

## ANÁLISIS DE INTERMITENCIA TIPO V UTILIZANDO EL OPERADOR DE PERRON-FROBENIUS

### TYPE V INTERMITTENCY ANALYSIS USING THE PERRON-FROBENIUS OPERATOR

Sergio Elaskar<sup>a,b</sup> y Ezequiel del Río<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Dto. Aeronáutica, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba e Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, CONICET, Córdoba, Argentina*

<sup>b</sup>*Dto. de Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España*

**Palabras clave:** Intermitencia, caos, mapas.

**Resumen.** En este trabajo se implementa el operador de Perron-Frobenius con la finalidad de evaluar la función densidad de probabilidad de reinyección (RPD) para intermitencia caótica tipo V. Dicho operador es normalmente usado para calcular la evolución de variables aleatorias. La nueva metodología utilizada aquí, es denominada técnica de continuidad. Se estudia un mapa introducido para describir por primera vez intermitencia tipo V en los años 90. Una característica distintiva del mapa es que posee un intervalo laminar muy grande. Para validar la técnica de continuidad se analizan diferentes casos, en los cuales se compara ésta con la metodología de la función  $M$  y con datos numéricos. Los resultados obtenidos muestran que la RPD calculada por medio de la técnica de continuidad presenta un alta precisión con respecto a los datos numéricos. Por lo tanto, esta técnica es una metodología adecuada para calcular analíticamente las variables aleatorias en intermitencia tipo V.

**Keywords:** Intermittency, chaos, maps.

**Abstract.** In this paper, the Perron-Frobenius operator is implemented to evaluate the reinjection probability density function (RPD) for type V intermittency. This operator is used to calculate the evolution of random variables. The new methodology here implemented is called the continuity technique. One of the first maps introduced to describe type V intermittency in the 1990s is studied. This map is characterized by a very large laminar interval. To validate the continuity technique, different cases are analyzed, in which it is compared with the methodology of the  $M$  function and with numerical data. The obtained results show that the RPD functions calculated by the continuity technique present a high accuracy concerning the numerical data. Therefore, this technique is a suitable methodology for analytically calculating random variables in type V intermittency.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos modelan numerosos fenómenos, procesos y mecanismos que pueden evolucionar hacia el caos utilizando diferentes rutas. Una de estas rutas es la intermitencia caótica, donde una solución del sistema dinámico alterna períodos de comportamiento caótico con fases laminares o regulares que se corresponden con regiones de pseudo-equilibrio o soluciones pseudo-periódicas (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017). Se destaca que una comprensión más completa de la intermitencia caótica es de utilidad en varios campos, porque la misma ha sido observada por lo menos, en física, química, medicina y economía (Dubois et al., 1983; Sanmartín et al., 2004; Sánchez-Arriaga et al., 2007; Pizza et al., 2012; Chian, 2007; Zebrowski y Baranowski, 2004; Paradisi et al., 2012).

Los mapas unidimensionales se utilizan ampliamente para estudiar intermitencia caótica (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995). Estos están compuestos por un mapa local y uno no lineal que produce el proceso de reinyección. La teoría clásica de intermitencia caótica consideró tres tipos, I, II y III, según la pérdida de estabilidad del punto fijo - evaluada por los valores propios del mapa. Trabajos posteriores introdujeron otros tipos de intermitencias tales como "n-off", V, X, ring", etc (Elaskar y del Río, 2017). El tipo de intermitencia está determinado por el mapa local y por el mecanismo de reinyección permite regresar de las trayectorias de la región caótica a la laminar. La función de densidad de probabilidad de reinyección (RPD) se utiliza para cuantificar el proceso de reinyección (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017). Esta expresa la probabilidad de que las trayectorias sean reinyectadas en los diferentes puntos de la zona laminar. La correcta evaluación de la función RPD es fundamental para describir con precisión el fenómeno de la intermitencia caótica. No existía una metodología general para la obtención de la RPD y se implementaron diferentes esquemas, siendo el mecanismo de reinyección uniforme el más utilizado (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Hirsch et al., 1982). En los últimos diez años se ha desarrollado un método más general, llamado metodología de la función  $M$ , que ha permitido calcular con precisión las variables estadísticas en muchos mapas con intermitencias tipo I, II, III y V con y sin ruido (Elaskar y del Río, 2017; del Río y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Río et al., 2012; Elaskar y del Río, 2012; del Río et al., 2013, 2014; Krause et al., 2014a,b; Elaskar et al., 2015; del Río y Elaskar, 2016b; Elaskar et al., 2016; del Río y Elaskar, 2016a; Elaskar et al., 2017, 2018a,b; Elaskar, 2018; del Río y Elaskar, 2018; Elaskar et al., 2018a; Elaskar y del Río, 2018; del Río y Elaskar, 2019, 2020).

