

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE SISTEMAS FLUIDO-ESTRUTURA CONSIDERANDO INTERFACES MÓVEIS

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FLUID-STRUCTURE SYSTEMS CONSIDERING MOVABLE INTERFACES

Gustavo C. Rodrigues^a, Fernanda B. Link^a, Ederval de S. Lisboa^b, Vitor S. V. Silva^a e
Walter J. P. Casas^a

^a*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 425, Porto Alegre/RS, 90050-170, Brasil, gustavocomerlato@gmail.com, feulink@gmail.com, vitorsvs83@hotmail.com, walter.paucar.casas@ufrgs.br, <https://www.ufrgs.br/demec/>*

^b*Campus Cachoeira do Sul, Universidade Federal de Santa Maria, Rua Ernesto Barros 1345, Cachoeira do Sul/RS, 96506-322, Brasil, ederval.lisboa@ufsm.br, <http://www.ufsm.br>*

Palavras-chave: Sistemas Fluido-estrutura, BESO, MEF.

Resumo. Este trabalho visa abordar a otimização topológica estrutural de um sistema acoplado do tipo fluido-estrutura com objetivo de aperfeiçoar o seu comportamento dinâmico. Par tal propõe-se a maximização de determinada frequência natural do sistema, enquanto o volume de material estrutural é gradualmente removido. A parte estrutural do sistema pode estar sujeita a carregamentos externos e carregamentos causados pelo fluido. Implementações numéricas foram desenvolvidas para sistemas simplificados do tipo fluido-estrutura com fronteiras móveis, utilizando o método de Otimização Fluido-Estrutura Evolucionária Bi-direcional (BEFSO Bi-Directional Evolutionary Fluid-Structure Optimization), que é uma abordagem baseada no método BESO de otimização topológica. O código desenvolvido mostrou a sua aplicabilidade a partir da verificação para os casos estudados, podendo ser estendido em sistemas fluido-estrutura mais complexos e vibroacústicos.

Keywords: Fluid-Structure Systems, BESO, FEM.

Abstract. This work aims to study the structural topology optimization of a coupled fluid-structure system in order to improve its dynamic behavior. For this purpose, it is proposed to maximize a certain natural frequency of the system, while the volume of structural material is gradually removed. The structural part of the system may be subject to external loading and fluid loading. Numerical implementations have been developed for simplified fluid-structure systems with moving interfaces using the Bi-Directional Evolutionary Fluid-Structure Optimization (BEFSO) method, which is an approach based on the BESO method of topology optimization. The developed code showed its applicability from the verification for the studied cases, being able to be extended in more complex fluid-structure and vibroacoustic systems.

1 INTRODUÇÃO

A modelagem e projeto de sistemas acoplados do tipo fluido-estrutura vêm recebendo maior atenção nas pesquisas científicas. Os métodos de otimização topológica estão também sendo aplicados para tratar de tais sistemas, sendo uma boa alternativa ao desenvolvimento de conceitos ótimos, principalmente nos casos em que a diminuição da massa estrutural é importante, como na indústria aeroespacial e aeronáutica, (Zhu *et al.*, 2016). Os conceitos estruturais ótimos são utilizados nas etapas iniciais do projeto com intuito de obter-se uma aproximação da estrutura final, e desta forma, elas limitam as formas que a estrutura poderá apresentar.

Vários métodos de otimização topológica são reportados na literatura pertinente ao assunto. Destacam-se, entretanto, os métodos SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) e o BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization), como descrito por Huang e Xie (2010). Essencialmente, os métodos se distinguem quanto ao tratamento das variáveis otimizadas, ou seja, no SIMP cada elemento possui um valor de densidade entre 100% e 0%, e dizemos que o tratamento das variáveis é contínuo; já no BESO sendo os elementos da estrutura, o BESO considera que cada elemento pode ter um valor que representa sua presença ou outro valor que representa sua ausência, isto é, trata as variáveis otimizadas de forma discreta (Huang e Xie, 2010).

