

RESPUESTA DINÁMICA DE UNA PLATAFORMA FLOTANTE CON AMARRES NO LINEALES

Mario R. Escalante^{a,b}, Marta B. Rosales^{a,c} y Carlos P. Filipich^b

^a*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina,
email: escalam@frcu.utn.edu.ar*

^b*Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional,
Ing. Pereyra 676, 3260 C. del Uruguay (E.R), Argentina*

^c*CONICET,*

email: mrosales@criba.edu.ar

^d*Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos, Fac. Reg. B. Blanca, Universidad Tecnológica Nacional,
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina*

email: cfilipich@yahoo.com.ar

Keywords: dinámica, amarres no lineales, plataforma flotante.

Resumen. Se analiza en el presente trabajo la respuesta dinámica de una plataforma rígida flotante con amarres poco tensos (catenarias) mediante el uso de las series de potencias para el planteo del sistema de ecuaciones diferenciales gobernante, fuertemente no lineal. Los autores han desarrollado previamente modelos más simplificados de este problema. El caso estudiado corresponde a un modelo en el plano con 3 grados de libertad, q : desplazamiento horizontal (“surge”), h : desplazamiento vertical (“heave”), α : rotación (“pitch”). En la configuración física del modelo, se acepta que el cable adopta una forma de catenaria con su extremo superior sujeto a la plataforma flotante y el extremo inferior amarrado al fondo del mar. La simulación de las funciones intervinientes en series de potencias permite obtener, a través de una adecuada inversión de dichas series, un algoritmo de recurrencia para determinar la tensión de los amarres sin truncamientos, en todo instante. Estas fuerzas constituyen el aporte no lineal en el sistema diferencial. Las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema así obtenidas, son resueltas con rutinas estándares de integración y la respuesta del sistema es analizada para investigar diferentes tipos de fenómenos dinámicos. Se consideran dos modelos diferentes: para pequeños valores de α y para cualquier valor α . Para ambos modelos se estudian distintos casos como ser diferentes anchos de plataforma, condiciones iniciales y frecuencias de excitación. Las trayectorias en el tiempo y los diagramas de fase, así como los diagramas de Poincaré indican el comportamiento fuertemente no lineal inducido por los amarres.

1 INTRODUCCIÓN

Existen muchas aplicaciones marítimas de ingeniería cuyo estudio involucra la interacción entre la superficie libre del mar con objetos flotantes amarrados mediante cables poco tensos. Las fuerzas de amarres de estos cables son parámetros importantes del diseño y necesitan ser estimadas. Algunas de estas estructuras podemos circunscribirlas dentro de la clase de sistemas de ingeniería oceánicos vinculados elásticamente al fondo oceánico, como por ejemplo: boyas, barcos tanques, pontones, plataformas semisumergibles y barcazas.

Un sistema de Ingeniería Oceánica (IO) puede ser representado por diferentes modelos, y la complejidad de los mismos depende sobre todo de los grados de libertad (GDL) que caracterizan el movimiento y también de la magnitud relativa entre sus variables dinámicas.

En este trabajo se centra el análisis en el comportamiento dinámico de una plataforma rígida flotante con amarres poco tensos mediante el uso de las series de potencias para el planteo del sistema de ecuaciones diferenciales gobernante, fuertemente no lineal. Es un tipo especial de estructuras que en inglés se las suele denominar CALM (catenary anchor leg mooring). Se trata de una boya amarrada mediante un cierto número de cadenas poco tensas (catenarias), generalmente para uso de iluminación, portadoras de grúas o torres y también estructuras intermedias en transporte de petróleo o rompeolas.

Este tipo de sistema estructural exhibe un comportamiento complejo debido a no linealidades provenientes principalmente de la configuración geométrica en cada instante (efecto de catenaria) de los cables de amarre. La dinámica de estructuras flotantes de modelos simplificados de un grado de libertad han sido desarrollados por varios autores (Esmailzadeh y Goodarzi, 2001, Sannasiraj et al, 1998, Sarkar and Eatock Taylor, 2000, Smith and MacFarlane, 2001) En particular, los autores del primer trabajo mediante sucesivos truncados en las expansiones de Taylor obtuvieron una ecuación del tipo Duffing.

En este trabajo se utiliza el método de series de potencia en forma sistematizada. Anteriormente los autores resolvieron ecuaciones diferenciales fuertemente no lineales con esta metodología (Filipich y Rosales, 2002, Filipich *et al*, 2004).

Se analizan dos alternativas de un modelo de 2D diferentes con tres grados de libertad: q : desplazamiento horizontal (“surge”), h : desplazamiento vertical (“heave”), α : rotación (“pitch”). En el primero de ellos se tiene en cuenta la hipótesis adicional de que α toma sólo valores pequeños, no así en el segundo modelo. Se trata de un modelo más complejo, extensión de otros desarrollados previamente por los autores (Rosales *et al*, 2003, Rosales y Filipich, 2006, Escalante *et al*, 2005). La parte inicial del presente estudio fue reportada en Mecom 2005 (Escalante *et al*, 2005).

Se realiza un estudio paramétrico para evaluar los cambios cualitativos (bifurcaciones) de la respuesta dinámica.

El análisis se centra en la no linealidad aportada por los amarres. Los efectos hidrodinámicos son simplificados a un par de fuerzas armónicas horizontal y vertical. En una etapa futura se incluirán otros enfoques para estas acciones.

Para ambos modelos se analiza el comportamiento dinámico de la estructura tomando como parámetros: a) el ancho de la plataforma, b) la frecuencia de excitación, c) las condiciones iniciales. Las trayectorias en el tiempo y los diagramas de fase, así como los diagramas de Poincaré indican el comportamiento fuertemente no lineal inducido por los amarres.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El caso analizado corresponde a un modelo 2D con 3 grados de libertad, q : desplazamiento

horizontal (“surge”), h : desplazamiento vertical (“heave”), α : rotación (pitch). En la configuración física del modelo, el cable adopta una forma de catenaria con su extremo superior sujeto a la plataforma flotante y el extremo inferior amarrado al fondo del mar. El extremo superior del cable es forzado a seguir un movimiento incluyendo desplazamientos horizontales y verticales, los cuales son inducidos por la estructura flotante interactuando con las olas.

En la Figura 1 se describe el modelo analizado en su posición de equilibrio. Aunque un modelo simplificado, se hace especial atención en la no linealidad que surge del cambio de la geometría de los cables. El método de las series de potencias permite modelar completamente tal no linealidad sin truncados previos.

