

MODOS DE FALLA DUCTIL Y BIFURCACION MATERIAL UTILIZANDO EL MODELO CONSTITUTIVO DE GURSON

Pablo Sánchez, Alfredo Huespe, Andrés Anca y Victorio Sonzogni

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC) INTEC-UNL-CONICET,
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, psanchez@intec.unl.edu.ar,*

<http://www.cimec.org.ar>

Palabras clave: falla dúctil, localización de deformaciones plásticas, bifurcación material, modelo de Gurson.

Resumen. El estudio de falla en materiales dúctiles es un tópico que motiva constante investigación y desarrollo por su potencial aplicación tecnológica e industrial. El mecanismo de degradación y formación de fisuras en metales tiene su origen a nivel micromecánico debido a la formación gradual de microcavidades que nuclean, crecen y coalescen en el medio. El modelo de Gurson resulta ser una opción viable para el tratamiento numérico de este proceso. En el presente trabajo se estudian los modos típicos de falla que se obtienen utilizando esta ley constitutiva, las condiciones de inestabilidad material, la compatibilidad existente entre ambos conceptos (en general íntimamente asociados) como así también la dependencia de la respuesta numérica con refinamiento de malla, para un test de estiramiento uniaxial de barra. Se presenta además un ejemplo de aplicación analizando los mecanismos que se ponen en juego en la punta de una fisura, considerando dos niveles (dos escalas) de vacíos. El estudio se restringe al contexto de pequeñas deformaciones y el modelo discreto se formula en un código general de elementos finitos haciendo uso, en particular, de cuadrángulos tipo B-BAR.

1. INTRODUCCION

El modelo constitutivo de Gurson (Gurson, 1975, 1977) es ampliamente utilizado en simulaciones numéricas por su capacidad para predecir la respuesta mecánica de diversas aleaciones metálicas, debido a que considera la existencia de pequeños poros (vacíos) inmersos en el seno de la matriz material. La característica fundamental que distingue a esta ley constitutiva “macroscópica” es la habilidad intrínseca que posee para simular dos mecanismos que típicamente se desarrollan a una escala “micromecánica” como ser: la nucleación y crecimiento de micro-cavidades. Esto último se logra tras introducir una modificación en la definición de la función de fluencia con respecto al criterio clásico de Von Mises, incorporando una nueva variable de estado, la fracción volumétrica de vacíos f , cuya evolución regula la pérdida gradual de resistencia del material. Existe sin embargo un fenómeno que el modelo de Gurson, al menos en su formato original, no es capaz de predecir en forma explícita, con ello nos referimos al proceso de *coalescencia* de vacíos existentes. Una posibilidad es adoptar un criterio empírico, en donde se postula que la coalescencia ocurre para cierto nivel crítico f_C (constante) de porosidad (Needleman y Tvergaard, 1987; Xia et al., 1995; Gao et al., 1998-a), ajustando este nuevo parámetro con resultados experimentales. Otra alternativa es la propuesta por Thomason (1985, 1998), quien introdujo el modelo de falla por carga límite entre vacíos, que posteriormente Zhang (1998) y Zhang et al. (2000) utilizaron para formular el denominado *Modelo Completo de Gurson*.

Es un hecho bien reconocido que precisamente tales procesos irreversibles micro-mecánicos de nucleación y crecimiento juntamente con el concepto de coalescencia de vacíos, son los mecanismos que gobiernan la falla dúctil y los responsables de inducir a nivel macro un comportamiento constitutivo con degradación, ablandamiento y por ende susceptible de posible inestabilidad material.

El presente trabajo pertenece a una línea de investigación en vías de desarrollo y contempla, como objetivo principal, estudiar las posibilidades que brinda el modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman en la predicción de falla dúctil. En particular se hace especial énfasis en determinar los modos compatibles de localización que se obtienen como función del estado local de tensión y de la fracción de vacíos existente en la matriz material. En este contexto, se presenta un procedimiento simple y eficiente de cálculo que permite evaluar en forma analítica cerrada las condiciones de bifurcación discontinua (singularidad del tensor de localización). De dicho análisis surge como información relevante el instante de tiempo en la historia de respuesta y la dirección crítica en donde es admisible (por primera vez) la presencia de saltos en el campo tasa de deformaciones, para el modelo constitutivo en estudio. Se analiza posteriormente si tales condiciones son suficientes para que se desarrolle y propague un modo localizado de falla.

Un primer problema a resolver consiste en el test de estiramiento de una barra. Se presentan los dos modos admisibles de localización obtenidos dependiendo de la hipótesis mecánica adoptada: (i) deformación plana, que origina un mecanismo tipo banda de corte y (ii) axisimetría con el correspondiente modo I de apertura.

Como aporte adicional presentamos una aplicación del modelo de Gurson para la simulación numérica de los procesos involucrados en la punta de una fisura. Para ello se considera la existencia de dos poblaciones de vacíos. Una distribución primaria de macro-poros modelada como verdaderas cavidades esféricas (cilíndricas en 2D) en la malla de EF y una fracción de vacíos secundaria sólo incluida en el modelo a través de la definición del potencial de Gurson. Los resultados obtenidos, en términos de curvas de resistencia material, se fundamentan en la hipótesis de plasticidad en pequeña escala.

El resto del presente informe se organiza como sigue: en la sección siguiente se introducen las ecuaciones que definen la ley constitutiva de Gurson, para luego discutir el algoritmo implícito de integración numérica utilizado (sección 3); en el apartado (4) presentamos un estudio analítico de inestabilidad material; seguidamente (secciones 5-6) se detallan algunos aspectos puntuales del modelo tras realizar experimentos numéricos. La última sección está dedicada a resumir ideas y conclusiones finales. Se dispone además de un anexo con el desarrollo de expresiones matemáticas de interés.

2. MODELO CONSTITUTIVO DE GURSON

A diferencia de las leyes constitutivas formuladas en plasticidad J_2 , el criterio de Gurson postula que ambas componentes del tensor de tensiones, la proyección esférica ($-p\mathbb{I}$) y la desviadora ($\mathbf{S} = dev(\boldsymbol{\sigma})$), intervienen en la definición del potencial de fluencia, permitiendo entonces deformaciones volumétricas aun en pleno régimen plástico. Según la modificación propuesta por Tvergaard (1981, 1982) y Tvergaard y Needleman (1984), dicha función de flujo se expresa:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \bar{\varepsilon}) = \left[\frac{q}{\sigma_0(\bar{\varepsilon})} \right]^2 + 2q_1 f^*(f) \cosh(\alpha) - [1 + q_3 f^*(f)]^2 \leq 0 \quad ; \quad \alpha = -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_0} \quad (1)$$

teniendo en cuenta que el estado actual de tensión se reconstruye de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(p, q) = -p\mathbb{I} + \frac{2}{3} q \mathbf{n} \quad ; \quad \mathbf{n} = \sqrt{3/2} (\mathbf{S}/\|\mathbf{S}\|) \quad (2)$$

donde $p = -\frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma})$ es la presión hidrostática, $q = [\frac{3}{2}(\mathbf{S} : \mathbf{S})]^{1/2}$ una norma del tensor desviador de tensiones (tensión equivalente de Von Mises), q_1 , q_2 y q_3 ($q_3 = q_1^2$) son parámetros materiales ajustables mediante ensayos experimentales y $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon})$ es la tensión de fluencia equivalente microscópica dependiente sólo de la deformación equivalente microscópica en la matriz del material base ($\bar{\varepsilon}$). La fracción de vacío se considera a través de la magnitud escalar f , que ciertamente actúa como una variable interna más del modelo y es la responsable de inducir un mecanismo de ablandamiento a nivel macro cuando su valor se torna crítico. Nótese sin embargo que, según lo propuesto por Tvergaard y Needleman (1984), la función ϕ puede hacerse depender de una *fracción de vacíos modificada* (f^*) para simular la pérdida rápida de resistencia debido al proceso de coalescencia de vacíos:

$$f^* = \begin{cases} f & \text{para } f \leq f_C \\ f_C + \frac{q_1 - f_C}{f_F - f_C} (f - f_C) & \text{para } f_C < f < 1 \end{cases} \quad (3)$$

con lo cual se obtiene $f^*(f_F) = \frac{1}{q_1}$, que es el máximo valor admisible para la fracción de poros compatible con la ecuación (1). La modificación (3) se activa cuando $f > f_C$ siendo f_C el valor crítico de la fracción de vacío que produce la coalescencia, mientras que f_F es aquél para el cual el material se encuentra completamente degradado ($\phi = 0$, tal que $p = 0 \wedge q = 0$). En este trabajo se adopta: $f_C = 0,15$ y $f_F = 0,25$.