Neste sentido, a principal motivação deste estudo consiste em promover maior discussão sobre otimização estrutural evolucionária em problemas do tipo fluido estrutura, desenvolvendo e testando uma ampliação ao método BEFSO (Bi-Directional Evolutionary Fluid-Structure Optimization) utilizando malhas não estruturadas para resolver casos com geometrias dos contornos mais complexos e com fronteiras móveis para certa frequência natural.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Os problemas abordados restringem-se aos casos de vibração livre de estruturas flexíveis às quais se encontram em contato com o fluido acústico. A estrutura desse sistema é descrita pela equação do movimento para um corpo contínuo onde as hipóteses da teoria da elasticidade linear são aplicadas. Para o meio fluido são aplicadas as equações governantes do movimento, continuidade e constitutiva.

2.1 Equações Governantes do Domínio Fluido

O fluido considerado no estudo desenvolvido é não viscoso, irrotacional e sofre apenas pequenas translações. Desta forma, as equações governantes para um volume de controle do fluido são descritas pela equação do movimento. Desta forma, pode-se definir o problema de valor de contorno associado ao meio fluido como:

$$\frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p_f}{\partial t^2} - \nabla^2 p_f = 0 \quad \text{em } \Omega_f. \quad (1)$$

sendo, p_f a pressão acústica, q_f a massa de fluido adicionada por unidade de volume, e c_f a velocidade do som no domínio acústico Ω_f .

O problema de valor de contorno associado ao meio fluido estará sujeito as seguintes condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente:

$$\begin{aligned} p_f &= p_0 \text{ sobre } \Gamma_p, \\ \nabla p_f \cdot \mathbf{n}_f &= 0 \text{ sobre } \Gamma_f. \end{aligned} \quad (2)$$

Onde p_0 é uma pressão de referência, \mathbf{n} é o vetor normal e ∇ é o operador vetor gradiente. Desta forma, Γ_p é uma aproximação da fronteira do domínio fluido para a condição de superfície livre, enquanto que Γ_f representa a condição de contorno natural para fronteira do domínio fluido com condição de parede rígida e que pode ser considerada como uma superfície fechada (Zienkiewicz e Bettess, 1978). O sistema de interação fluido-estrutura aplicado nos problemas é representado na Figura 1:

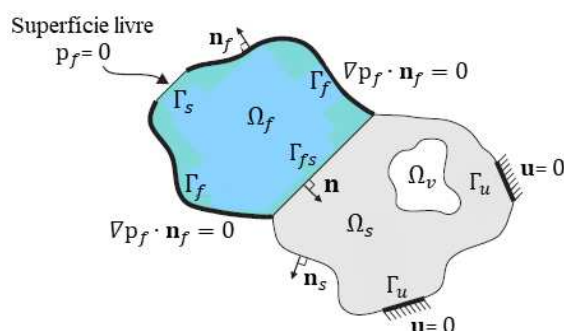


Figura 1: Sistema acoplado do tipo fluido-estrutura: o domínio fluido (Ω_f) e o domínio estrutural (Ω_s) acoplados por integrais na interface fluido-estrutura (Γ_{fs}).

2.2 Equações Governantes do Domínio Estrutural

A equação diferencial do movimento para um corpo contínuo pode ser usada para descrever o domínio estrutural do sistema acoplado da seguinte forma.

$$\nabla \cdot \sigma_s(\mathbf{u}) - \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } \Omega_s. \quad (3)$$

onde $\nabla \cdot \sigma_s(\mathbf{u})$ é o divergente do tensor de tensão de Cauchy, ρ_s , é a densidade do meio contínuo sólido e \mathbf{u} é o vetor campo de deslocamento. As condições de contorno de Dirichlet são aplicadas da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma_u. \quad (4)$$

No presente estudo, não foram consideradas as forças de corpo.