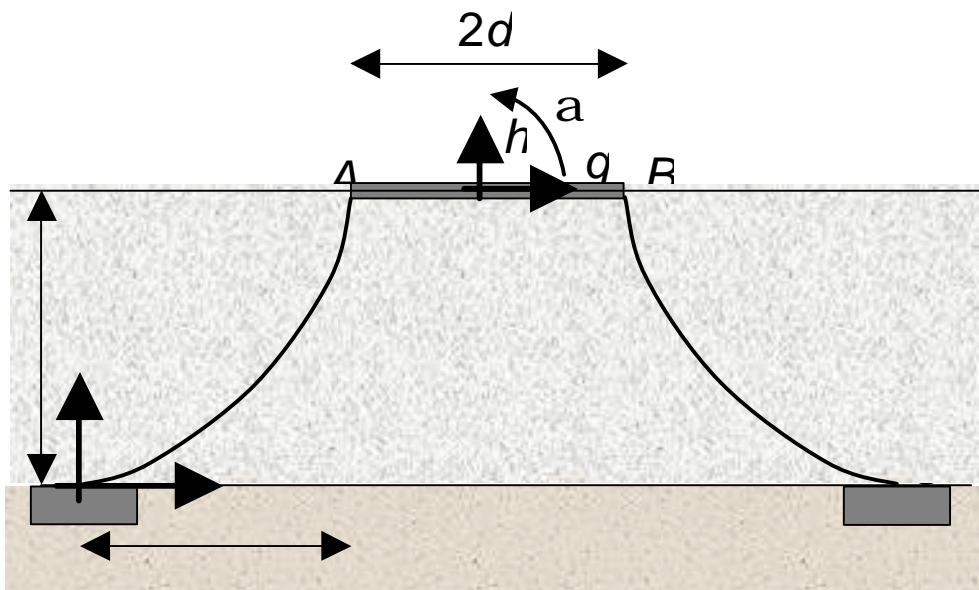


Figura 1: Configuración geométrica del modelo en equilibrio

Estudios futuros incluirán otros elementos del modelo físico con el objeto de lograr una mejor representación de la estructura, tal como las acciones hidrodinámicas sobre los cables. No obstante, la metodología propuesta aquí puede ser útil para determinar completamente la contribución a la no linealidad proveniente de los amarres.

3 ECUACIONES GOBERNANTES

El principio básico de la metodología utilizada ha sido la aplicación de series algebraicas (series de potencias) que conduce a algoritmos simples de recurrencia. La presente metodología aparece como una alternativa a los métodos aproximados para resolver ecuaciones no lineales (escalas múltiples, balance armónico, perturbación, etc.). El método asegura la exactitud teórica de la respuesta y la precisión arbitraria de los resultados. Todas las funciones del tiempo que aparecen en el sistema gobernante son expandidas en series de potencia (Filipich and Rosales, 2002, Filipich *et al*, 2004, Rosales *et al*, 2003). Se acepta que las funciones existen y son analíticas. En este trabajo esta herramienta de series de potencias es utilizada para el planteo de la ecuación diferencial gobernante a través de una conveniente inversión de series.

Las ecuaciones del movimiento son obtenidas a partir de la formulación clásica, tienen la forma de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales cuya expresión general es

$$\ddot{\mathbf{X}} + D(\dot{\mathbf{X}}) + R(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, t) \quad (1)$$

en donde $R(\mathbf{X})$ y $D(\dot{\mathbf{X}})$ son los vectores del sistema de fuerzas de recuperación del resorte no lineal y el amortiguamiento respectivamente. $F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, t)$ es el vector fuerza dependiente del tiempo que excita el sistema, y $\mathbf{X} = (q, h, \mathbf{a})$ es el vector desplazamiento del sistema que representa los movimiento surge (q : desplazamiento horizontal), heave (h : desplazamiento vertical) y pitch (\mathbf{a} : rotación en el plano $q-h$).

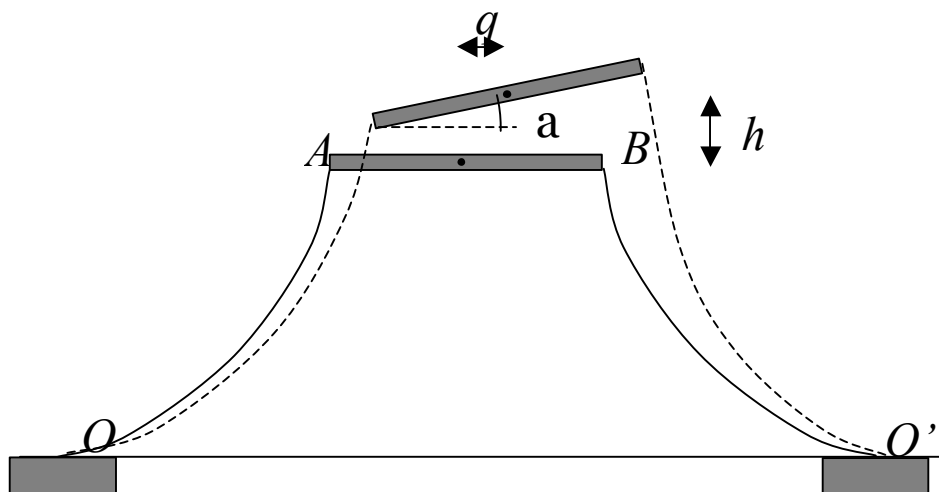


Figura 2: Configuración geométrica del modelo en un instante t

Se tiene entonces, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum M_G = I\omega_G \end{cases} \quad (2)$$

O bien

$$\begin{cases} m\ddot{q}(t) + D_x\dot{q}(t) + (S_{Ax}^l - S_{Bx}^r) = F_x(t) & (a) \\ m\ddot{h}(t) + D_y\dot{h}(t) + (S_{Ay} + S_{By}) = F_y(t) & (b) \\ I_p\ddot{\mathbf{a}}(t) + D_a\dot{\mathbf{a}}(t) + (S_{Ax}^l + S_{Bx}^r)d \sin \mathbf{a} = M(t) & (c) \end{cases} \quad (3)$$

donde m es la masa de la plataforma, D_x, D_y y D_a son los coeficientes que representan el amortiguamiento del sistema correspondientes a cada grado de libertad, S es la tensión en la cadena de amarre en la que los subíndices indican la componente horizontal (x) o vertical (y) en los puntos A y B respectivamente; y el superíndice indica el amarre derecho (r) o izquierdo (l); las acciones dinámicas externas que excitan el sistema, se representan mediante dos fuerzas horizontal y vertical F_x y F_y respectivamente y el momento $M(t)$. Por último $2d$ simboliza la longitud de la plataforma.

Se adopta la hipótesis de que los cables en sus puntos de amarre tienen tangente horizontal y se mantiene horizontal en todo instante.

