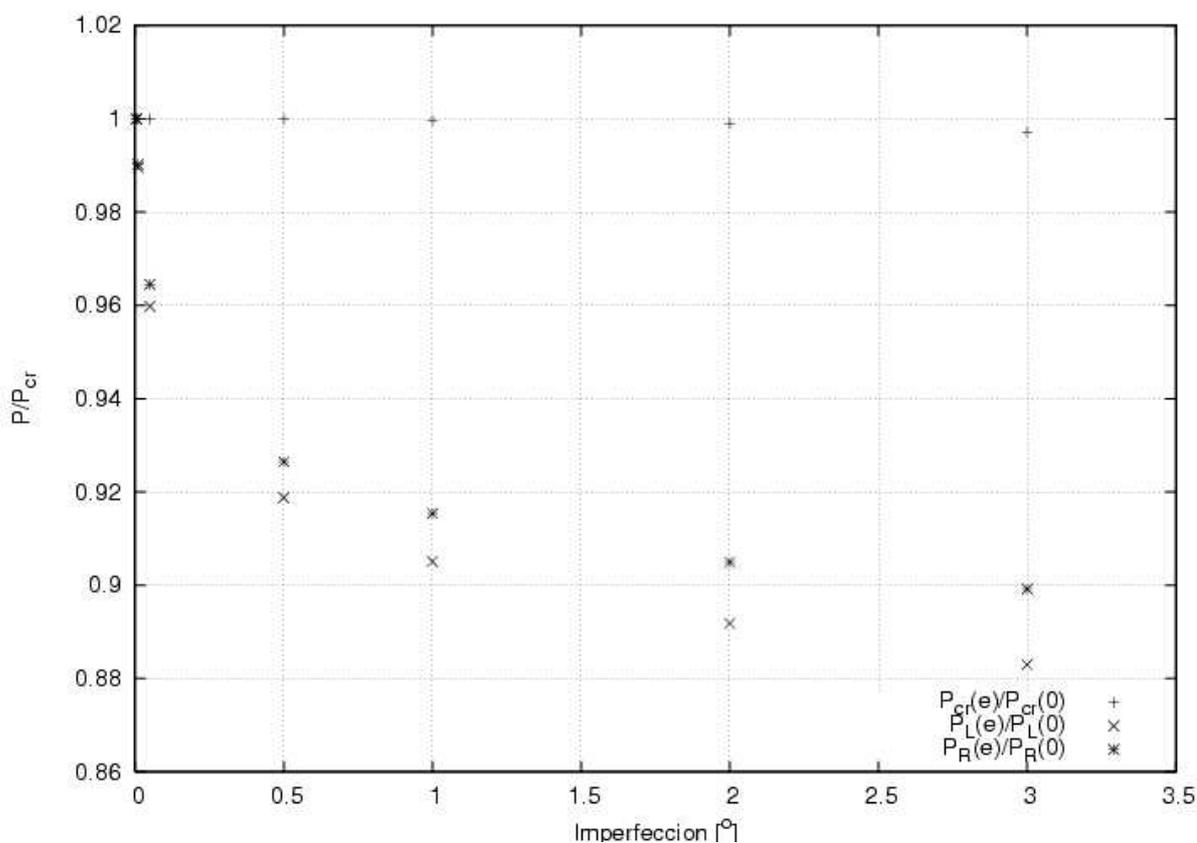


Figura 12: Sensibilidad a imperfecciones.

En la Figura 13 se presenta la configuración de equilibrio de la columna elastoplástica con imperfección de 1 grado, obtenida para un desplazamiento impuesto de 1,33 mm, equivalente a una carga de 768 kg. Los desplazamientos laterales en el centro del ala son del orden de 4mm. Se observan las grandes rotaciones alcanzadas por los elementos. Es importante destacar que la carga alcanzada en este caso es del orden de diez veces inferior a la obtenida en el caso elástico (Figura 10) para igual desplazamiento lateral del centro del ala.

En la Figura 14 se presenta la distribución de tensiones de Von Mises para la columna elastoplástica con imperfección de 1 grado, para los casos de carga de 956 kg y 768 kg. En el primer caso se trata de un estado de equilibrio de plasticidad muy poco desarrollada. Mientras que en el último caso se trata de una configuración de plasticidad completamente desarrollada y correspondiente a la carga residual de la estructura.

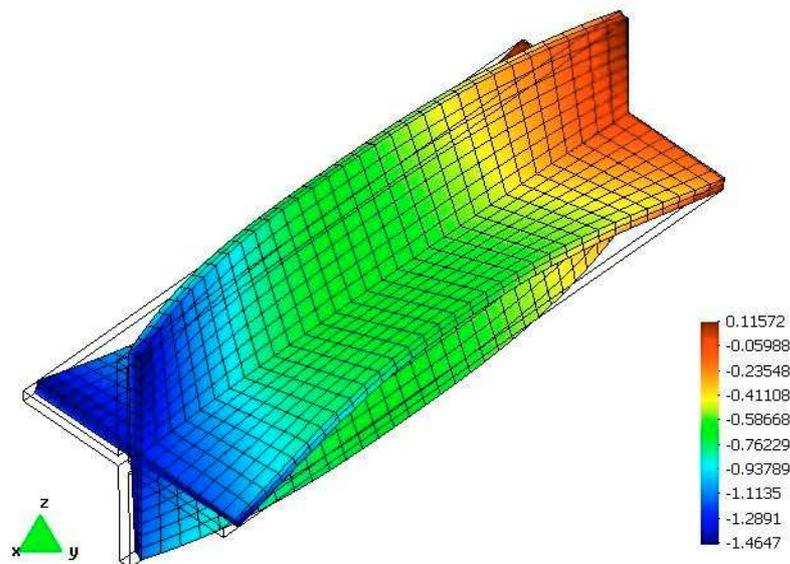


Figura 13: Configuración deformada para imperfección de 1 grado y $u= 1,33$ mm. Material elastoplástico.