2.3 Acoplamento do sistema fluido-estrutura

Na interface Γ_{fs} entre o domínio estrutural e fluido, o fluido e a estrutura se movem juntos na direção normal do contorno. O vetor normal $\mathbf{n} = \mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$ (conforme podemos verificar na Figura. 1) pode ser usado a fim de garantir a condição do equilíbrio entre pressões do líquido e trações estruturais sobre Γ_{fs}

$$\sigma_s \mathbf{n}_s = p_f \mathbf{n}_f \text{ sobre } \Gamma_{fs}. \quad (5)$$

Com as relações derivadas das equações governantes e as condições de acoplamento

anteriores, as forças de interface podem ser obtidas. Usando uma discretização por elementos finitos, a força que atua na estrutura fornecida pela pressão do fluido acústico é,

$$\mathbf{f}_{fs} = \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{N}_f^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f dS \mathbf{p}_f. \quad (6)$$

e a excitação que age no domínio fluido pode ser expressa em termos da aceleração estrutural

$$\mathbf{f}_{sf} = -\rho_f \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{N}_f^T \mathbf{n} \mathbf{N}_s dS \ddot{\mathbf{u}}_s. \quad (7)$$

onde \mathbf{p}_f é o vetor de pressão nodal no modelo de elementos finitos, ρ_f é a densidade de massa do fluido, \mathbf{u}_s é o vetor de deslocamentos estruturais nodais e \mathbf{N}_s e \mathbf{N}_f contém as funções de forma de elementos finitos para elementos estruturais e fluidos, respectivamente.

A introdução de uma matriz de acoplamento espacial \mathbf{L}_{fs} , onde:

$$\mathbf{L}_{fs} = \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f dS. \quad (8)$$

permite que as forças de acoplamento sejam escritas como,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{fs} &= \mathbf{L}_{fs} \mathbf{p}_f, \\ \mathbf{f}_{sf} &= -\rho_f \mathbf{L}_{fs}^T \ddot{\mathbf{u}}_s. \end{aligned} \quad (9)$$

onde, \mathbf{f}_{fs} e \mathbf{f}_{sf} são os vetores de força nodal nas interfaces. Assim, o problema da estrutura acústica pode ser descrito por um sistema de equações assimétricas (Morand e Ohayon, 1995):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{L}_{fs}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s \\ \ddot{\mathbf{p}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{L}_{fs} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{p}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

onde \mathbf{M}_s e \mathbf{K}_s são as matrizes estruturais de massa e rigidez, respectivamente, e \mathbf{M}_f e \mathbf{K}_f são as matrizes de massa e rigidez dos fluido, respectivamente. Compactamente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{fs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{fs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{fs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{fs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{fs} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

onde \mathbf{M}_{fs} e \mathbf{K}_{fs} são as matrizes de massa e rigidez da estrutura acústica, respectivamente. Essas matrizes compreendem as matrizes estruturais e fluidas, representadas pelos subscritos s para o campo estrutural e f para o campo acústico.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Nesta seção será discutido o problema de otimização e a análise de sensibilidade. É aplicado o método de otimização topológica evolucionária para problema estrutural, através do procedimento *soft-kill*. Desta forma, nenhum elemento de densidade intermediária é permitido durante os procedimentos de otimização (Xie e Huang, 2010) o que permite que as regiões sólidas, vazias e fluidas, assim como a interface entre os domínios, sejam

explicitamente definidas (Picelli *et al.*, 2015).

3.1 Definição do Problema

O comportamento dinâmico do sistema estrutural acústico é dado por:

$$\left(\mathbf{K}_{fs} - \omega_k^2 \mathbf{M}_{fs}\right) \Phi_k = 0. \quad (12)$$

onde ω_k é a k-ésima frequência natural e Φ_k é o correspondente autovetor acoplado. Multiplicado a Eq. (12) pelo autovetor transposto Φ_k^T , o autovalor ω_k^2 pode estar relacionado com Φ_k por:

$$\omega_k^2 = \frac{\Phi_k^T \mathbf{K}_{fs} \Phi_k}{\Phi_k^T \mathbf{M}_{fs} \Phi_k}. \quad (13)$$

que é chamado de quociente de Rayleigh.