Las expresiones de las componentes horizontales de las tensiones de los amarres en un ins-

tante t , quedan determinadas por medio de la Segunda Ley de Newton mediante

$$\begin{cases} S_{Ax} = S_{Ox}^l + m_c \ddot{x}_c^l & (a) \\ S_{Bx} = S_{Ox}^r - m_c \ddot{x}_c^r & (b) \end{cases} \quad (4)$$

en la que m_c es la masa de la cadena, $S_{Ox}^{l,r}$ son las tensiones en la base del amarre y $\ddot{x}_c^{l,r}$ son las aceleraciones de la masa localizada en el centro de gravedad de cada cadena. Luego, siendo $S_{Ox}^l = S_{Ox}^r$ resulta

$$S_{Ax} - S_{Bx} = m_c (\ddot{x}_c^l + \ddot{x}_c^r) \quad (5)$$

y

$$S_{Ax} + S_{Bx} = S_{Ox}^l + S_{Ox}^r + m_c (\ddot{x}_c^l - \ddot{x}_c^r) \quad (6)$$

Ahora bien, si l_c es la longitud de la cadena y denominamos x_c es la abscisa del centro de gravedad del cable, esta última estará determinada en su configuración de equilibrio por la ecuación

$$x_c = L - \frac{\mathbf{b}_0}{l_c} H \quad (7)$$

siendo $\mathbf{b}_0 = S_{Ox} / \mathbf{r}$, y \mathbf{r} el peso específico de los amarres.

3.1 Modelo A: Valores arbitrarios de \mathbf{a}

En un instante t , considerando el signo superior para la cadena izquierda (l) y el inferior para la cadena derecha (r), la abscisa será

$$x_c^{l,r}(t) = L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t)) - \frac{\mathbf{b}(t)}{l_c} (H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t)) \quad (8)$$

y su aceleración

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c^{l,r} = & \left(\ddot{q} \mp d (\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \cos \mathbf{a}(t) \mp d \ddot{\mathbf{a}}(t) \sin \mathbf{a}(t) \right) - \\ & - \left(\frac{\ddot{h}(t) \mp d (\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \sin \mathbf{a}(t) \mp d \ddot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \mathbf{b}(t) - \\ & - 2 \left(\frac{\dot{h}(t) \mp d \dot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \dot{\mathbf{b}}(t) - \frac{H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t)}{l_c} \ddot{\mathbf{b}}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Luego, el sistema diferencial (3) queda dado por las siguientes ecuaciones (se supone que son cero D_y , D_a y $M(t)$):

$$m\ddot{q}(t) + D_x \dot{q}(t) + 2m_c \left(\ddot{q}(t) - \frac{1}{l_c} \left[\ddot{h}(t) \mathbf{b}(t) - 2\dot{h}(t) \dot{\mathbf{b}}(t) - (H + h(t)) \ddot{\mathbf{b}}(t) \right] \right) = F_x(t) \quad (a)$$

$$m\ddot{h}(t) = F_y(t) \quad (b)$$

$$I_p \ddot{\mathbf{a}}(t) + m \left(\begin{array}{l} \left(-2d(\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \cos \mathbf{a}(t) - 2d\ddot{\mathbf{a}}(t) \sin \mathbf{a}(t) \right) - \\ \left(\frac{-2d(\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \sin \mathbf{a}(t) - 2d\ddot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \mathbf{b}(t) - \\ -2 \left(\frac{-2d\dot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \dot{\mathbf{b}}(t) - \frac{-2d \sin \mathbf{a}(t)}{l_c} \ddot{\mathbf{b}}(t) \end{array} \right) d \sin \mathbf{a}(t) = 0 \quad (10)$$

3.2 Modelo B: valores pequeños de α

Para valores pequeños de α la ecuación (8) se reduce a

$$x_c^{l,r}(t) = L \pm q(t) - \frac{\mathbf{b}(t)}{l_c} (H + h(t) \mp d \mathbf{a}(t)) \quad (11)$$

de la cual se deduce la expresión de la aceleración dada por

$$\ddot{x}_c^{l,r} = \pm \ddot{q} - \left(\frac{\ddot{h}(t) \mp d \ddot{\mathbf{a}}(t)}{l_c} \right) \mathbf{b}(t) - 2 \left(\frac{\dot{h}(t) \mp d \dot{\mathbf{a}}(t)}{l_c} \right) \dot{\mathbf{b}}(t) - \frac{H + h(t) \mp d \mathbf{a}(t)}{l_c} \ddot{\mathbf{b}}(t) \quad (12)$$

Luego, el sistema diferencial (10) queda dado por las siguientes ecuaciones

$$m\ddot{q}(t) + D_x \dot{q}(t) + 2m_c \left(\ddot{q}(t) - \frac{1}{l_c} \left[\ddot{h}(t) \mathbf{b}(t) - 2\dot{h}(t) \dot{\mathbf{b}}(t) - (H + h(t)) \ddot{\mathbf{b}}(t) \right] \right) = F_x(t) \quad (a)$$

$$m\ddot{h}(t) = F_y(t) \quad (b) \quad (13)$$

$$I\ddot{\mathbf{a}}(t) - \frac{2m_c}{l_c} \left(\left(\ddot{h}(t) \mathbf{b}(t) + \dot{h}(t) \dot{\mathbf{b}}(t) + (H + h(t)) \ddot{\mathbf{b}}(t) \right) \right) d \mathbf{a}(t) = 0 \quad (c)$$

4 TENSION EN LAS CADENAS DE AMARRE (CATENARIAS)

Inicialmente la geometría de las cadenas está gobernada por la siguiente relación no lineal:

$$Y = \mathbf{b}_0 \left[Ch \left(\frac{X}{\mathbf{b}_0} \right) - 1 \right] \quad (14)$$

donde $\mathbf{b}_0 = S_0 / \mathbf{r}$, S_0 es la tensión en el punto O u O' del cable, \mathbf{r} es su peso específico, y recordando la suposición de que el cable se mantiene con la tangente horizontal en el punto de

amarre. En particular, en el tiempo inicial $t = t_0$, en el punto A,

$$H = \mathbf{b}_0 \left[\text{Ch} \left(\frac{L}{\mathbf{b}_0} \right) - 1 \right] \quad (15)$$

4.1 Modelo A: valores arbitrarios de \mathbf{a}

Después de algún tiempo t , el punto $A|_{t_0}$ (respectivamente. $B|_{t_0}$) se moverá a una nueva posición dada por:

$$H + h(t) \mp d \text{sen } \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^{l,r} \left[\text{Ch} \left(\frac{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))}{\mathbf{b}^{l,r}} \right) - 1 \right] \quad (16)$$

donde $\mathbf{b}^{l,r} = S_{Ax}^{l,r} / \mathbf{r}$ y $S_{Ax}^{l,r}$ es la componente horizontal de la tensión en el cable de amarre en el instante t . El signo más corresponde a la cadena izquierda y el signo menos a la derecha. Introduciendo la función $\mathbf{q}(q, h, \mathbf{a})$ para denominar al argumento de la función hiperbólica de la ecuación (16), esto es:

$$\mathbf{q}^{l,r} = \frac{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))}{\mathbf{b}^{l,r}} \quad (17)$$

la ecuación (16) queda

$$H + h(t) \mp d \text{sen } \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^{l,r} [\text{Ch}(\mathbf{q}) - 1] \quad (18)$$

De (17) y (18) surge

$$\frac{H + h(t) \mp d \text{sen } \mathbf{a}(t)}{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))} = \frac{\text{Ch } \mathbf{q} - 1}{\mathbf{q}^{l,r}} \quad (19)$$