Se asume como válida la descomposición aditiva del tensor de deformación macroscópica ($\boldsymbol{\varepsilon}$) en función de la componente elástica reversible ($\boldsymbol{\varepsilon}^e$) y fracción inelástica ($\boldsymbol{\varepsilon}^p$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4)$$

Considérese además que la tasa de la deformación plástica macroscópica se evalúa según:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \mathbf{M} \quad (5)$$

en donde γ es el multiplicador plástico y \mathbf{M} es el tensor de direccionalidad indicando que el incremento inelástico de deformación resulta normal a la superficie de fluencia en el espacio de tensiones. En vista de la expresión (2), la ecuación (5) puede reescribirse en términos de la componente volumétrica (ε_p^p) y desviadora (ε_q^p) de la deformación plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \left[-\frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial p} \mathbb{I} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \mathbf{n} \right] = \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_p^p \mathbb{I} + \dot{\varepsilon}_q^p \mathbf{n} \quad (6)$$

siendo:

$$\dot{\varepsilon}_p^p = -\gamma \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (7)$$

$$\dot{\varepsilon}_q^p = \gamma \frac{\partial \phi}{\partial q} \quad (8)$$

A partir de las ecuaciones (7-8) se deduce que la regla de normalidad (5) se satisface si:

$$\dot{\varepsilon}_p^p \frac{\partial \phi}{\partial q} + \dot{\varepsilon}_q^p \frac{\partial \phi}{\partial p} = 0 \quad (9)$$

Son dos los términos que aportan a la ley de evolución de la fracción de vacíos f . El primero de ellos asociado a la velocidad de *crecimiento de poros* que depende, en gran medida, del estado de triaxialidad presente en el material a través de la traza de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ ($\dot{\varepsilon}_p^p = tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$). El término restante, es el responsable de modelar la velocidad de *nucleación de vacíos* y resulta ser una función de la tasa de deformación plástica equivalente ($\dot{\bar{\varepsilon}}$) en la matriz base:

$$\dot{f} = \underbrace{(1-f) \dot{\varepsilon}_p^p}_{\text{crecimiento}} + \underbrace{\mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon}) \dot{\bar{\varepsilon}}}_{\text{nucleación}} \quad (10)$$

donde la función $\mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon})$ se elige de tal forma que el proceso de nucleación siga una ley de distribución normal con valor medio $\bar{\varepsilon}_N$ y desviación estandar s_N (véase [Chu y Needleman \(1980\)](#)):

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_N}{s_N}\right)^2\right]} \quad (11)$$

La tasa de deformación plástica microscópica ($\dot{\bar{\varepsilon}}$) surge de postular el balance de trabajo plástico con respecto al realizado por magnitudes macroscópicas de tensión y deformación:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{(1-f) \sigma_0} \quad (12)$$

Finalmente, el modelo constitutivo queda definido al agregar las condiciones complementarias de carga-descarga:

$$\phi(p, q, \bar{\varepsilon}, f) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(p, q, \bar{\varepsilon}, f) = 0 \quad (13)$$

3. INTEGRACION NUMERICA

El planteo de metodologías para integrar las ecuaciones del modelo de Gurson ha sido también tema de investigación (Zhang, 1995; Kojic et al., 2002; Betegon et al., 2006; Anca et al., 2003) por la elevada no linealidad que muestran las ecuaciones. Cabe remarcar que la aplicación directa de un método de Newton-Raphson al sistema de ecuaciones generado por un esquema Euler-Backward, en general es tan poco robusto que se vuelve inaplicable en casos prácticos. En este trabajo, la integración numérica se obtiene a partir de un esquema implícito de Euler retrasado incondicionalmente estable, *implementado en dos etapas*, similar al propuesto por Aravas (1987). Para ganar robustez y evitar problemas de convergencia, fundamentalmente cuando la fracción de vacíos crece en forma acelerada, es decir una vez que se activa la modificación introducida y discutida en la sección 2 para $f > f_C$, se ha implementado además una estrategia de control de tipo *sub-stepping* a nivel de cada punto de Gauss. En caso de ser necesario, se cuenta a su vez con un escalamiento consistente del parámetro global de *arc-length*.

El conjunto de ecuaciones diferenciales a resolver surge de satisfacer en forma simultánea la regla de normalidad (9), la condición de fluencia (1) y las leyes de evolución para las variables internas ($\bar{\varepsilon}, f$), según las expresiones (12) y (10) respectivamente. De esta manera el residuo $\mathbf{R}(\Delta\varepsilon_p^p, \Delta\varepsilon_q^p, \Delta\bar{\varepsilon}, \Delta f)$ puede escribirse al tiempo actual ($t + \Delta t$), haciendo uso de una estrategia implícita en diferencias finitas, como sigue:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \text{---} \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \text{---} \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_p^p \frac{\partial\phi}{\partial q} + \Delta\varepsilon_q^p \frac{\partial\phi}{\partial p} \\ \left(\frac{q}{\sigma_0}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh(\alpha) - (1 + q_3 f^*)^2 \\ \text{---} \\ \frac{-p \Delta\varepsilon_p^p + q \Delta\varepsilon_q^p}{(1-f)\sigma_0} - \Delta\bar{\varepsilon} \\ (1-f)\Delta\varepsilon_p^p + \mathcal{A}_m \Delta\bar{\varepsilon} - \Delta f \end{bmatrix}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Considérese que $\mathbf{X} = [\Delta\varepsilon_p^p, \Delta\varepsilon_q^p, \Delta\bar{\varepsilon}, \Delta f]^T$ representa el vector de variables de estado independientes del modelo, luego el Jacobiano (\mathbf{J}) del sistema se expresa:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & | & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & | & J_{23} & J_{24} \\ \text{---} & \text{---} & - & \text{---} & \text{---} \\ J_{31} & J_{32} & | & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & | & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & | & \mathbf{A}_{12} \\ \text{---} & - & \text{---} \\ \mathbf{A}_{21} & | & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Definimos la aproximación de primer orden para los incrementos de \mathbf{X} ($\delta\mathbf{X}$), al instante ($t + \Delta t$) de la forma:

$$\delta\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta\Delta\varepsilon_p^p \\ \delta\Delta\varepsilon_q^p \\ \text{---} \\ \delta\Delta\bar{\varepsilon} \\ \delta\Delta f \end{bmatrix}^{(t+\Delta t)} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \text{---} \\ \delta_2 \end{bmatrix}^{(t+\Delta t)} \quad (16)$$

El algoritmo de cálculo iterativo propuesto para computar el estado tensional y actualizar el conjunto de variables internas, se describe en el cuadro (1). Véase también el Anexo (A.1), donde se presentan las expresiones finales que adquiere cada término de la matriz Jacobiana (\mathbf{J}).

(1) Estado Trial: proyección elástica

Dado $\Delta \varepsilon$; $\varepsilon^{p(t)}$; $\bar{\varepsilon}^{(t)}$; $f^{(t)}$

Evaluar: $\sigma^{(trial)} = C^e : (\varepsilon^e + \Delta \varepsilon)$; $S^{(trial)} = dev(\sigma^{(trial)})$

Computar: $p = p^{(trial)} = -\frac{1}{3} tr(\sigma^{(trial)})$

$$q = q^{(trial)} = [3/2 (S^{(trial)} : S^{(trial)})]^{1/2}$$

$$\mathbf{n}^{(trial)} = \sqrt{3/2} (S^{(trial)} / \|S\|^{(trial)})$$

Asumir $\mathbf{X}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{0}$, es decir: $\Delta \varepsilon_p^p = \Delta \varepsilon_q^q = \Delta \bar{\varepsilon} = \Delta f = 0$

(2) Verificar criterio de fluencia

Si $\phi \leq 0 \rightarrow$ Avanzar al paso (7)

Si $\phi > 0 \rightarrow$ Avanzar al paso (3)

(3) Loop Externo de Newton: iteración en $\Delta \varepsilon_p^p$ y $\Delta \varepsilon_q^q$, para resolver $R_1^{(t+\Delta t)} = \mathbf{0}$

Evaluar: $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon})$

Evaluar: $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon})$, según ec. (11)

Computar el residuo del sistema: $R_1(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^q, \Delta \bar{\varepsilon}, \Delta f)$, según ec. (14)

Computar el jacobiano del sistema: J , según ec. (15) (véase además Anexo (A.1))

Calcular los incrementos de las 2 primeras ecs: $\delta_1 = [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1} R_1$

$$\text{Actualizar: } \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_p^p \\ \Delta \varepsilon_q^q \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_p^p \\ \Delta \varepsilon_q^q \end{bmatrix} + \delta_1$$

Actualizar: $p = p^{(trial)} + \kappa \Delta \varepsilon_p^p$

Actualizar: $q = q^{(trial)} - 3\mu \Delta \varepsilon_q^q$

(4) Loop Interno de Newton: iteración en $\Delta \bar{\varepsilon}$ y Δf , para resolver $R_2^{(t+\Delta t)} = \mathbf{0}$

Evaluar: $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon})$

Evaluar: $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\bar{\varepsilon})$, según ec. (11)

Computar el residuo del sistema: $R_2(\Delta \varepsilon_p^p, \Delta \varepsilon_q^q, \Delta \bar{\varepsilon}, \Delta f)$, según ec. (14)

Computar: A_{22} , según ec. (15) (véase además Anexo (A.1))

Calcular los incrementos de las 2 últimas ecs: $\delta_2 = A_{22}^{-1} R_2$

$$\text{Actualizar: } \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon} \\ \Delta f \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon} \\ \Delta f \end{bmatrix} + \delta_2$$

(5) Analizar criterio de convergencia para el Loop Interno

Si se verifica \rightarrow Avanzar al paso (6)

Si no se verifica \rightarrow Volver al paso (4)

Fin Loop Interno**(6) Analizar criterio de convergencia para el Loop Externo**

Si se verifica \rightarrow Avanzar al paso (7)

Si no se verifica \rightarrow Volver al paso (3)

Fin Loop Externo**(7) Actualización del estado de tensión**

$$\sigma^{(t+\Delta t)} = -p \mathbb{I} + \frac{2}{3} q \mathbf{n}^{(trial)}$$

(8) Actualización de variables internas

$$\varepsilon^{p(t+\Delta t)} = \varepsilon^{p(t)} + \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p^p \mathbb{I} + \Delta \varepsilon_q^q \mathbf{n}^{(trial)}$$

$$\bar{\varepsilon}^{(t+\Delta t)} = \bar{\varepsilon}^{(t)} + \Delta \bar{\varepsilon}$$

$$f^{(t+\Delta t)} = f^{(t)} + \Delta f$$

Fin

Tabla 1: Algoritmo implícito (iterativo) para la integración del modelo de Gurson.