Para a maximização de frequências naturais do sistema de estrutura acústica descrito, o problema de otimização discreta pode ser definido como,

$$\begin{aligned} \min : & \omega_k^2, \\ & x_i, \\ \text{sujeito a : } & \left(\mathbf{K}_{fs} - \omega_k^2 \mathbf{M}_{fs}\right) \Phi_k = 0, \\ & V(x_i) / V_0 = V_s, \\ & x_i = [x_{\min}, 1]. \end{aligned} \quad (14)$$

onde V_0 é o volume do domínio de projeto, V_s é a fração de volume estrutural final prescrita. A variável binária de projeto, x_i , declara a presença de um elemento completamente sólido (1) ou um elemento vazio com um pequeno valor, x_{\min} .

3.2 Análise de Sensibilidade

A sensibilidade da função objetivo devido a uma remoção de elemento de estrutura pode ser obtida derivando ω_k com relação a variável de projeto,

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2\omega_k \Phi_k^T \mathbf{M}_{fs} \Phi_k} \left[2 \frac{\partial \Phi_k^T}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{fs} - \omega_k^2 \mathbf{M}_{fs}\right) \Phi_k + \Phi_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{fs}}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{fs}}{\partial x_i} \right) \Phi_k \right]. \quad (15)$$

Com o auxílio da Eq. (12) a derivada pode ser simplificada como,

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2\omega_k \Phi_k^T \mathbf{M}_{fs} \Phi_k} \left[\Phi_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{fs}}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{fs}}{\partial x_i} \right) \Phi_k \right]. \quad (16)$$

As derivadas das matrizes de massa e rigidez da estrutura acústica são analisadas através de um modelo de material. Para manter a relação constante entre massa e rigidez quando $x_i = x_{\min}$, quando aplicado o método *soft-kill* BESO desenvolvido por Huang e Xie (2009), é necessário que

$$\begin{aligned}\rho(x_{\min}) &= x_{\min} \rho_s, \\ E(x_{\min}) &= x_{\min} E_s.\end{aligned}\quad (17)$$

Onde, ρ e E são a densidade e o módulo de Young do material sólido, respectivamente. Para garantir a condição anterior, o esquema de interpolação de material pode ser aplicado da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\rho(x_{\min}) &= x_i \rho_s, \\ E(x_i) &= \left[\frac{x_{\min} - x_{\min}^p}{1 - x_{\min}^p} (1 - x_i^p) + x_i^p \right] E_s.\end{aligned}\quad (18)$$

onde, $0 < x_{\min} < x_i \leq 1$ e p é o fator de penalização.

As derivadas das matrizes de massa e rigidez da estrutura acústica global podem ser avaliados desconsiderando as alterações em \mathbf{M}_f , \mathbf{K}_f , e \mathbf{L}_{fs} devido a i -ésima remoção de elementos sólidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{M}_{fs}}{\partial x_i} &= \mathbf{M}_i^s, \\ \frac{\partial \mathbf{K}_{fs}}{\partial x_i} &= \frac{x_{\min} - x_{\min}^p}{1 - x_{\min}^p} p x_i^{p-1} \mathbf{K}_i^s.\end{aligned}\quad (19)$$

onde, \mathbf{M}_i^s e \mathbf{K}_i^s são as matrizes de massa e rigidez do i -ésimo elemento sólido, respectivamente.