Denominando $f(\mathbf{q})$ al lado derecho de la ecuación anterior y reemplazando la función coseno hiperbólico mediante su serie de Taylor se tiene que

$$f(\mathbf{q}) = \frac{\text{Ch } \mathbf{q} - 1}{\mathbf{q}} = \sum_l \mathbf{g}_l \mathbf{q}^l \quad \text{con } \mathbf{g}_l = \frac{1}{(l+1)!} \quad (l=1, 3, 5, \dots) \quad (20)$$

Luego, expandiendo a su vez \mathbf{q}^l en función de q, h y \mathbf{a} , se tiene que

$$\mathbf{q}^l = \sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk}^{(l)} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (21)$$

con lo cual

$$f[\mathbf{q}(q, h, \mathbf{a})] = \tilde{f}(q, h, \mathbf{a}) = \sum_l \mathbf{g}_l \sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk}^{(l)} q^i h^j \mathbf{a}^k = \sum_i \sum_j \sum_k \left(\sum_l \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)} \right) q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (22)$$

O bien

$$\tilde{f}(q, h, \mathbf{a}) = \sum_i \sum_j \sum_k F_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \text{ con } F_{ijk} = \sum_{l=1,3,5} \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)} \quad (23)$$

Expandimos el miembro izquierdo de la ecuación (19) como sigue:

$$\frac{H + h(t) \mp d \operatorname{sen} \mathbf{a}(t)}{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (24)$$

en donde los coeficientes A_{ijk} no son conocidos, entonces para determinarlos hacemos lo expandimos las expresiones:

$$H + h(t) \mp d \operatorname{sen} \mathbf{a}(t) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{A}_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (25)$$

y

$$L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t)) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (26)$$

Luego, de (24) se tiene (omitiendo l, r)

$$\sum_i \sum_j \sum_k \tilde{A}_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k = \left(\sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) \left(\sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) \quad (27)$$

de la cual surge

$$\tilde{A}_{ijk} = \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} \tilde{B}_{(i-m)(j-n)(k-p)} \quad (28)$$

De esta última ecuación se obtienen los coeficientes

$$A_{ijk} = \frac{1}{\tilde{B}_{000}} \left[\tilde{A}_{ijk} - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} A_{mnp} \tilde{B}_{(m-i)(n-j)(k-p)} - \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} A_{inp} \tilde{B}_{0(j-n)(k-p)} \right. \\ \left. \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{p=0}^{k-1} A_{mjp} \tilde{B}_{(i-m)0(k-p)} - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{n=0}^{j-1} A_{mnk} \tilde{B}_{(i-m)(j-n)0} - \sum_{m=0}^{i-1} A_{mjk} \tilde{B}_{(i-m)00} \right. \\ \left. \sum_{n=0}^{j-1} A_{ink} \tilde{B}_{0(j-n)0} - \sum_{p=0}^{k-1} A_{ijp} \tilde{B}_{00(k-p)} \right] \quad (29)$$

De (23) y (24) surge que

$$F_{ijk} = A_{ijk} \tag{30}$$

Por otra parte,

$$\mathbf{q}^{l+1} = \mathbf{q}^l \mathbf{q} \tag{31}$$

$$T_{ijk}^{(l+1)} = \sum_{m=0}^i \sum_{n=0}^j \sum_{p=0}^k T_{mnp}^{(l)} T_{(i-m)(j-n)(k-p)}^{(1)} \tag{32}$$

$$l = 1, 2, 3 \dots \quad T_{ijk}^{(0)} = \mathbf{d}_{0i} \mathbf{d}_{0j} \mathbf{d}_{0k}$$

$$\mathbf{g}_1 T_{ijk}^{(1)} + \sum_{l=3,5,\dots} \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)} = F_{ijk} = A_{ijk} \tag{33}$$

de donde

$$T_{ijk}^{(1)} = \frac{A_{ijk} - \sum_{l=3,5,\dots} \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)}}{\mathbf{g}_1} ; \tag{34}$$

siendo, de (20) , $\mathbf{g}_1 = 1/2$. De (17) se tiene

$$\mathbf{b}^{l,r} \mathbf{q}^{l,r} = L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t)) \tag{35}$$

Expandiendo \mathbf{b} en funciones de las variables q, h y \mathbf{a}

$$\mathbf{b} = \sum_i \sum_j \sum_k B_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \tag{36}$$

Y reemplazando (36), (21) y (26) en (35) se tiene

$$\left(\sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk}^{(1)} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) \left(\sum_i \sum_j \sum_k B_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \tag{37}$$

De la cual se pueden obtener los coeficientes

$$B_{ijk} = \frac{1}{T_{000}^{(1)}} \left[\tilde{B}_{ijk} - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} B_{mnp} T_{(m-i)(n-j)(k-p)}^{(1)} - \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} B_{inp} T_{0(j-n)(k-p)}^{(1)} \right. \\ \left. \sum_m^{i-1} \sum_p^{k-1} B_{mjp} T_{(i-m)0(k-p)}^{(1)} - \sum_m^{i-1} \sum_n^{j-1} B_{mnk} T_{(i-m)(j-n)0}^{(1)} - \sum_{m=0}^{i-1} B_{mjk} T_{(i-m)00}^{(1)} \right. \\ \left. \sum_{n=0}^{j-1} B_{ink} T_{0(j-n)0}^{(1)} - \sum_{p=0}^{k-1} B_{ijp} T_{00(k-p)}^{(1)} \right] \tag{38}$$

Finalmente, obtenidos los coeficientes B_{ijk} la función $\mathbf{b}(q, h, \mathbf{a})$ queda perfectamente determinada y con ella, la tensión de la cadenas que es directamente proporcional a esta función.

Una vez planteada la función $\mathbf{b}(q, h, \mathbf{a})$, es posible resolver las ecuaciones diferenciales (3). En nuestro caso, la solución será hallada utilizando la rutina Runge-Kutta para encontrar las funciones $q(t)$, $h(t)$ y $\mathbf{a}(t)$.

4.2 Modelo B: valores pequeños de α

Para valores pequeños de α , el procedimiento es similar, sólo se debe tener las ecuaciones (24), (25) y (26) que se transforman respectivamente a

$$\frac{H + h(t) \mp d\mathbf{a}(t)}{L \pm q(t)} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (39)$$

$$H + h(t) \mp d\mathbf{a}(t) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{A}_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (40)$$

y

$$L \pm q(t) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (41)$$

Luego se obtiene la expresión de la tensión en los amarres a partir de las mismas ecuaciones y siguiendo el mismo procedimiento utilizado para el caso de valores arbitrarios de α .