4. ANALISIS DE BIFURCACION MATERIAL

En esta sección se estudia el problema de localización de deformaciones a través del denominado *Análisis de Bifurcación Discontinua Material* (Rudnicki y Rice, 1975; Rice, 1976). En este contexto, se pretende buscar las restricciones que deben generarse en el estado de tensión, compatibles con la presencia de saltos en el campo tasa de deformaciones. En particular se obtendrán fórmulas analíticas cerradas que determinan las condiciones críticas bajo las cuales las leyes de evolución constitutivas predicen la pérdida de elipticidad y primer modo factible de bifurcación en la respuesta.

4.1. Tensor elastoplástico del continuo

Un paso necesario para efectuar el análisis de bifurcación material es obtener la expresión del módulo constitutivo tangente (\mathbf{C}) del continuo, para el modelo en estudio. Considérese para ello la ecuación de consistencia o persistencia plástica:

$$\gamma \dot{\phi}(p, q, \bar{\varepsilon}, f) = 0 \quad (17)$$

Asumiendo un estado de carga inelástica ($\gamma > 0$), la ecuación (17) implica necesariamente:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \bar{\varepsilon})}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{\mathbf{M}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial f}}_{\mathbf{N}} \dot{f} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\varepsilon}}}_{\mathbf{R}} \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (18)$$

La relación incremental entre tensión-deformación y la regla de flujo, nos permite escribir:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \mathbf{M}) \quad (19)$$

En este estado de avance es posible deducir la forma explícita que toma el multiplicador plástico. Reemplazando (19), (10) y (12) en (18), resulta evidente la estructura adquirida por γ :

$$\gamma = \frac{(\mathbf{M} : \mathbf{C}^e)}{(\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M}) - \mathbf{N}(1-f) \text{tr}(\mathbf{M}) - (\mathbf{N}\mathcal{A}_m + \mathbf{R}) \frac{(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})}{(1-f)\sigma_0}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{P}}{\xi(H)} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20)$$

donde se define $\mathbf{P} = (\mathbf{M} : \mathbf{C}^e)$, y el denominador a través de la magnitud escalar $\xi(H)$ dependiente del módulo de endurecimiento material $H = \partial \sigma_0 / \partial \bar{\varepsilon}$:

$$\xi(H) = (\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M}) - \mathbf{N}(1-f) \text{tr}(\mathbf{M}) - (\mathbf{N}\mathcal{A}_m + \mathbf{R}) \frac{(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})}{(1-f)\sigma_0} \quad (21)$$

Tras insertar la ecuación (20) en la (19), se obtiene el operador tangente en carga plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (22)$$

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e : \mathbf{M}) \otimes (\mathbf{M} : \mathbf{C}^e)}{(\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M}) - \mathbf{N}(1-f) \text{tr}(\mathbf{M}) - (\mathbf{N}\mathcal{A}_m + \mathbf{R}) \frac{(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})}{(1-f)\sigma_0}} = \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}}{\xi(H)} \quad (23)$$

Adviértase la simetría de \mathbf{C}^{ep} . En ausencia de microcavidades, condición equivalente a asumir: $f = 0$, $\mathbf{N} = 0$, $\text{tr}(\mathbf{M}) = 0$ y $\mathcal{A}_m = 0$, se recupera la formulación estándar de plasticidad J_2 . Para $f \neq 0$, no es posible asegurar el carácter de definido positivo de \mathbf{C}^{ep} ni siquiera en

régimen de endurecimiento por deformación ($H = \partial\sigma_0/\partial\bar{\varepsilon} > 0$), con lo cual el modelo puede inducir inestabilidades a nivel material, bifurcación y modos de falla localizados.

El formato general del tensor constitutivo tangente (\mathbf{C}), según corresponda a descarga elástica o carga plástica puede formularse de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^{ep} & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga plástica}) \end{cases} \quad (24)$$

Consúltese el anexo (A.2) donde se deducen las expresiones para las variables M , N y R introducidas en esta sección.

4.2. Solución analítica al problema de bifurcación

Las condiciones compatibles con la existencia de un modo discontinuo de bifurcación material están relacionadas con las propiedades espectrales del tensor de localización elasto-plástico (\mathbf{Q}^{ep}), en particular con la singularidad del mismo (Rice y Rudnicki (1980); Ottosen y Runesson (1991)):

$$\det(\mathbf{Q}^{ep}) = \det(\underbrace{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}^{ep} \cdot \boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{Q}^{ep}}) = \det\left[\underbrace{(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \boldsymbol{\eta})}_{\mathbf{Q}^e} + \left(\boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}}{\xi(H)} \cdot \boldsymbol{\eta}\right)\right] = 0 \quad (25)$$

en donde $\boldsymbol{\eta}$ es el versor normal a la dirección de localización.

El problema a resolver puede formularse matemáticamente como un proceso de maximización con restricciones, en el cual debe encontrarse el valor crítico $H^{crit} = \max\{\bar{H}\}$ tal que $\forall \bar{H}$ se verifique la ecuación (25) con $\|\boldsymbol{\eta}\| = 1$. De esta forma para la condición $H > H^{crit}$ el material permanece en régimen estable (sin bifurcación).

En el presente trabajo se sigue la idea propuesta por Oliver y Huespe (2004), donde se postula una estrategia analítica, simple y eficiente para una variedad de modelos materiales, que permite detectar el instante y dirección de bifurcación. En particular esta metodología origina soluciones exactas para el modelo en estudio.

Dada la estructura particular de \mathbf{C}^e y \mathbf{C}^{ep} , y tras cierta manipulación algebraica es posible demostrar que la condición (25) es equivalente a exigir que $\xi(H)$ adquiera el valor crítico Z^{crit} :

$$Z^{crit} = \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{2\mu(1-\mu)} (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \quad (26)$$

Según las expresiones desarrolladas en el anexo (A.2) la función $\xi(H)$ varía con H sólo a través de la variable R . Luego $\xi(H)$ es una función monótonamente creciente en su argumento dado que, por razones físicas, para un punto sobre la superficie de fluencia, se satisface:

$$R = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_0}}_{<0} \underbrace{\frac{\partial\sigma_0}{\partial\bar{\varepsilon}}}_H \rightarrow \begin{cases} \text{si } H > 0 \rightarrow R < 0 \\ \text{si } H < 0 \rightarrow R > 0 \end{cases} \quad (27)$$

Analicemos cómo afecta la magnitud H al tensor tangente (\mathbf{C}^{ep}), teniendo en cuenta el razonamiento expuesto en la expresión (27). Cuando aumenta el módulo de endurecimiento, el denominador $\xi(H)$ en la ecuación (23) tiende a aumentar, con lo cual se tendrá $\xi(H) \gg Z^{crit}$. Por el contrario, al disminuir el parámetro H , también lo hace la función $\xi(H)$. La primera

vez en la historia de respuesta en donde es factible una bifurcación material, surge entonces al momento incipiente ($t = t_B$) en que se verifique:

$$\xi(H) = Z^{crit} \quad (28)$$

siendo un criterio totalmente equivalente a exigir $H = H^{crit}$.

Observación 1 la desigualdad (28) debe interpretarse como condición “necesaria” para que en un punto, el campo tasa de deformación pueda resultar discontinuo ($[\dot{\epsilon}] \neq \mathbf{0}$) a través de una superficie cuya normal es η . Debe destacarse sin embargo que la singularidad de \mathbf{Q}^{ep} no representa una condición “suficiente” para que se desarrolle y propague un modo de bifurcación, ya que la cinemática o condiciones de borde del problema pueden inhibir este fenómeno, como se discute más adelante.

En vista de los resultados reportados en Oliver y Huespe (2004), basados en una interpretación geométrica de la ecuación (26), el ángulo crítico de bifurcación (θ^{crit}) en correspondencia con el instante de bifurcación t_B , podrá evaluarse de la forma:

$$\tan^2(\theta^{crit}) = -\frac{p_3 - \beta p_1}{p_1 - \beta p_3} \quad ; \quad \beta = \frac{\nu}{(1 - \nu)} \quad (29)$$

donde $\{p_1 \geq p_2 \geq p_3\}$ son los valores propios del tensor \mathbf{P} , ν el coeficiente de Poisson, θ^{crit} es el ángulo entre η y \mathbf{P}_1 , siendo $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\}$ la base ortonormal en la cual diagonaliza \mathbf{P} . Análogamente θ^{crit} es ángulo formado entre η y la dirección de la tensión máxima τ_I , dado que σ y \mathbf{P} son coaxiales (comparar las ecuaciones (2) y (58)). Adviértase que $\{\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}\}$ representan los autovalores de σ .