Com as derivadas de \mathbf{K}_{fs} e \mathbf{M}_{fs} do conjunto de equações dado na Eq. (19), e considerando que o autovetor é normalizado em massa ($\Phi_k^T \mathbf{M}_{fs} \Phi_k = 1$) a sensibilidade para a k -ésima frequência natural é,

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2\omega_k} \Phi_k^T \left[\frac{x_{\min} - x_{\min}^p}{1 - x_{\min}^p} p x_i^{p-1} \mathbf{K}_i^s - \omega_k^2 \mathbf{M}_i^s \right] \Phi_k.\quad (20)$$

Para o projeto sólido-fluido-vazio, os números de sensibilidade α_i para a maximização da frequência natural podem ser expressos como,

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_k} \Phi_k^T \left(\frac{1 - x_{\min}}{1 - x_{\min}^p} \mathbf{K}_i^s - \frac{\omega_k^2}{p} \mathbf{M}_i^s \right) \Phi_k & x_i = 1 \\ \frac{1}{2\omega_k} \Phi_k^T \left(\frac{x_{\min}^{p-1} - x_{\min}^p}{1 - x_{\min}^p} \mathbf{K}_i^s - \frac{\omega_k^2}{p} \mathbf{M}_i^s \right) \Phi_k & x_i = x_{\min}^p \end{cases}.\quad (21)$$

4 RESULTADOS

4.1 Caso 1:

O primeiro caso trata de um exemplo que considera uma viga engastada entre dois domínios de fluido acústico. O modelo acoplado (mostrado na Figura 2) está sob condições de

vibração livre e tensão no plano. Este exemplo é apresentado por Picelli *et al.* (2015). Os resultados obtidos com o código proposto utilizam os mesmos parâmetros apresentados pelo autor supracitado, são eles: módulo de Young igual a 70 GPa, densidade 2700 kg/m³ e razão de Poisson igual a 0,3. O domínio do fluido tem densidade de 1000 kg/m³ e a velocidade do som no meio de 1450 m/s. A malha aplicada para discretizar o modelo apresenta uma quantidade de 90.000 elementos finitos.

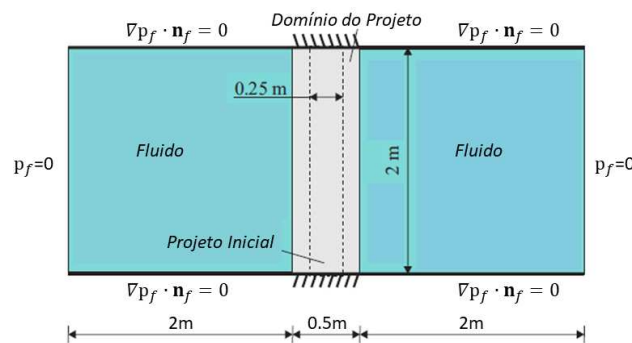


Figura 2: Viga engastada compreendida entre dois meios fluidos.

Para o processo de otimização foi utilizada a razão de evolução igual a $ER = 2\%$ e volume final prescrito $V_s = 50\%$. O raio de filtragem aplicado foi $r_{\min} = 60\text{mm}$ e o fator de penalidade $p = 3$. Outros parâmetros aplicados são: $x_i = 0.0001$, $AR = 5\%$ e $\tau = 0.001$. A Figura 3(a) apresenta a solução obtida neste trabalho com volume de estrutura inicial $V(x_i) = V_s = 50\%$. Já a Figura 3(b) apresenta o resultado final obtido por Picelli *et al.* (2015) para os mesmos parâmetros e volume de estrutura inicial. A frequência natural obtida aqui foi de $\omega_1 = 146.69\text{Hz}$. Esse resultado está de acordo com o obtido por Picelli *et al.* (2015).

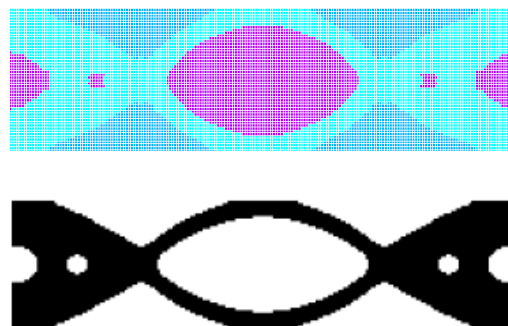


Figura 3: Comparação das topologias finais para maximização da primeira frequência natural
a) Topologia final obtida com o código proposto no presente trabalho, b) Topologia final obtida por Picelli *et al.* (2015).