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

La performance de los algoritmos desarrollado se muestra a través de un ejemplo numérico. Se considera una plataforma rígida en 2D con vínculos elásticos constituidos por dos amarres catenarios (Figura 1). Se adoptan los siguientes valores: dimensión horizontal $L = 40m$, dimensión vertical $H = 20m$, el coeficiente de amortiguamiento $D_x = 100 \text{ N/m}$. Se supone una plataforma prismática hueca de $2d$ metros de longitud externa, 2m de ancho, 0.6m de alto y 0.012m de espesor. La densidad lineal de los cables de amarres es de $\mathbf{r} = 50 \text{ N/m}$.

Las acciones de excitación de las olas externas están dadas por una fuerza horizontal $F(t) = F_0 \sin \mathbf{w}_f t$, $F_0 = 0.0005 H m_{eq} \omega^2$, $m_{eq} = m + 2m_c$, donde m_c es la masa del amarre; y una fuerza vertical $h(t) = h_0 \cos \mathbf{w} t$ con $h_0 = 1.5 \text{ m}$ y $\mathbf{w} = 0.25 \text{ rad/s}$, $\mathbf{w}_f = \mathbf{u}\mathbf{w}$, siendo parámetros d y \mathbf{u} .

La Tabla 1 muestra la convergencia de los valores de B_{000}^l obtenidos a partir de la ecuación (38) que son proporcionales a la tensión en el amarre izquierdo en el instante $t = 0$, los cuales fueron calculados a partir de los algoritmos detallados en la Sección 4.1 para valores arbitrarios de \mathbf{a} y tomando diferentes cantidades de términos (valores de M) en las series aproximantes de las funciones intervinientes.

M	$B'_{000}(\mathbf{b}'(0))$
5	42.971666986
10	42.972807394
15	42.972807545
20	42.972807527

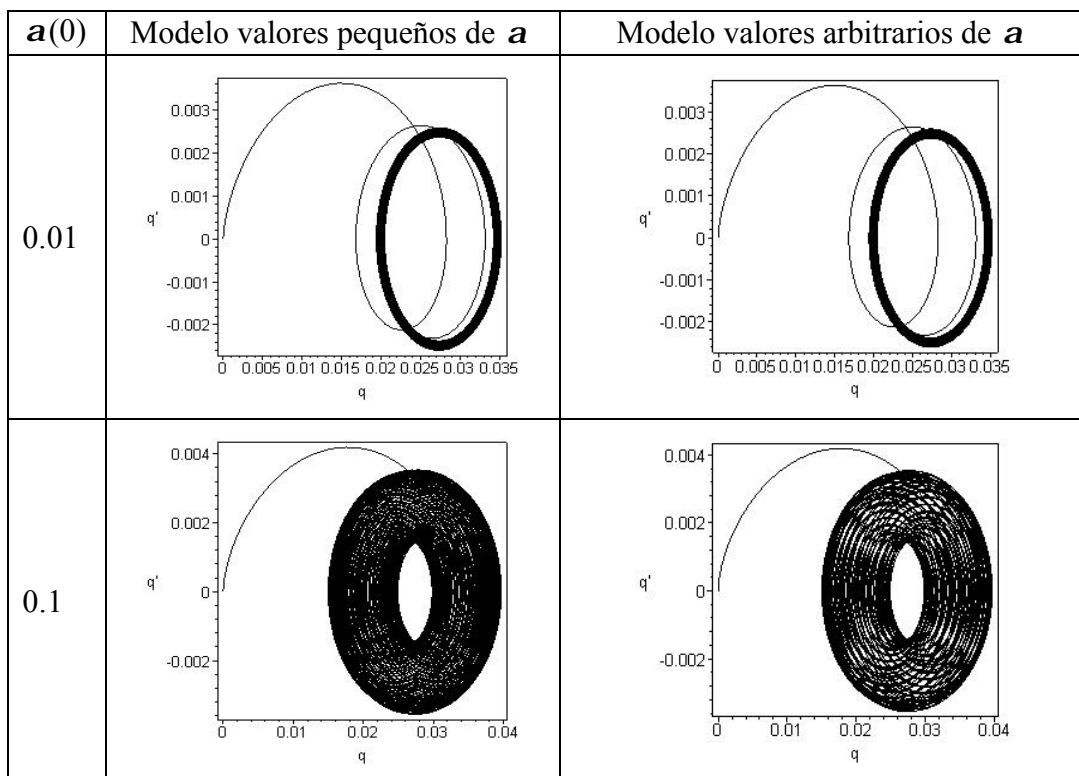
Tabla 1: Valores de B'_{000} para diferentes valores de M

Como se observa en dicha tabla, se logra una convergencia satisfactoria para valores de $M \geq 10$.

Posteriormente se analizaron comparativamente los resultados obtenidos a partir de los dos modelos propuestos: valores pequeños y valores arbitrarios de \mathbf{a} . La Tabla 2 muestra los resultados del comportamiento dinámico del sistema a partir de estos modelos. Se adoptó $M = 10$, $d = 1$, $\mathbf{u} = 1,344$ y se consideraron distintos valores en la condición inicial $\mathbf{a}(0)$.

Del análisis de los resultados se observa que el modelo de pequeños valores de \mathbf{a} es bastante aproximado hasta $\mathbf{a} = 0.2$.

Se muestra seguidamente en la Tabla 3 el comportamiento del sistema haciendo variar el parámetro \mathbf{u} . De los diagramas de Poincaré mostrados se observa que un cambio cualitativo en la respuesta dinámica del sistema produciéndose casos de bifurcaciones cuyo análisis y estudio se está realizando al momento del presente trabajo.