Intermitencia tipo V fue introducida por (Bauer et al., 1992; He et al., 1992; Fan et al., 1993). La misma se produce cuando un punto fijo estable y un punto no diferenciable (NDP) chocan y forman un canal entre el mapa y la línea bisectriz. En este punto de colisión, el mapa local es no diferenciable o discontinuo y no hay una bifurcación tangente. Por lo tanto dos mapas con diferentes pendientes que describen una "V" pueden componer el mapa local. En (Elaskar et al., 2018a; Elaskar y del Río, 2018) se presentan estudios más recientes para calcular la RPD en intermitencia tipo V usando la metodología de la función  $M$ . Aplicaciones de intermitencia tipo V se pueden encontrar en el estudio de la actividad neuronal (Wu y He, 2001; Wang et al., 2011; Gu y Xiao, 2014). En este artículo, usamos el operador de Perron-Frobenius para obtener analíticamente la densidad de probabilidad de reinyección,  $\phi(x)$ , para intermitencia tipo V. Esta metodología, denominada aquí técnica de continuidad, se aplicó en intermitencias tipo II obteniendo resultados muy precisos (Elaskar et al. (2016)). Para validar la aplicación de esta técnica en intermitencia tipo V se realizan varias comparaciones con la metodología de la función  $M$

que ha mostrado ser muy precisa para el mapa aquí estudiado y con resultados numéricos.

## 2. EL OPERADOR DE PERRON-FROBENIUS

Se presenta una breve descripción del operador de Perron-Frobenius (Lasota y Mackey, 1985). Se considera una familia de operadores evolución  $F^t(x) : D \rightarrow D$ , siendo  $F^0 =$  identidad y  $F^{t_1+t_2} = F^{t_1} \circ F^{t_2}$ . Donde  $D$  es una variedad compacta,  $x \in D$  y  $t$  es la variable evolución. Si  $t$  varía sobre los números reales ( $t \in \mathbf{R}$ ),  $F^t(x)$  representa un sistema dinámico. Sin embargo, si  $t$  toma solo valores discretos, el operador  $F^t(x)$  es un mapa. Existen, por lo menos, dos formulaciones para explicar el comportamiento del sistema  $F^t(x)$ . Una alternativa es estudiar la evolución de trayectorias individuales, la otra considera el concepto de densidad de trayectorias. Para un operador de evolución  $F^t(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , donde  $\mathbf{R}$  representa los números reales, el operador de Perron-Frobenius relaciona la densidad de trayectorias,  $\rho(y, t)$ , para el momento  $t$  con la densidad en un momento anterior. Para mapas, el operador Perron-Frobenius calcula la evolución de la densidad después de una iteración.

Se introduce un mapa  $y = F(x)$ , que transforma el intervalo  $\Delta_0 \subset \mathbf{R}$  en otro intervalo  $\Delta \subset \mathbf{R}$ . Por tanto,  $x \in \Delta_0$  e  $y \in \Delta$ . En  $\Delta_0$ , la densidad de las trayectorias se define como  $\rho_0(x)$ , y en  $\Delta$  la densidad es:  $\rho(y)$ . El operador de Perron-Frobenius,  $P \circ$ , transforma la densidad  $\rho_0(x)$  en  $\rho(y)$

$$\rho(y) = P \circ \rho_0(x) \quad (1)$$

Si se considera que  $\Delta = [a, y]$  – donde el límite superior  $y$  es variable –, por medio del operador de Perron-Frobenius se calcula la densidad  $\rho(y)$ :

$$\rho(y) = \frac{d}{dy} \int_{F^{-1}[a,y]} \rho_0(x) dx = \rho_0(F^{-1}(y)) \left| \frac{dF^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (2)$$

### 2.1. Mapas monotónicos por partes: evaluación de la función RPD

Se considera un mapa  $F(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ( $a$  y  $b$  son números reales)

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & a_0 \leq x < a_1, \\ F_2(x), & a_1 \leq x < a_2, \\ \dots \\ F_j(x), & a_{j-1} \leq x < a_j, \\ \dots \\ F_n(x), & a_{n-1} \leq x \leq a_n, \end{cases} \quad (3)$$