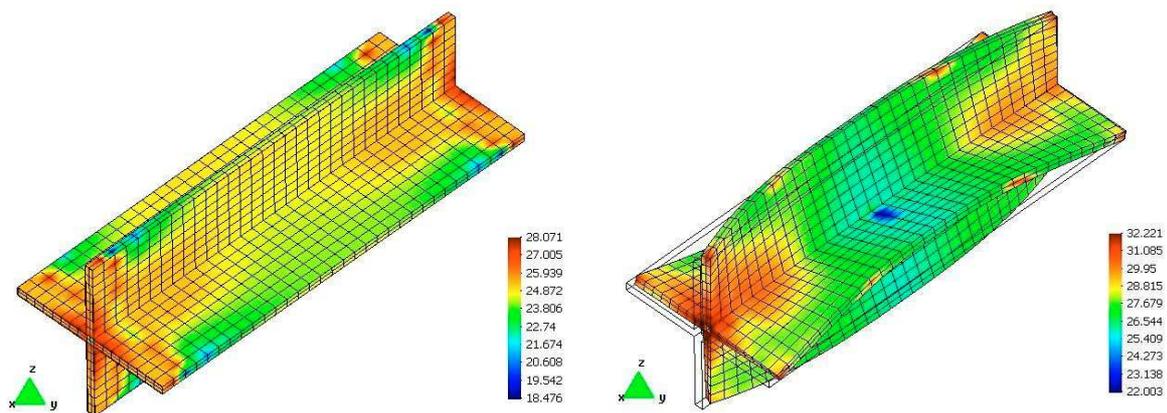


Figura 14: Tensiones de Von Mises en la configuración deformada para imperfección de 1 grado, para desplazamientos impuestos $u= 0,06$ mm y $u= 1,33$ mm respectivamente. Material elastoplástico.

4 CONCLUSIONES

Se han abordado problemas de estabilidad del equilibrio como análisis no lineales de estructuras con imperfecciones que se las relaciona con estados críticos de estructuras perfectas.

Se ha utilizado un elemento finito 3D con una formulación de grandes deformaciones y material elastoplástico de tipo J2 que ha sido presentado anteriormente por Careglio et al. (2005).

Se ha analizado un caso ampliamente tratado en la bibliografía como lo es la columna de Euler, en condiciones de pérdida de estabilidad en forma elástica y elastoplástica. Se han obtenido soluciones no lineales en ambos casos para diferentes imperfecciones definidas como la excentricidad de la carga aplicada; y se han comparado los resultados con los disponibles en la bibliografía, obteniendo una muy buena correlación.

Se ha analizado el caso de una columna cruciforme, también tratada en la bibliografía por Lubliner (1990) y por Bazant y Cedolin (1991) entre otros. Para este caso se han obtenido

curvas de sensibilidad a imperfecciones para distintos niveles de cargas que caracterizan el comportamiento de esta estructura.

En ambos casos se ha logrado alcanzar estados de equilibrio bien alejados de los estados de equilibrio crítico, alrededor de los cuales normalmente se han realizado estudios de otros autores. Se ha logrado validar el buen comportamiento del elemento finito y la formulación implementados para cuando hay grandes desplazamientos y rotaciones, abriendo la posibilidad de explorar la determinación de curvas de pérdida de estabilidad de estructuras de interés con secciones y materiales particulares, haciendo uso de la posibilidad que da la computación distribuida.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la ayuda financiera recibida de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, ANPCyT, a través del proyecto PICTR 184 del FONCYT. y de CONICET.

REFERENCIAS

- Z. Bazant y L. Cedolin, *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, NY, 1991.
- F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw Hill, NY, 1952.
- C. Careglio, C. García Garino y A. Mirasso: *SOGDE 3D: Código de elastoplasticidad con grandes deformaciones 3D*, 363-373, *Mecánica Computacional*, Vol. 24, A. Larrateguy, (Editor), AMCA, Santa Fe. Argentina, 2005,
- F. Flores y L. Godoy, Elastic postbuckling análisis via finite element and perturbation techniques, *Int. J. Num. Meth.Eng.* 33, 1775-1794, 1992.
- C. García Garino, *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*, PhD. Thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, 1993.
- C. García Garino and J. Oliver. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte i formulación teórica y aplicación a metales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **11**, 105–122, 1995.
- C. García Garino and J. Oliver. Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte ii implementación numérica y ejemplos de aplicación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **12**, 147–169, 1996.
- R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, **6**, 236–249. 1958.
- W.T. Koiter, *Over the Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht*, H.J. Paris, Delft, Traducción al Inglés, NASA Report TTF-10, 1967.
- J. Lubliner, *Plasticity Theory*, Mcmillan Publishing Company, 1990.
- L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Structures*, John Wiley & Sons, Londres, 1973.
- S. Timoshenko, *Resistencia de Materiales*, Espasa Calpe S.A., 1982.
- O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor. *The finite element method*, volume I y II. McGraw Hill, 1991.