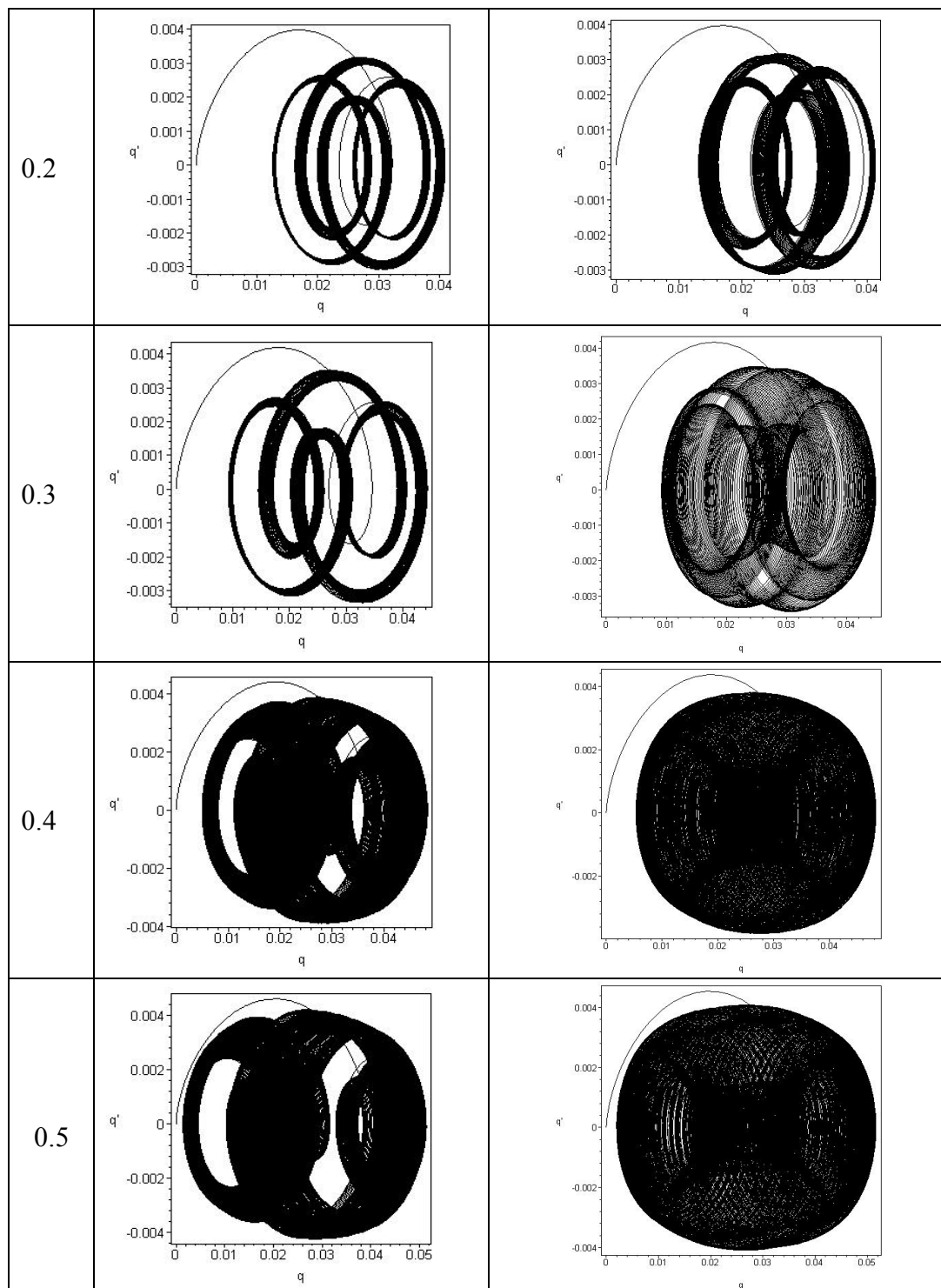
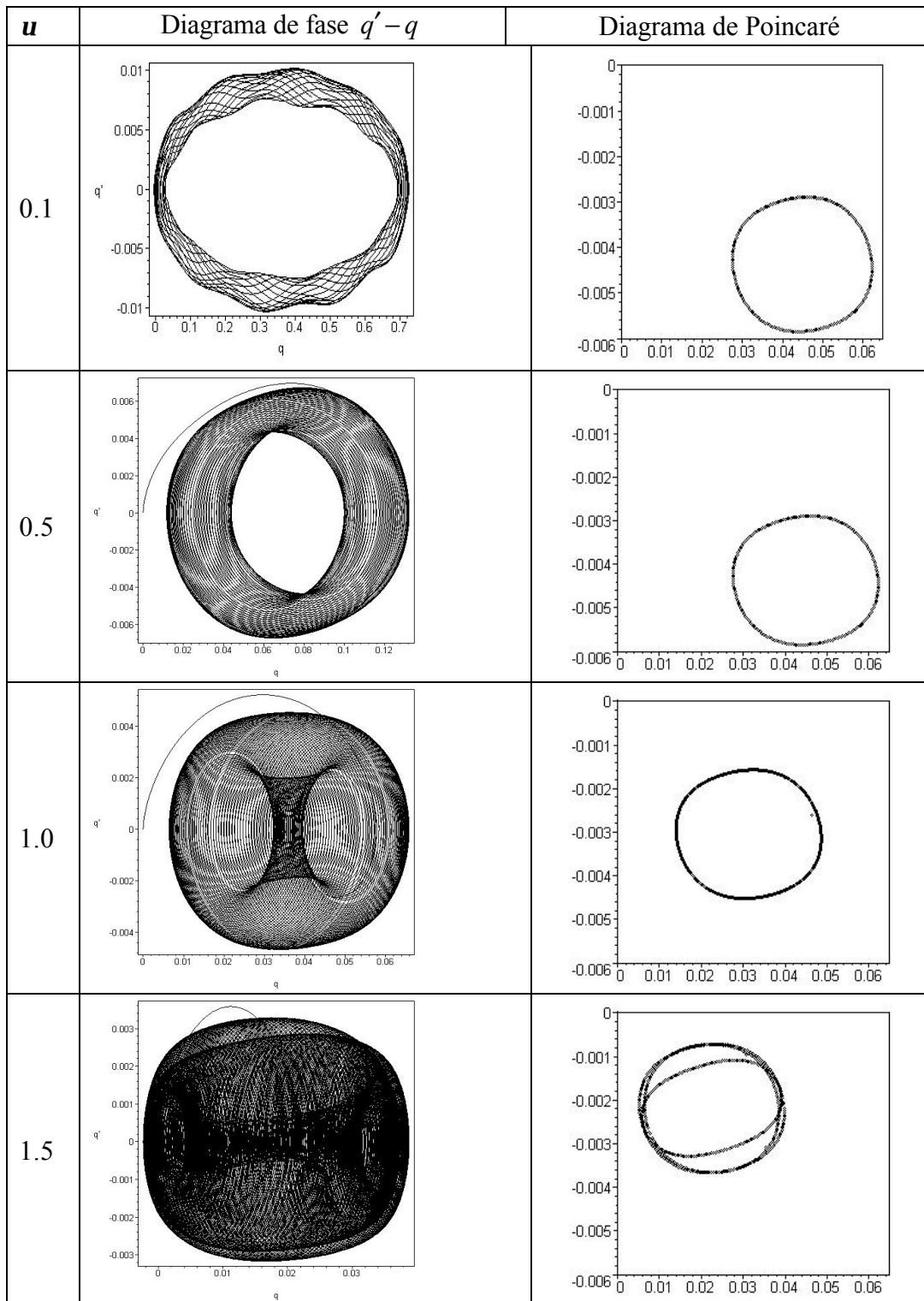


Tabla 2: Diagramas de fase $q' - q$ para diferentes valores de la condición inicial $a(0)$ y para los dos modelos estudiados.