4.3. Aplicación

A partir del estudio previo, se deduce que tanto el módulo de ablandamiento como el estado de tensión y la fracción de vacíos en la matriz, intervienen en las condiciones de bifurcación. Para formar una idea más clara de esta dependencia se han trazado una serie de gráficos en el espacio “ p - f ” (presión-porosidad) (figuras 2-4). Allí se dibujan los pares ordenados $[p, f]$ que satisfacen la condición de inestabilidad material (ecuación (28)), asumiendo un valor constante de la deformación plástica microscópica equivalente, en particular: $\bar{\epsilon} = 0,001$. Estos gráficos son dependientes del ángulo de Lode (Gao y Kim, 2005), efecto que hemos incluido a través de la elección (arbitraria) del tensor desviador “ \mathbf{n} ”, véase ecuación (2). Para el análisis bidimensional a seguir adoptamos la notación $\mathbf{n} = \sqrt{3/2} [S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_{zz}] / (\|\mathbf{S}\|)$, con S_{ij} las componentes de \mathbf{S} . Con esta suposición asumiremos que τ_I y τ_{II} están en el plano xy . Como hipótesis simplificativa, se adopta además para este estudio un mecanismo de endurecimiento lineal ($\partial\sigma_0/\partial\bar{\epsilon} = H = \text{cte}$). La escala de colores utilizada en los gráficos intenta establecer un rango acotado para el ángulo crítico de bifurcación (θ^{crit}), computado según (29).

El comportamiento material está caracterizado por los parámetros mecánicos dados a continuación: $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1,0$, $q_3 = 2,25$, $f_0 = 0$ (porosidad inicial), $f_N = 0,04$, $s_N = 0,1$, $\epsilon_N = 0,3$, $\sigma_y/E = 1/300$, $\nu = 0,3$, $f_C = 0,15$, $f_F = 0,25$.

Nótese que el modelo de Gurson es capaz de predecir diferentes direcciones admisibles de localización. En este sentido se observa cómo la relación de triaxialidad $T = -p/q$ (ver figura (5)), juega un papel importante en el ángulo crítico de bifurcación obtenido. A medida que T aumenta ($T \rightarrow \infty$), el término de crecimiento de vacíos en la ley de evolución de f (ecuación

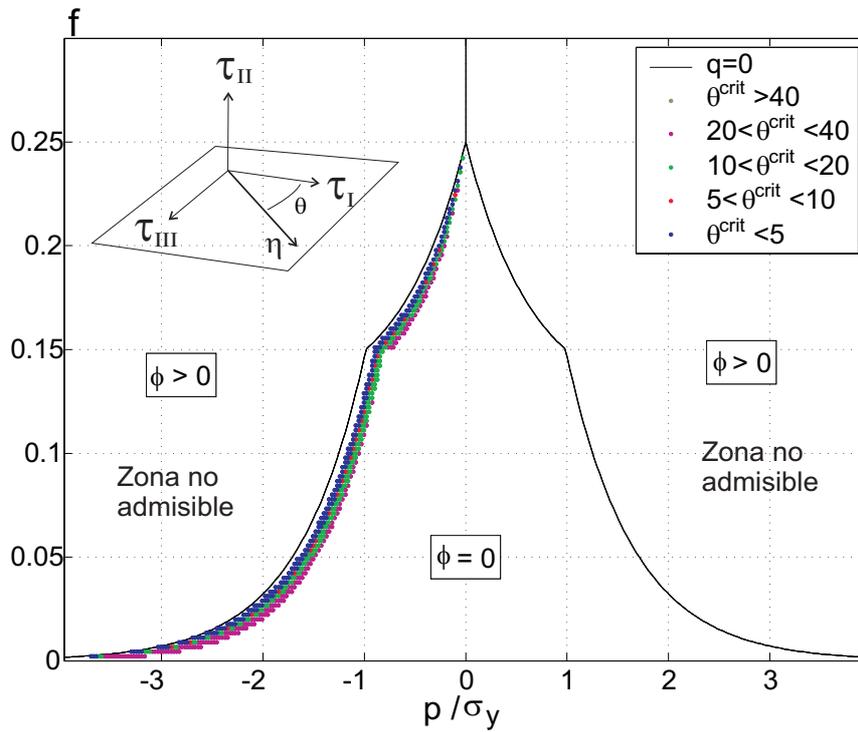


Figura 1: Análisis de bifurcación material. Modelo de Gurson: $\mathbf{n} = [1, -0,5, 0, -0,5]^T$; $H = 0$; $\bar{\varepsilon} = 0,001$.

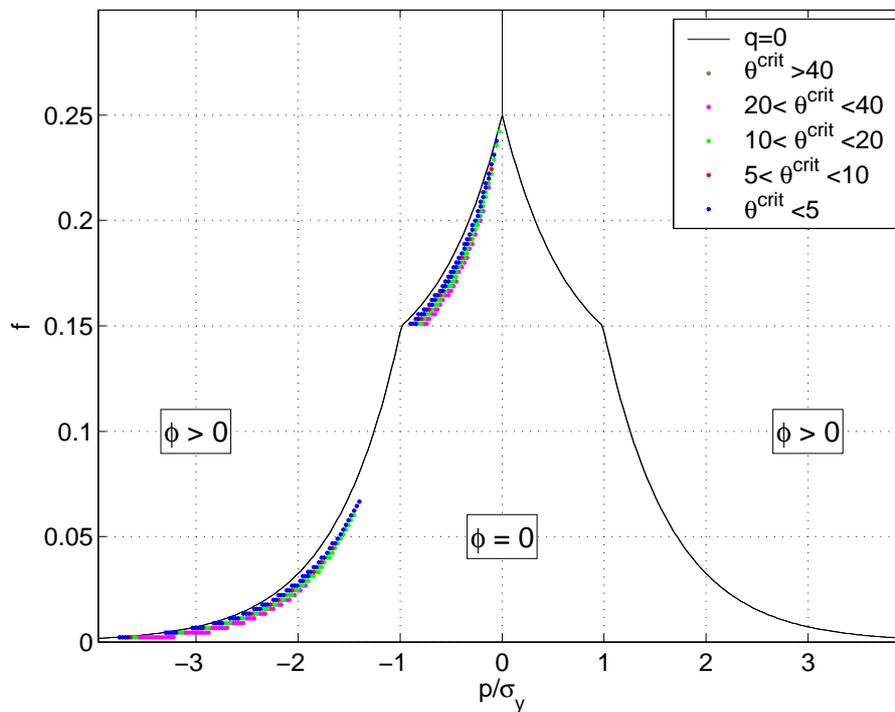


Figura 2: Análisis de bifurcación material. Modelo de Gurson: $\mathbf{n} = [1, -0,5, 0, -0,5]^T$; $H = E/100$; $\bar{\varepsilon} = 0,001$.

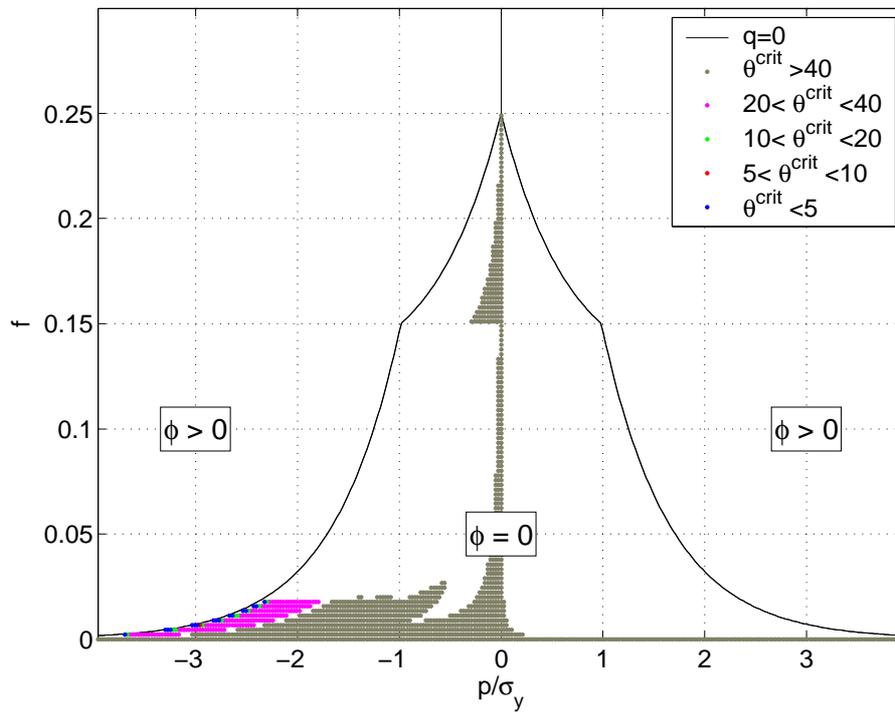


Figura 3: Análisis de bifurcación material. Modelo de Gurson: $\mathbf{n} = [(3/4)^{1/2}, -(3/4)^{1/2}, 0, 0]^T$; $H = 0$; $\bar{\varepsilon} = 0,001$.