A Figura 4 mostra a comparação do histórico de evolução da função objetivo para as topologias finais apresentadas na Figura 3. Comparado os resultados podemos verificar que no caso obtido por Picelli *et al.* (2015), a frequência ω_1 aumentou de 125.3Hz para 152.41Hz, um aumento de cerca de 22% ao passo que o presente estudo o aumento foi de 105.01Hz para 146.69Hz, um aumento de cerca de 40%.

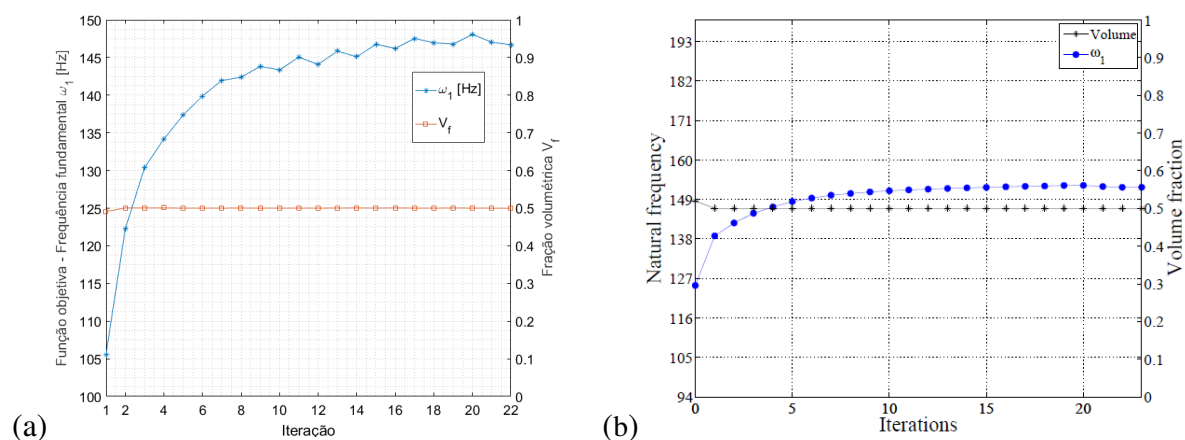


Figura 4: a) Histórico evolutivo da função objetivo do caso 1 desenvolvido neste trabalho, b) Histórico evolutivo da função objetivo do caso 1 desenvolvido por Picelli *et al.* (2015).

4.2 Caso 2:

O seguinte exemplo tem por objetivo maximizar as frequências naturais de um dispositivo ajustável e que pode ser definido com abertura ou fechamento de sua borda de domínio de fluido superior, o caso considerado neste Projeto foi de abertura. A condição de cavidade fechada é representada pela condição de fronteira de parede rígida, $\nabla p_f \cdot \mathbf{n}_f = 0$, mostrada como linhas de borda mais espessas na Figura 5, e a cavidade aberta é definida a partir da condição de limite de pressão imposta, $p_f = 0$ (Picelli *et al.*, 2015).

A configuração aberta apresenta diferentes frequências naturais. Numericamente, cavidades fechadas apresentam um autovalor zero, o que não é de interesse da prática real e é desconsiderado aqui. O sistema mostrado na Figura 5 é modelado com 99200 elementos finitos com espessura de 0.2 m e condição de tensão plana. O módulo de Young usado na estrutura é de 70 GPa, densidade de 2700 kg/m³ e a razão de Poisson igual a 0.3. O domínio do fluido tem densidade de 1000 kg/m³ e a velocidade do som no meio de 1450 m/s.

A Figura 6 compara os resultados obtidos no presente estudo com os obtidos por Picelli *et al.* (2015) para a primeira frequência ressonante do modelo aberto.