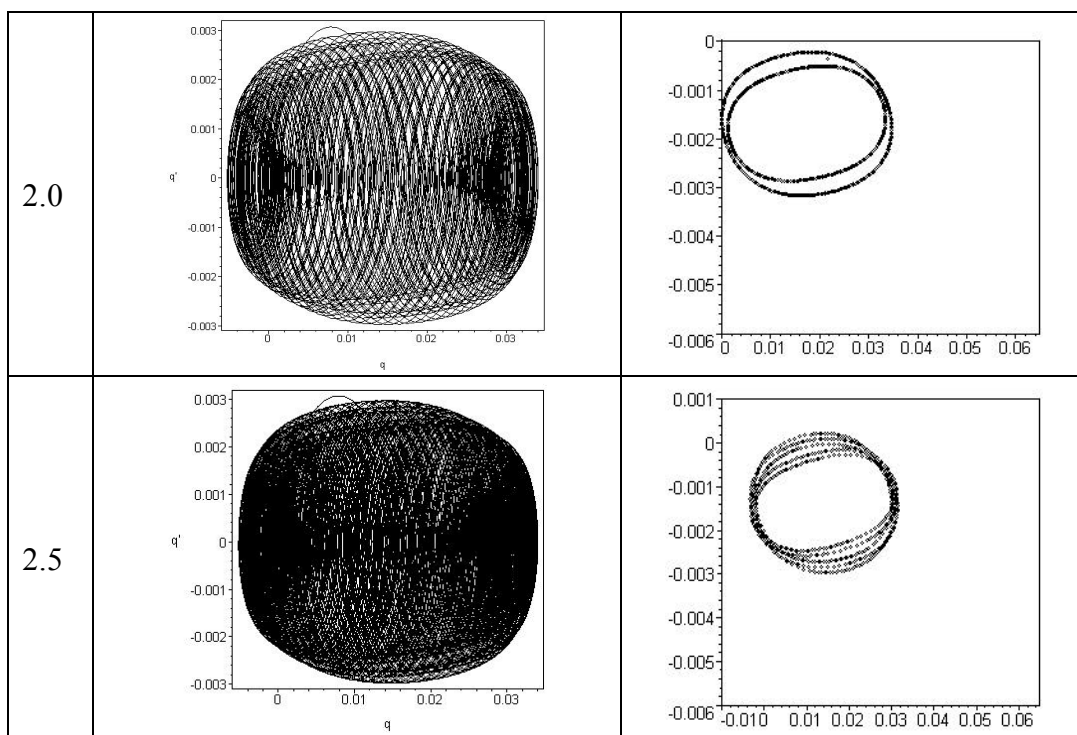
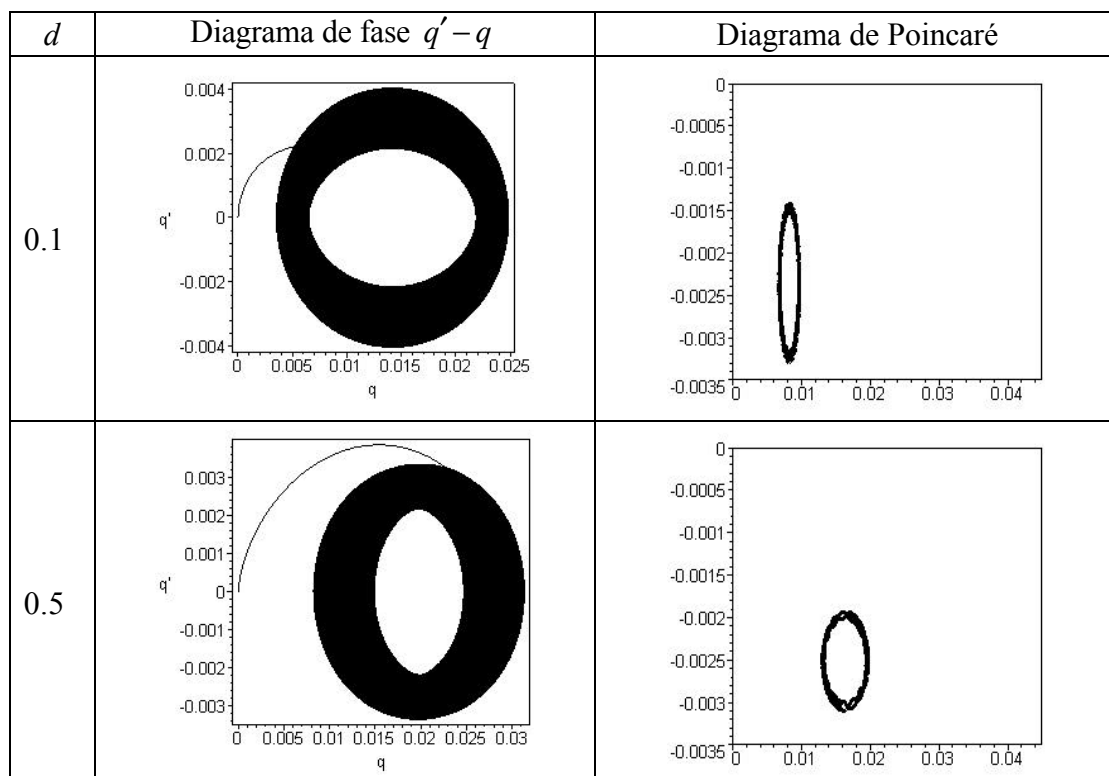


Tabla 3: Diagrama de fase $q' - q$. Modelo valores arbitrarios de \mathbf{a} . $d = 1$, $\mathbf{a}(0) = 0.5$.

En la última tabla (Tabla 4), se muestran los resultados del estudio paramétrico realizado cuando se hizo variar el ancho de la plataforma d . En todos los casos se tomó un tiempo total de experimento igual a 18000 segundos.