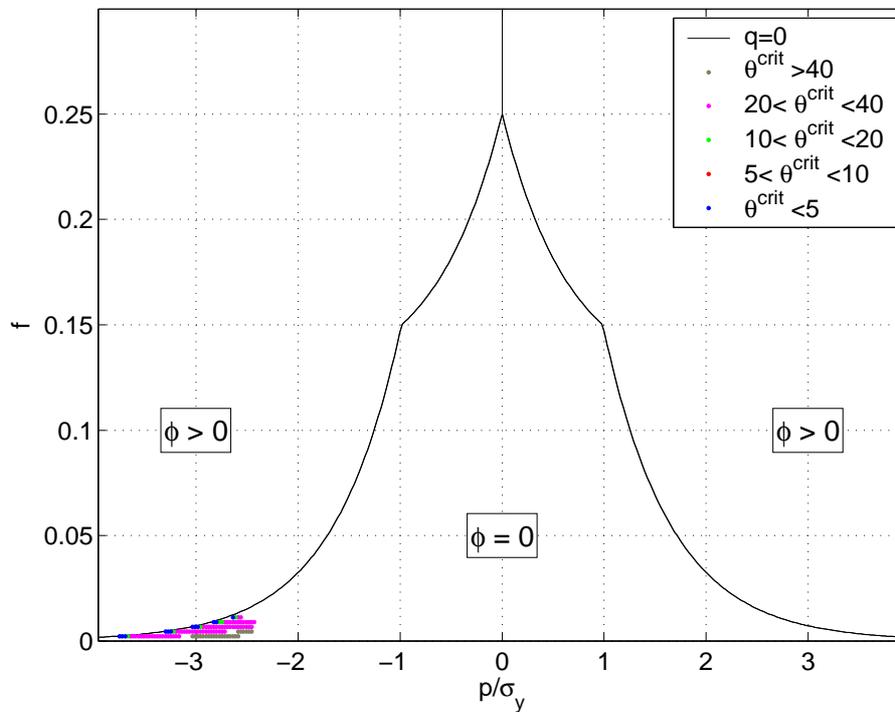


Figura 4: Análisis de bifurcación material. Modelo de Gurson: $\mathbf{n} = [(3/4)^{1/2}, -(3/4)^{1/2}, 0, 0]^T$; $H = E/100$; $\bar{\varepsilon} = 0,001$.

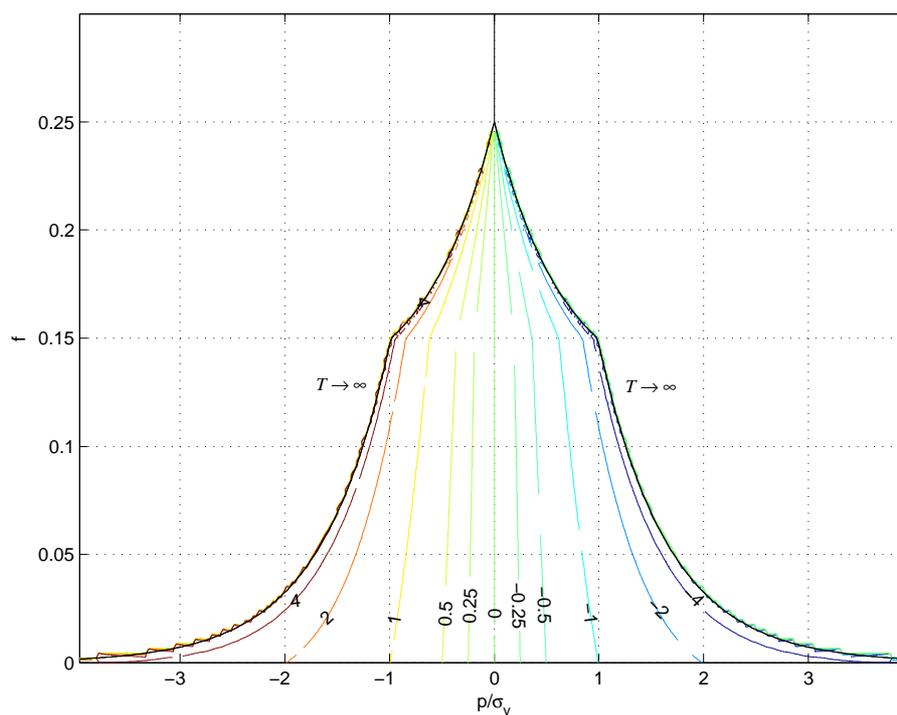


Figura 5: Curvas de nivel del factor de triaxialidad: $T = -p/q$.

10) se torna predominante, la función de fluencia adquiere mayor curvatura marcando diferencias importantes con respecto al criterio de Mises. El estudio de bifurcación indica en este caso que η y P tienden a alinearse ($\theta^{crit} \rightarrow 0$), con lo cual a un modo de apertura de fisura (modo I). Esta situación es inadmisibles en la ley J_2 estándar, la cual postula invariablemente mecanismos de tipo banda de corte. Es importante remarcar esta diferencia crucial respecto al modelo J_2 .

Se puede observar en las figuras (2-5) la modificación introducida por la ecuación (3).

5. EL PROBLEMA DE ESTIRAMIENTO UNIAXIAL DE UNA BARRA

En esta sección se muestra la capacidad que posee el modelo de Gurson para capturar diferentes modos de localización sean: (a) bandas de cortante (“shear bands”), típico de la falla que presentan materiales dúctiles en estado plano de deformación, o (b) modos de falla I donde el material, en la zona de localización, está sujeto a una deformación predominantemente dilatacional, comúnmente observada en falla de materiales frágiles.

Para poner de manifiesto esta observación, se presentan dos casos de especímenes traccionados hasta la pérdida total de capacidad resistente. El primero corresponde a un estado de deformación plana, representando una barra de sección rectangular, y el segundo una barra cilíndrica con simetría de revolución.

Los resultados, con datos de material que corresponden a un acero, se observan en la figura (6). En la figura (6-a) se pintan aquellos elementos finitos que permanecen en estado de carga al finalizar el proceso. Este resultado pone de manifiesto el fenómeno de carga-descarga que se produce en las vecindades de la zona con deformaciones localizadas. La figura (6-c), mediante mapas de la variable f , muestra la zona donde se ha producido la degradación total del material ($f > 0,2$).

Las deformaciones plásticas de la barra cilíndrica (figura (6-e)) y que corresponden a unos instantes previos a la pérdida total de capacidad de carga, muestran la tendencia a formar el cono

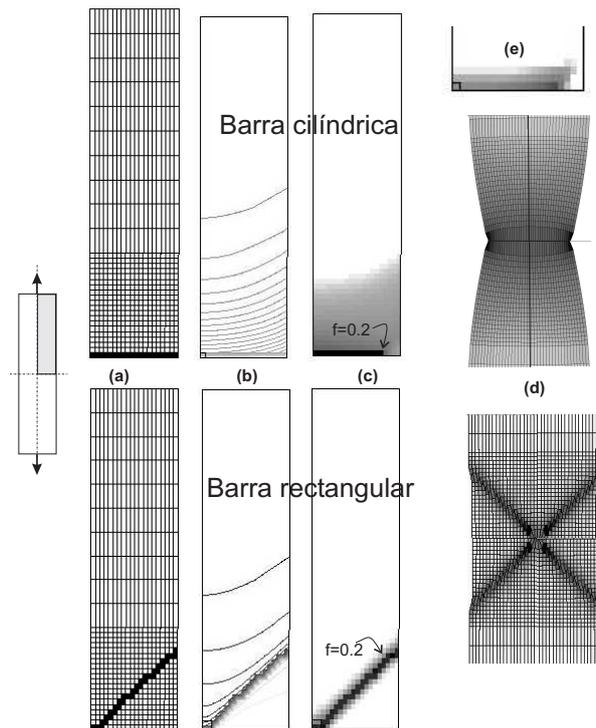


Figura 6: Diferentes modos de localización de deformaciones para una barra cilíndrica (simetría de revolución) y rectangular (estado plano de deformación): (a) Elementos finitos que permanecen en la condición de carga en las etapas finales del proceso; (b) Iso-líneas de desplazamiento. (c) Mapas de fracción de vacíos; (d) Deformadas. (e) Deformación plástica equivalente.

característico de rotura que se observa experimentalmente en este tipo de ensayos. No obstante, el modelo no consigue desarrollar finalmente ese modo de falla, ya que la zona localizada se mantiene en el plano horizontal.

5.1. Modo de localización vs. modo de bifurcación analítico para el caso de axisimetría

Se considera que el inicio de localización de deformaciones corresponde con aquel momento en que una región de ancho infinitamente pequeña permanece en el régimen de carga plástica, mientras que su vecindad descarga elásticamente. Estudiando detalladamente este fenómeno en el test de la barra cilíndrica, e introduciendo el concepto alternativo de que esta situación se debe dar ante un fenómeno de inestabilidad de material, se encuentra el siguiente resultado.

Realizando el análisis de bifurcación analítico de la sección precedente, se determina el ángulo crítico de bifurcación que se mantiene aproximadamente en $\theta^{crit} = 35^\circ$ con respecto a la horizontal. Los vectores en la figura (7-b) muestran esta dirección para todos los puntos de la malla de EF. Este ángulo no cambia sustancialmente, ni siquiera después de haberse obtenido la condición de criticidad material. La figura (7) corresponde al instante t_B en que esa condición crítica se verifica en la región central de la barra. Se puede observar que (figura (7)-c), en ese instante de tiempo, no se produce la situación de carga-descarga en una zona del tamaño de un elemento finito.