El intervalo  $[a, b]$  está compuesto de  $n$  sub-intervalos  $[a_{j-1}, a_j]$ , en los cuales la función  $F_j(x)$  es  $C^1$ . Para  $x \in [a, b]$ , la inversa de la Ec. (3) resulta

$$F^{-1}([a, x]) = \bigcup_{j=1}^n [a_{j-1}, F_j^{-1}(x)] \quad (4)$$

Entonces, para mapas como el dado por la Ec. (3), el operador de Perron-Frobenius resulta (Lasota y Mackey, 1985):

$$P \circ \rho(x) = \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{F_j^{-1}(x)} \rho(u) du = \sum_{j=1}^n \left| \frac{dF_j^{-1}(x)}{dx} \right| \rho(F_j^{-1}(x)) \quad (5)$$

Para calcular la función RPD, la suma en Ec. (5) debe excluir los intervalos que no producen reinyección (Elaskar et al., 2016; Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018):

$$\phi(x) = P_{int} \circ \rho(F_j^{-1}(x)) = \sum_{j \neq lm}^n \left| \frac{dF_j^{-1}(x)}{dx} \right| \rho(F_j^{-1}(x)) \quad (6)$$

$lm$  indica los intervalos que no generan reinyección y  $\rho(F_j^{-1}(x))$  es la densidad en los intervalos previos a la reinyección.

Se asume que  $\rho(F_j^{-1}(x)) = k$ , siendo  $k$  una constante que debe verificar (Elaskar et al., 2016; Elaskar, 2018)

$$\sum_{j \neq lm}^n \int_{F_j^{-1}(x_0-c)}^{F_j^{-1}(x_0+c)} \pm k dx = 1 \quad (7)$$

los signos positivo y negativo se emplean en mapas monotónicamente crecientes y decrecientes respectivamente.  $x_0$  es el punto fijo y  $c$  es la semi-amplitud del intervalo laminar.

### 3. METODOLOGÍA DE LA FUNCIÓN $M$

Se describe una metodología para el cálculo de la función RPD usando valores obtenidos en experimentos o simulaciones numéricas, sin la necesidad de conocer el mapa. El punto clave para resolver el problema del ajuste del modelo es introducir la siguiente integral:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{\int_{x_t}^x \tau \phi(\tau) d\tau}{\int_{x_t}^x \phi(\tau) d\tau} & \text{if } \int_{x_t}^x \phi(\tau) d\tau \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

donde  $x_t$  es un punto inicial de integración. Se demuestra que la función  $M(x)$  es una función lineal para una RPD dada una ley de potencia. Además la función  $M(x)$  es una herramienta fundamental para encontrar los parámetros  $\hat{x}$  y  $\alpha$  que determinan la función RPD (Elaskar y del Río, 2017).

La evaluación de la función  $M(x)$  se lleva a cabo mediante el cociente de integrales dado por la Ec. (8), por lo tanto su cálculo numérico es más robusto que la evaluación directa de la función RPD porque permite reducir las fluctuaciones estadísticas inclusive para un número bajo de datos y reducir la influencia del ruido (del Río et al., 2012). En la práctica la función  $M(x)$  es calculada desde una serie de datos que pueden ser obtenidos mediante simulaciones numéricas o desde estudios experimentales. Además, se destaca que la Ec. (8) es un promedio sobre los puntos de reinyección en el intervalo  $(x_t, x)$ , por lo que se puede escribir

$$M(x) = M_j \equiv \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j x_k, \quad x_{j-1} < x \leq x_j \quad (9)$$

donde el conjunto de datos obtenidos para un número  $N$  de puntos de reinyección,  $\{x_j\}_{j=1}^N$  ha sido previamente ordenado de menor a mayor, es decir,  $x_j \leq x_{j+1}$ . Como se dijo, para la función RPD descrita por una ley potencial, la Ec. (8) establece que la función  $M(x)$  sigue una ley lineal

$$M(x) = \begin{cases} m(x - \hat{x}) + \hat{x} & \text{if } x \geq \hat{x} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

donde  $m \in (0, 1)$  es un parámetro y  $\hat{x}$  puede ser aproximado por  $\hat{x} \approx \inf\{x_j\}$ . Por lo tanto, si se usa la Ec. (8), la función RPD resulta

$$\phi(x) = \lambda(\alpha)(x - \hat{x})^\alpha, \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{2m - 1}{1 - m}, \quad (11)$$

$\lambda(\alpha)$  es la constante de normalización que satisface

$$\int_L \phi(x) dx = 1, \quad (12)$$

donde  $L$  es la longitud del intervalo laminar.

Si se emplea la aproximación por mínimos cuadrados se puede estimar el parámetro  $m$  en la Ec. (10) y con el mismo determinar la función RPD por medio de las Ecs. (11) y (12).

Cuando  $m = 1/2$  se recupera la formulación clásica de intermitencia caótica que considera a la función RPD como uniforme, es decir  $\phi(x) = \text{cte}$ .