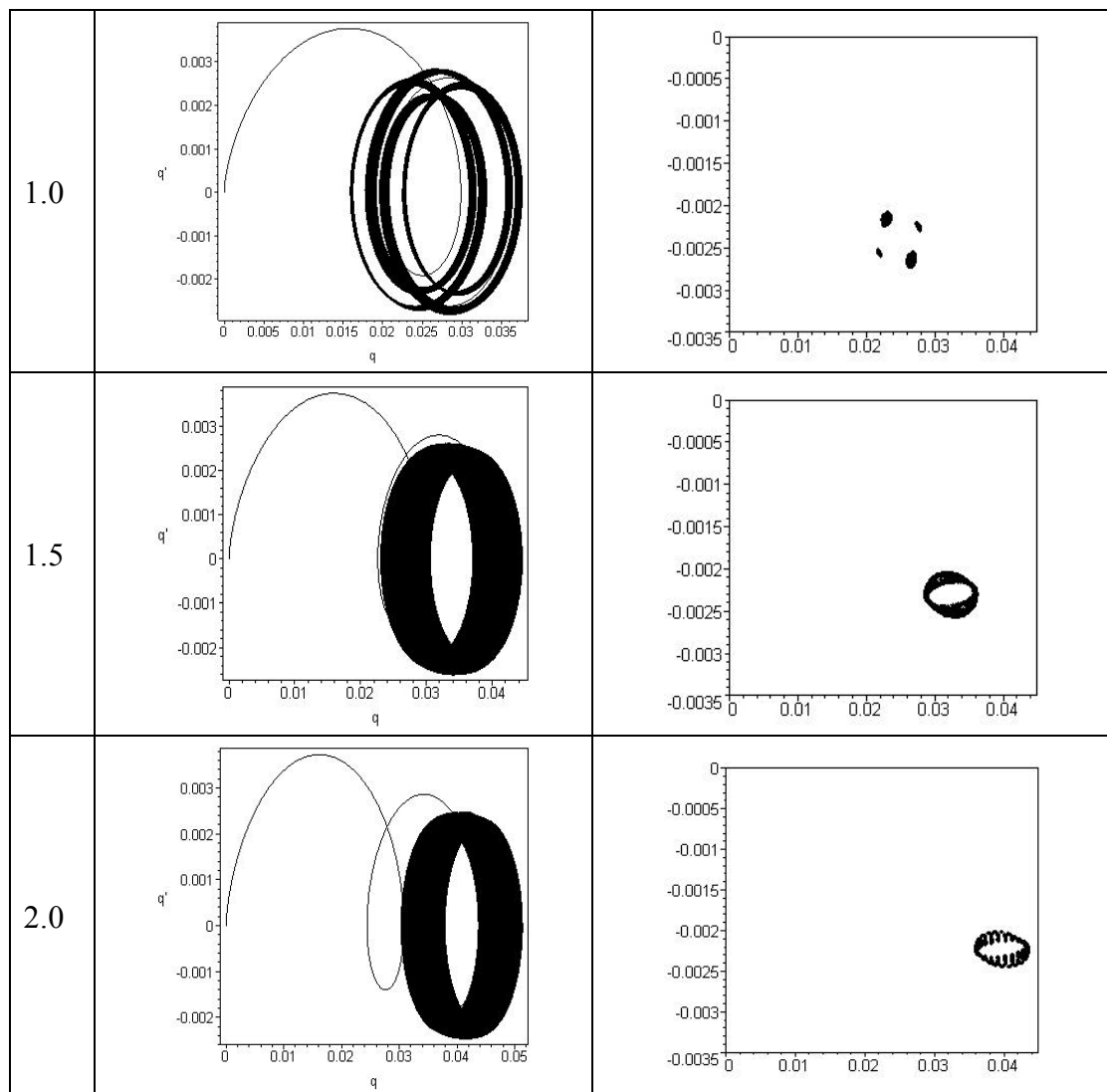


Tabla 4: Diagrama de fase $q' - q$. Modelo valores arbitrarios de \mathbf{a} . $\mathbf{a}(0) = 0.1$, $\mathbf{u} = 1.344$

Los diagramas de Poincaré de las Tablas 3 y 4 presentan características interesantes y que merecen un estudio particular que los autores están desarrollando actualmente. Es sabido que un diagrama de Poincaré que forma una curva cerrada indica un comportamiento quasiperiódico (existen dos frecuencias inconmensurables en el problema). Por otro lado se observa (e.g. Tabla 3, valor $\mathbf{u} = 1.5$, que el diagrama de Poincaré sufre una bifurcación del tipo periodo-2. En Tabla 4, cuando $d = 1$ se produce otro cambio cualitativo del diagrama de Poincaré. Sucesivamente se advierte que dichos diagramas se van “engrosando” a medida que se modifica el parámetro de análisis. Estos cambios podrían indicar comportamientos complejos como rutas al caos, que se están investigando actualmente.

6 CONCLUSIONES

La dinámica fuertemente no lineal de la plataforma fue abordada mediante el uso de series de potencias. Se estudió el caso de una plataforma flotante de dos dimensiones con amarres catenarios y tres grados de libertad en el plano. Se analizaron dos modelos considerando valores pequeños y valores arbitrarios de \mathbf{a} . El planteo de la fuerte no linealidad de los amarres

dada por la geometría catenaria es resuelta a través de la inversión de series algebraicas. Los algoritmos permiten la obtención de los coeficientes B_{ijk} a través del cual se puede calcular la tensión en los amarres y así el término no lineal de la ecuación gobernante.

Se presentaron resultados de casos particulares para comparar los dos algoritmos entre sí y con otros más simplificados planteados hallados previamente por los autores.

La metodología propuesta para el planteo del modelo presenta la ventaja de que permite encontrar una solución analítica (en series de potencias) de las tensiones en los amarres con resultados de precisión arbitraria sin necesidad de truncados previos.

En la comparación de ambos modelos (valores pequeños y valores arbitrarios del grado de libertad rotacional) se puede observar que el modelo planteado para valores pequeños de \mathbf{a} deja de comportarse adecuadamente a partir de \mathbf{a} igual a 0.2.

En el estudio paramétrico realizado en base al modelo más general de valores arbitrarios de \mathbf{a} puede observarse a través de los diagramas de Poincaré mostrados un cambio cualitativo (bifurcaciones) en la respuesta del sistema al variar el parámetro \mathbf{u} .

Un caso particular sucede cuando se hace variar el ancho de la plataforma d . Existe un cambio en la respuesta dinámica del sistema muy notable cuando $d = 1$.

Futuros estudios incluyen el análisis de bifurcaciones y posibles rutas al caos. Asimismo se analizando un modelo más complejo a partir de una teoría general de cables sin la hipótesis simplificativa de suponer que se conserva la forma catenaria de los cables en todo instante.

REFERENCIAS

- M. R. Escalante, M. B. Rosales and Carlos P. Filipich. *Planteo y solución del problema de amarres no lineales de una plataforma flotante*. In volume XXIV, Buenos Aires, Argentina, VIII Congreso de Mecánica Computacional (MECOM 2005), 2005.
- E. Esmailzadeh and A. Goodarzi, A., Stability analysis of a CALM floating offshore structure, *Int. J. of Nonlinear Mech*, 36: 917-926, 2001.
- C. P. Filipich and M.B. Rosales, A recurrence solution of strongly non-linear systems, In *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, XXI, 141-149. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson and I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando. Proceedings, 21st. South-eastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM XXI), Orlando, U.S.A ,2002
- C. P. Filipich, M.B Rosales and F. Buezas, Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions, *International Journal of Latin American Applied Research*, 34(2):105-123, 2004.
- M. B. Rosales and C.P. Filipich, Full modelling of the mooring nonlinearity in a two-dimensional floating structure, *Int. J. Nonlinear Mech*, 41,1-17 2006.
- M. Rosales, C. Filipich, and M. Escalante. Dinámica de una estructura flotante amarrada: modelado de la no linealidad mediante recurrencias algebraicas. In M.B. Rosales, V.H. Cortínez, and D.V. Bambill, editors, *Mecánica Computacional*, volume XXII, Bahía Blanca, Argentina, (November 2003). XIII Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2003), 2003.
- S. A. Sannasiraj, V. Sundar and R. Sundaravadelu. Mooring forces and motion response of pontoon-type floating breakwaters. *Ocean Engng* 26: 27-48, 1998.
- A. Sarkar and R. Eatock Taylor. Effects of mooring line drag damping on response statistics of vessels excited by first- and second-order wave forces. *Ocean Engng* 27: 667-686, 2000.
- R. J. Smith and C.J. MacFarlane. Statics of a three component mooring line. *Ocean Engng* 28: 899-914, 2001.