Prosiguiendo con el proceso de carga, en una etapa mucho más avanzada, se observa la típica localización de deformaciones, figura (8-b). Ese instante corresponde al tiempo t^{loc} cuando el tensor de localización admite una normal η vertical, o muy aproximadamente ($\theta^{loc} \approx 0^\circ$), de tal modo que se verifica $det(Q^{ep}) = det(\eta \cdot C^{ep} \cdot \eta) = 0$. Esta nueva dirección θ^{loc} no coincide con

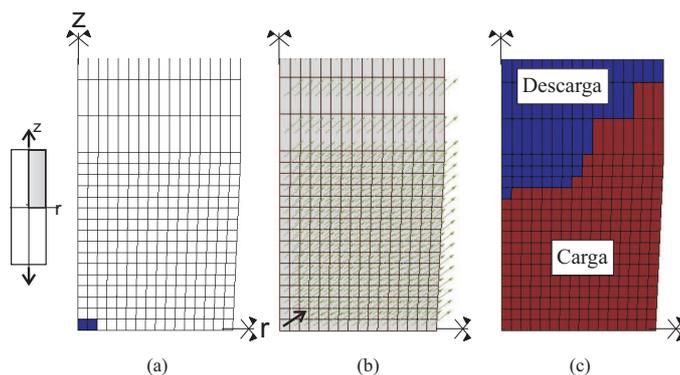


Figura 7: Resultados obtenidos tras aplicar la solución analítica del problema de inestabilidad material a la barra axisimétrica. (a) Elementos que al paso actual bifurcan (satisfacen la condición (28)). (b) Dirección θ^{crit} de bifurcación, según ecuación (29). (c) Estado de carga-descarga actual (no localizado).

la solución θ^{crit} , la cual se mantiene en 35° , ver figura (8-a). La misma conclusión se obtiene para los instantes posteriores, en cada uno de los puntos ubicados en la sección $z = 0$ que sucesivamente van localizando, véase figura (8-c-d), a medida que el proceso de carga avanza.

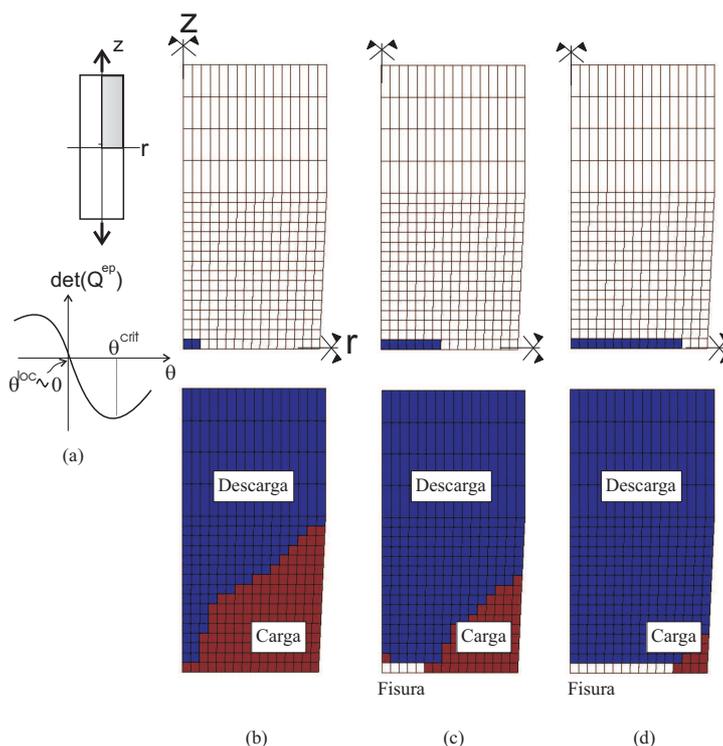


Figura 8: Proceso de falla por fractura dúctil en modo I. Parte superior: elementos que satisfacen bifurcación material para $\theta^{crit} \approx 0$. Parte inferior: elementos en régimen de carga-descarga (localización). (a) Diferencias entre ángulos θ^{crit} y θ^{loc} . (b) Estado inicial. (c) Estado intermedio. (d) Estado final.

De este resultado se observa claramente que la condición determinada por el criterio de inestabilidad de material, $H^{crit} = \max\{\bar{H}\}$, no necesariamente marca el inicio de la etapa de localización de deformaciones, ni tampoco determina el modo de falla que se desarrolla. Para este caso simple de la barra cilíndrica traccionada es directo de concluir que una banda de localización direccionada según $\theta^{crit} \approx 30^\circ$, no genera un mecanismo cinemáticamente compatible. Por lo tanto, el inicio de la localización de deformaciones se posterga hasta conseguir

un mecanismo viable al tiempo t^{loc} .

5.2. Análisis de dependencia de malla

Una consecuencia directa de la inestabilidad a nivel constitutivo es la dependencia patológica de la respuesta numérica con respecto al tamaño de malla. Para poner en evidencia este fenómeno espúreo, considérese el problema de tracción de barra presentado anteriormente. El mismo se resuelve ahora para tres configuraciones de mallas, en donde el tamaño de los elementos en la zona de falla se reduce sucesivamente a la mitad, ver figura (9). Los datos del material son: $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1,0$, $q_3 = 2,25$, $f_0 = 0,01$ (porosidad inicial), $f_N = 0,04$, $s_N = 0,1$, $\varepsilon_N = 0,3$, $\sigma_y/E = 1/100$, $\nu = 0,3$, $H = 0$, $f_C = 0,15$, $f_F = 0,25$.

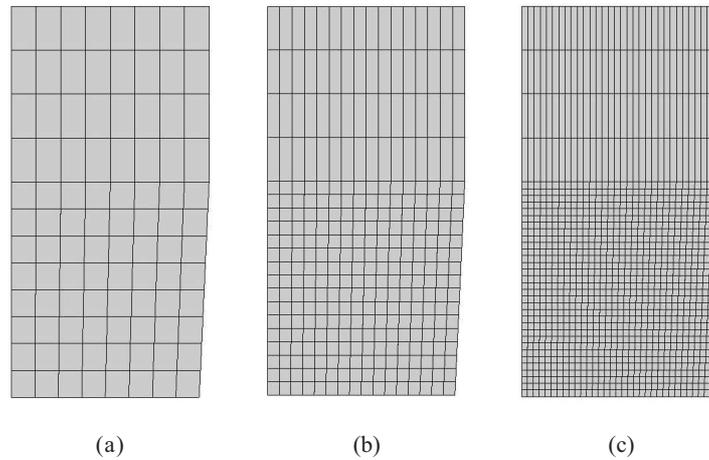


Figura 9: Estudio de objetividad con relación al tamaño de malla. Diferentes niveles de discretización: (a) M_1 : tamaño característico de elementos $h \approx 0,17$. (b) M_2 : tamaño característico de elementos $h \approx 0,07$. (c) M_3 : tamaño característico de elementos $h \approx 0,035$.

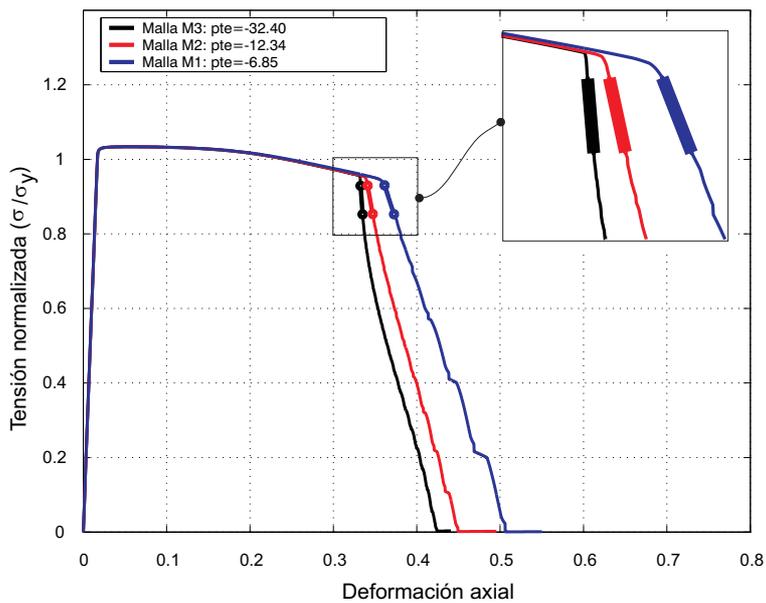


Figura 10: Curva de respuesta tensión vs. deformación axial, para las diferentes mallas utilizadas (M_1 , M_2 y M_3).

La curva de respuesta obtenida para cada nivel de discretización se muestra en la figura (10). La principal diferencia a observar es el *cambio abrupto de pendiente en el régimen post-crítico*, cuyos valores aproximados se indican en las leyendas del mismo gráfico. Lógicamente la energía disipada a partir del momento en que se produce localización se torna fuertemente dependiente del tamaño del elemento finito, sin que se llegue a un valor de convergencia físicamente razonable, a menos que se introduzca algún mecanismo de regularización constitutiva.