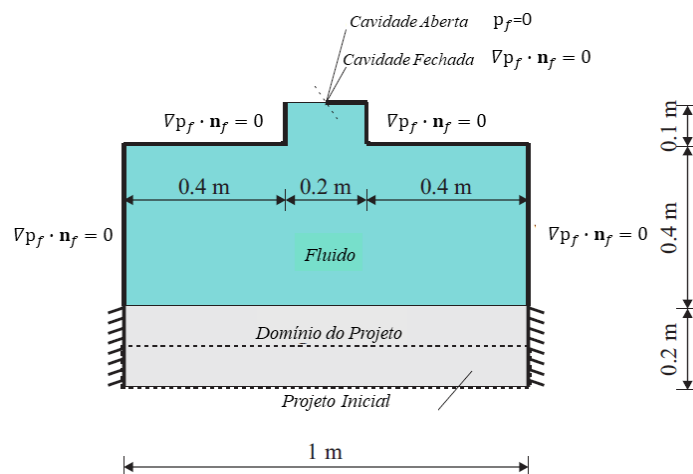


Figura 5: Dispositivo ajustável com presença de cavidades de fluido acústica aberta e fechada.

Podemos observar na [Figura 6](#) que o resultado da topologia final é ligeiramente diferente da encontrada por [Picelli et al. \(2015\)](#). Isso ocorre em virtude da tolerância utilizada no presente estudo ser menor que a utilizada o caso comparativo. Essa tolerância foi tomada menor para tornar o processo iterativo mais rápido. Entretanto, as topologias finais são similares e fazendo sentido no contexto do problema.

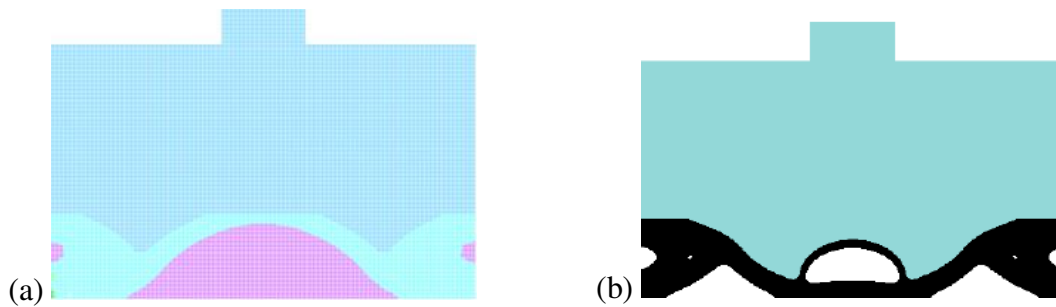


Figura 6: Comparação das topologias finais para maximização da primeira frequência natural do caso 2. a) Topologia final obtida com o código proposto no presente trabalho, b) Topologia final obtida por [Picelli et al. \(2015\)](#).

A [Figura 7](#) mostra a comparação do histórico de evolução da função objetivo para as topologias finais apresentadas na [Figura 6](#). Comparando os resultados, a razão de aumento em ω_1 é de 74% e da solução apresentada por [Picelli et al. \(2015\)](#) é de 64% para a configuração aberta. Além disso, a [Figura 8](#) apresenta a comparação entre o comportamento da primeira frequência ressonante, e podemos observar que estas possuem o mesmo comportamento.