6. SIMULACIÓN DE FRACTURA DÚCTIL EN DEFORMACIÓN PLANA

En un trabajo reciente Tvergaard y Needleman (2005) simulan numericamente la resistencia de un acero al crecimiento de grieta. Asumen un estado de deformación plana y dan particular atención a los efectos microestructurales. Consideran dos escalas diferentes de vacíos (del orden de 1 y 100 $[\mu m]$ respectivamente) que interactúan entre sí. En este trabajo los mecanismos de crecimiento y coalescencia de los vacíos de mayor tamaño se simulan explícitamente introduciendo agujeros en la malla de elementos finitos, con una distribución geométrica especificada. La malla de elementos finitos, por ende, es del orden de tales defectos. La nucleación, crecimiento y coalescencia de las micro-cavidades de menor tamaño, se consideran asumiendo un modelo de Gurson para el material base.

La referencia mencionada realiza un análisis 3D para incluir el efecto tridimensional de los vacíos, aunque también presentan resultados de un trabajo previo donde la suposición de simetría plana incluye a los defectos, en este caso defectos cilíndricos. Son precisamente estos resultados del modelo 2D, los que utilizamos como base comparativa para el estudio a seguir. Otra observación importante es que, según el criterio de estos autores, al incluir los defectos de mayor tamaño, la solución de elementos finitos obtenida *no es sensible al tamaño de la malla*.

El problema en estudio corresponde a una rodaja de material con una fisura, como se muestra en la figura (11-a), sujeto a un modo I de carga. La medida de referencia es $h = 200 [\mu m]$ y $b_0 = 0,625h$. El radio de los vacíos de mayor tamaño es $\phi_V = 0,169h$ y se definen en un arreglo regular de $2h \times 2h$, lo que determina una fracción de poros de valor $f = 0,045$.

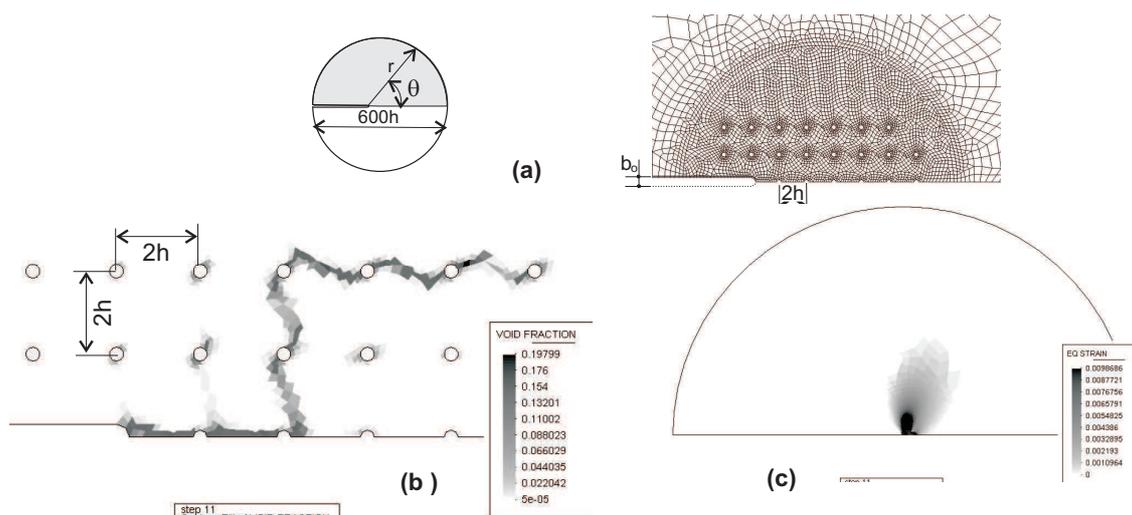


Figura 11: Fractura dúctil en estado plano de deformación: (a) Modelo geométrico. (b) Isomapas de porosidad al finalizar el análisis. (c) Zona con deformación plástica equivalente no nula.

El material, que se corresponde con un acero, queda caracterizado mediante los siguientes parámetros mecánicos: $\sigma_y/E = 0,0025$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, $f_N = 0,04$, $s_N = 0,1$

y $\varepsilon_N = 0,3$. Se adopta una ley de endurecimiento potencial del tipo:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_y} = \left[1 + \frac{E\bar{\varepsilon}}{\sigma_y} \right]^N \quad (30)$$

con $N = 0,1$. Para simular el modo I de carga, se impone un desplazamiento en todo el contorno de valor:

$$u_x = \frac{2(1 + \nu)K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) [1 - 2\nu + \sin^2(\theta/2)] \quad (31)$$

$$u_y = \frac{2(1 + \nu)K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) [2 - 2\nu - \cos^2(\theta/2)] \quad (32)$$

en donde el factor de intensidad de tensiones K_I se relaciona con la integral J asumiendo fluencia en pequeña escala: $J = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{E}$.

6.1. Resultados

En la figura (11-b) mostramos el campo de fracción de vacíos para un estado avanzado del proceso. En este caso, observamos que la propagación de la fisura no se mantiene en el mismo plano de la grieta original. Esta situación difiere de lo reportado en Tvergaard y Needleman (2005). Sin embargo, en este aspecto, nuestro resultado se aproxima a los mostrados en dicha referencia para los modelos 3D. En la figura (11-c) se muestra además la distribución de la deformación plástica equivalente microscópica ($\bar{\varepsilon}$), que indica la correcta suposición de fluencia en pequeña escala adoptada.

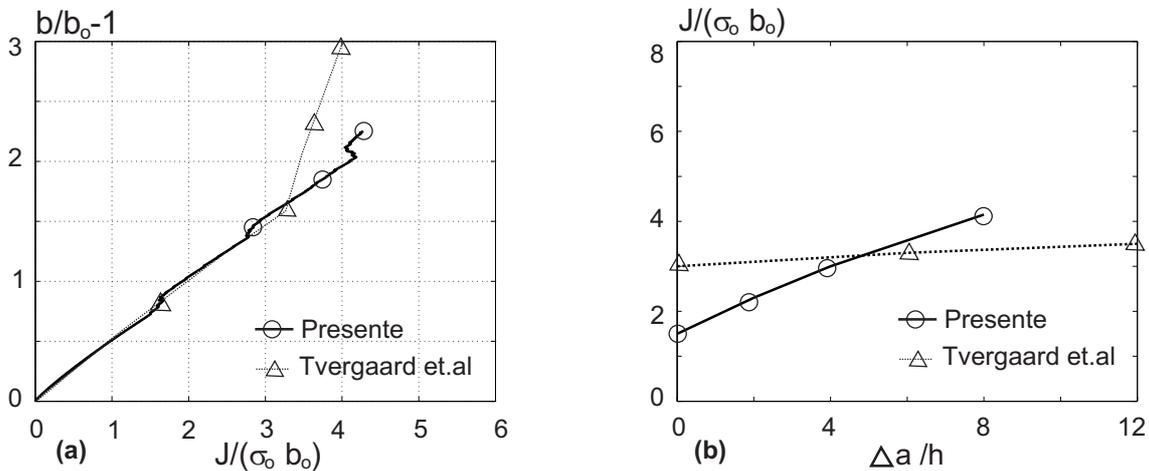


Figura 12: Fractura dúctil en estado plano de deformación: (a) Curva de apertura de fisura. (b) Curva de resistencia al crecimiento de fisura.

En la figura (12-a) mostramos la apertura de fisura ($b - b_0$), normalizada con b_0 , versus el nivel de carga caracterizado por el valor de la integral J normalizada. La misma figura muestra el resultado obtenido en la publicación tomada como base para la comparación. En la figura (12-b) se observa la curva de resistencia del material. El término Δa corresponde al incremento de longitud de fisura, normalizado con h . Para trazar esta curva, y siguiendo la referencia mencionada, hemos considerado que el extremo de la fisura está ubicada en aquel punto donde f ha alcanzado el valor $f = 0,1$.

Ambos resultados, en comparación con los publicados, muestran un nivel de aproximación aceptable si se considera que los mismos han sido obtenidos a través de suposiciones más fuertes. En particular, los defectos de mayor tamaño, en nuestro caso son verdaderos vacíos y además, dado que actualmente el modelo está en desarrollo, hemos restringido el estudio a la hipótesis de pequeñas deformaciones.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizan diversos tópicos vinculados con la ley constitutiva de Gurson. En primera instancia se presenta un algoritmo de integración implícito suficientemente robusto que nos ha permitido obtener la respuesta numérica hasta la falla por generación de fisuras dúctiles.

Se ha extendido además la aplicación de una estrategia analítica para determinar las condiciones compatibles con la *inestabilidad material*. En particular las soluciones obtenidas son exactas para el modelo en estudio. A diferencia de lo que sucede en la mecánica de falla frágil, en circunstancias bastante comunes no existe una completa concordancia entre la dirección crítica de bifurcación (θ^{crit}) obtenida analíticamente (que por cierto es la *primera orientación admisible*) con el modo de deformación que efectivamente se desarrolla en el sólido. Sin embargo se ha demostrado que el modo de falla final corresponde a una dirección admisible de bifurcación, la cual se activa posteriormente ($t^{loc} > t_B$) si se compara con respecto a la condición crítica inicial dada por el análisis de inestabilidad material (ecuación 28). Esta observación, aunque descrita en términos diferentes, ya fue presentada por Tvergaard (1990).

La simulación numérica de los mecanismos intervinientes en la punta de una fisura se desarrolló asumiendo la existencia de dos niveles de micro-cavidades: (i) una escala de macro vacíos introducida directamente en la definición geométrica del modelo y (ii) una escala de micro poros modelada desde un punto de vista fenomenológico a través del modelo de Gurson. Los resultados obtenidos en términos de curvas de resistencia comparan razonablemente bien con aquellos de las referencias citadas.