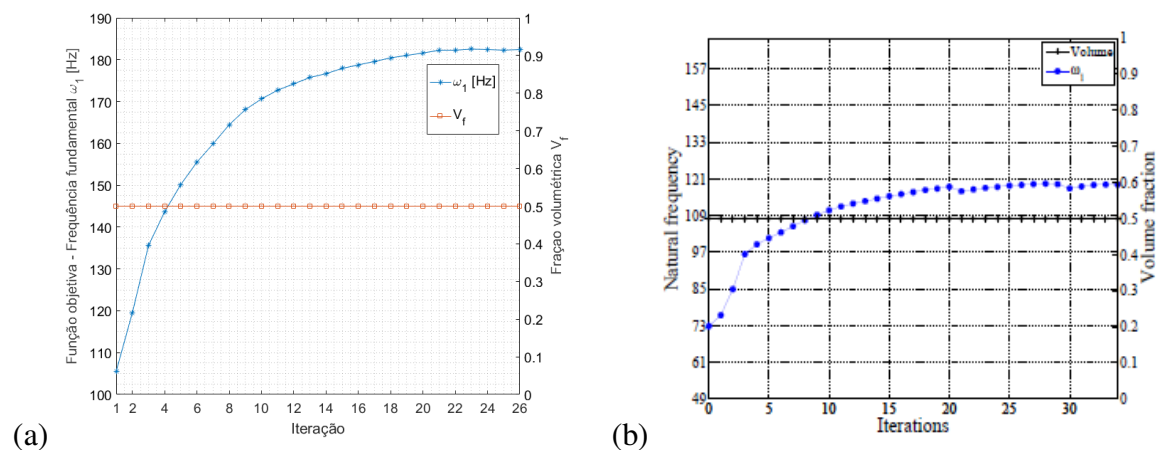


Figura 7: Comparação entre a evolução do histórico da função objetivo: (a) Resultado obtido no presente estudo, (b) Resultado obtido por [Picelli et al. \(2015\)](#).

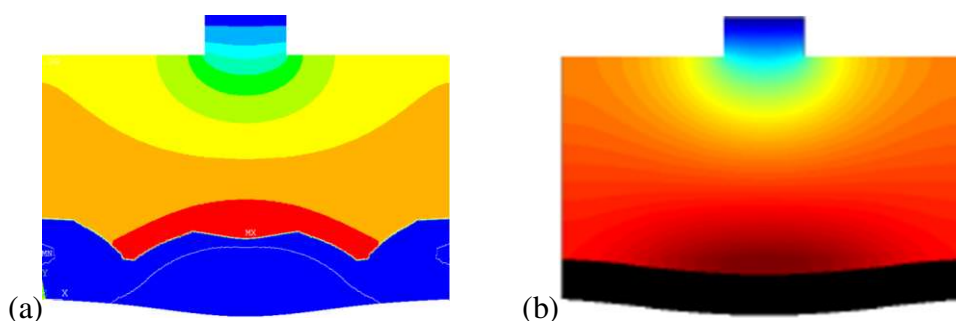


Figura 8: Comparação da primeira frequência natural e modos de vibração para o caso aberto:
 (a) Resultado obtido no presente estudo, (b) Resultado obtido por Picelli *et al.* (2015).

5 CONCLUSÕES

Pode-se concluir no presente estudo que os resultados obtidos para as frequências naturais diferem dos resultados obtidos por Picelli *et al.* (2015), entretanto o procedimento de otimização desenvolvido mostrou-se mais eficiente. Essa maior eficiência pode ser atribuída à diferença na implementação dos códigos de otimização, além de possíveis erros numéricos e valores internos de tolerância. Não obstante, os resultados apresentados confirmam a capacidade e robustez do método de otimização topológica proposto, permitindo que novos resultados possam ser explorados como em casos que envolvem problemas com domínios mais complexos.

REFERÊNCIAS

- Huang, X., Xie, Y. M., *Evolutionary Topology Optimization Of Continuum Structures: methods and applications*. 1st ed. John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- Huang, X., Zuo, Z.H., Xie Y.M., Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. *Computers & Structures*, 88:357–364, 2010.
- Huang, X., Xie, Y.M., Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. *Computational Mechanics*, 43:393–401, 2009.
- Morand, H.J.P. and Ohayon, R., *Fluid Structure Interaction - Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, Inc., 1st ed., 1995.
- Picelli, R.; Vicente, W.M.; Pavanello, R. Bi-directional evolutionary structural optimization for design-dependent fluid pressure loading problems. *Engineering Optimization*. V.47(10):1324–1342, 2015.
- Zhu, J-H.; Zhang, W-H.; Xia, L. Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 23(4):595-622, 2016.
- Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P., Fluid-structure dynamic interaction and wave forces: An introduction to numerical treatment. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 13: 1–16, 1978.