En el contexto del modelado de fractura dúctil, surgen diversas alternativas como líneas de trabajo futuro. Entre ellas se pueden mencionar: la formulación general en teoría de grandes deformaciones, el desarrollo de un modelo regularizado para evitar el problema clásico de dependencia de malla, el planteamiento de modelos más elaborados basados en el concepto de multi-escalas, la incorporación de leyes discretas cohesivas que gobiernen el comportamiento en la punta de la fisura, etc.

A. ANEXOS

A.1. Forma explícita de las componentes del Jacobiano

Los términos del jacobiano del sistema de ecuaciones se computan como sigue:

$$J_{11} = \frac{\partial R_1}{\partial \Delta \varepsilon_p^p} = \frac{1}{2 \sigma_0^2} [4q + 9 q_1 q_2^2 \kappa f^* \Delta \varepsilon_q^p \cosh(\alpha)] \quad ; \quad \alpha = -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_0} \quad (33)$$

$$J_{12} = \frac{\partial R_1}{\partial \Delta \varepsilon_q^p} = \frac{1}{\sigma_0^2} [-6 \mu \Delta \varepsilon_p^p + 3 q_1 q_2 \sigma_0 f^* \sinh(\alpha)] \quad (34)$$

$$J_{13} = \frac{\partial R_1}{\partial \bar{\varepsilon}} = -\frac{1}{2 \sigma_0^3} [8q \Delta \varepsilon_p^p + 3 q_1 q_2 f^* \Delta \varepsilon_q^p (3 q_2 p \cosh(\alpha) + 2 \sigma_0 \sinh(\alpha))] \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad (35)$$

$$J_{14} = \frac{\partial R_1}{\partial \Delta f} = \frac{3}{\sigma_0} q_1 q_2 \Delta \varepsilon_q^p \sinh(\alpha) \frac{\partial f^*}{\partial f} \quad (36)$$

$$J_{21} = \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \varepsilon_p^p} = \frac{3}{\sigma_0} q_1 q_2 \kappa f^* \sinh(\alpha) \quad (37)$$

$$J_{22} = \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \varepsilon_q^p} = -\frac{6}{\sigma_0^2} q \mu \quad (38)$$

$$J_{23} = \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}} = -\frac{1}{\sigma_0^3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} [2 q^2 + 3 q_1 q_2 p \sigma_0 f^* \sinh(\alpha)] \quad (39)$$

$$J_{24} = \frac{\partial R_2}{\partial \Delta f} = 2 \frac{\partial f^*}{\partial f} [q_1 \cosh(\alpha) - q_3 f^*] \quad (40)$$

$$J_{31} = \frac{\partial R_3}{\partial \Delta \varepsilon_p^p} = -\frac{\kappa \Delta \varepsilon_p^p + p}{(1-f) \sigma_0} \quad (41)$$

$$J_{32} = \frac{\partial R_3}{\partial \Delta \varepsilon_q^p} = \frac{-3 \mu \Delta \varepsilon_q^p + q}{(1-f) \sigma_0} \quad (42)$$

$$J_{33} = \frac{\partial R_3}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}} = \frac{(p \Delta \varepsilon_p^p - q \Delta \varepsilon_q^p) \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} - \sigma_0^2 (1-f)}{(1-f) \sigma_0^2} \quad (43)$$

$$J_{34} = \frac{\partial R_3}{\partial \Delta f} = \frac{(p \Delta \varepsilon_p^p - q \Delta \varepsilon_q^p)}{(1-f)^2 \sigma_0} \quad (44)$$

$$J_{41} = \frac{\partial R_4}{\partial \Delta \varepsilon_p^p} = (1-f) \quad (45)$$

$$J_{42} = \frac{\partial R_4}{\partial \Delta \varepsilon_q^p} = 0 \quad (46)$$

$$J_{43} = \frac{\partial R_4}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}} = \Delta \bar{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{A}_m}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}} + \mathcal{A}_m \quad (47)$$

$$J_{44} = \frac{\partial R_4}{\partial \Delta f} = -(\Delta \varepsilon_q^p + 1) \quad (48)$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} J_{13} & J_{14} \\ J_{23} & J_{24} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} J_{31} & J_{32} \\ J_{41} & J_{42} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} J_{33} & J_{34} \\ J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \quad (52)$$

A.2. Otras expresiones de interés

En este apéndice se escriben las expresiones finales que adquieren ciertas variables definidas para el modelo de Gurson e introducidas en las secciones previas:

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_0} \sinh(\alpha) \mathbb{I} + \frac{3}{\sigma_0^2} \mathbf{S} \quad ; \quad \alpha = -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_0} \quad (53)$$

$$\text{tr}(\mathbf{M}) = (\mathbb{I} : \mathbf{M}) = \frac{3 q_1 q_2 f^*}{\sigma_0} \sinh(\alpha) \quad (54)$$

$$\mathbf{C}^e = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{I} = \kappa \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \right] \quad (55)$$

$$\mathbb{I} = \delta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad ; \quad \mathbb{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \quad (56)$$

$$\delta_{ij} : \text{Delta de Kronecker} \quad (57)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{C}^e : \mathbf{M}) = \kappa \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbb{I} + \frac{6\mu}{\sigma_0^2} \mathbf{S} \quad (58)$$

$$(\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M}) = \frac{18\mu}{\sigma_0^4} \|\mathbf{S}\|^2 + \kappa [\text{tr}(\mathbf{M})]^2 \quad (59)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}) = -p \text{tr}(\mathbf{M}) + \frac{3}{\sigma_0^2} (\mathbf{S} : \mathbf{S}) \quad (60)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \phi}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{f}} = [2 q_1 \cosh(\alpha) - 2 q_3 f^*] \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{f}} \quad (61)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \left[-\frac{2 q^2}{\sigma_0^3} + \frac{p}{\sigma_0} \text{tr}(\mathbf{M}) \right] \underbrace{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_H \quad (62)$$

REFERENCIAS

- A. Anca, P.J. Sánchez, y J. Risso. Implementación numérica del modelo constitutivo de Gurson-Tvergaard-Needleman. In M.B. Rosales, V.H. Cortínez, y D.V. Bambill, editors, *Mecánica Computacional, Vol. XXII*, pages 1867–1877, 2003.
- N. Aravas. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:1395–1416, 1987.
- C. Betegon, J.J. del Coz, y I. Peñuelas. Implicit integration procedure for viscoplastic gurson material. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, In press. Available on line at www.sciencedirect.com, 2006.
- C.C. Chu y A. Needleman. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Engng. Materials Technol*, 102:249–256, 1980.
- X. Gao, J. Faleskog, y C.F. Shih. Cell model for nonlinear fracture analysis. Part II: fracture process calibration and verification. *Int. J. Fract.*, 89:375–398, 1998-a.
- X. Gao y J. Kim. *Int. J. Solids Structures*, In press. Available on line at www.sciencedirect.com, 2005.
- A.L. Gurson. *Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth and coalescence*. PhD thesis, Brown University, 1975.

- A.L. Gurson. Continuum of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I: Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng. Materials Technol. ASME*, 99:2–15, 1977.
- M. Kojic, I. Vlastelica, y M. Zivkovic. Implicit stress integration procedure for large strain deformation of Gurson model. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 53:2701–2720, 2002.
- A. Needleman y V. Tvergaard. An analysis of ductile rupture modes at crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 35:151–183, 1987.
- J. Oliver y A.E. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, 193:2987–3014, 2004.
- N. Ottosen y K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Structures*, 27(4):401–421, 1991.
- J. Rice. The localization of plastic deformation. In W. Koiter, editor, *Theoretical and Applied Mechanics, 14th IUTAM Congress*, pages 207–220, Amsterdam, North-Holland, 1976.
- J. Rice y J. Rudnicki. A note on some features of the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids Structures*, 16:597–605, 1980.
- J. Rudnicki y J. Rice. Condition for the localization of deformations in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371–394, 1975.
- P.F. Thomason. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of micro-voids. *Acta Metall.*, 33:1087–1095, 1985.
- P.F. Thomason. A view on ductile-fracture modelling. *Fatig. Fract. Engng. Mat. Struct.*, 21: 1105–1122, 1998.
- V. Tvergaard. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fract.*, 17:389–407, 1981.
- V. Tvergaard. On localization in ductile materials containing spherical voids. *Int. J. Fract.*, 18: 237–252, 1982.
- V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27, 1990.
- V. Tvergaard y A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.*, 32:157–169, 1984.
- V. Tvergaard y A. Needleman. Three dimensional microstructural effects on plane strain ductile crack growth. *Int. J. Solids and Structures*, In press. Available on line at www.sciencedirect.com, 2005.
- L. Xia, C.F. Shih, y J.W. Hutchinson. Computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. *J. Mech. Phys. Solids*, 43:389–413, 1995.
- Z.L. Zhang. On the accuracies of numerical integration algorithms for Gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 121:29–44, 1995.
- Z.L. Zhang. A complete Gurson model. Nonlinear fracture and damage mechanics. In M.H. Aliabadi, editor, *Computational Mechanics Publications*, 1998.
- Z.L. Zhang, C. Thaulow, y J. Odegard. A complete Gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67:155–168, 2000.