### 3.1. Aplicación a intermitencia tipo V

El mapa que se estudia está dado por las Ecs. (13 - 14). La Figura 1 muestra el mapa para  $\gamma = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,001$ ,  $g = 0$  y  $a = 0,25$ . Se destaca que este mapa ha sido analizado en (Fan et al., 1993; Elaskar et al., 2018a). En Fan et al. (1993) se usó sólo  $\gamma = 1$ , mientras que en Elaskar et al. (2018a) diferentes valores de  $\gamma$  fueron empleados.

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = \left[ \frac{f^{1/\gamma}(b_0) - f^{1/\gamma}(b_1)}{b_0 - b_1} (x - b_1) + f^{1/\gamma}(b_1) \right]^\gamma, & -0,8\pi \leq x < -0,5\pi, \\ F_2(x) = \frac{0,8\pi - g + F_3(x_{out})}{x_{out} + 0,5\pi} x + \frac{0,5\pi[F_3(x_{out}) - g] - 0,8\pi x_{out}}{x_{out} + 0,5\pi}, & -0,5\pi \leq x < x_{out}, \\ F_3(x) = x - a \sin(x) - \varepsilon, & x_{out} \leq x < \frac{23\pi}{20}, \\ F_4(x) = \frac{20[0,8\pi + F_3(x_{out})]}{\pi} x - 19,2\pi - 23F_3(x_{out}), & \frac{23\pi}{20} \leq x \leq \frac{6\pi}{5}, \end{cases} \quad (13)$$

siendo  $b_0 = -0,8\pi$ ,  $b_1 = -0,5\pi$ ,  $x_{out} = \varepsilon/(1 - a)$ ,  $g$  es la diferencia entre  $F_2(x_{out})$  y  $F_3(x_{out})$ , y  $f(x)$  está dada por

$$f(x) = \frac{10[1,2\pi - F_3(x_{out})]}{3\pi} x + 3,2\pi - \frac{5F_3(x_{out})}{3} \quad (14)$$

El mapa dado por las Ecs. (13 - 14) cuando  $\varepsilon \neq 0$  posee un único punto fijo  $x_0 = \pi + \arcsin(\varepsilon/a)$ . Para comparar los resultados aquí obtenidos con los publicados en trabajos previos, se utiliza el mismo intervalo laminar que fue implementado en Fan et al. (1993), éste es  $x_{out} \leq x \leq x_0 = c$ . Se destaca que la amplitud del intervalo laminar es tan grande como la amplitud del régimen caótico, por lo tanto, sólo  $F_1(x)$  puede retornar las trayectorias desde la zona caótica hacia la laminar como muestra la Figura 1.

La función RPD es calculada por medio de las Ecs. (6) y (7), y debe tenerse en consideración solo las trayectorias emitidas desde  $F_1(x)$  que pueden reinyectarse en el intervalo laminar

$$\phi(x) = k \left| \frac{dF_1^{-1}(x)}{dx} \right| \quad (15)$$

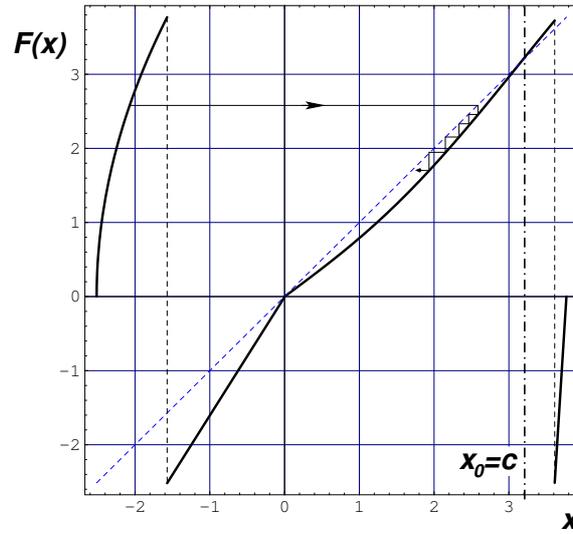


Figura 1: Mapa para  $\gamma = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,001$ ,  $a = 0,25$ . El límite superior del intervalo laminar es  $x_0 = c$  y está indicado por la recta vertical de trazos y puntos.

donde  $|dF_1^{-1}(x)/dx|$  es

$$\left| \frac{dF_1^{-1}(x)}{dx} \right| = \frac{(b_0 - b_1) x^{1/\gamma-1}}{\gamma (f^{1/\gamma}(b_0) - f^{1/\gamma}(b_1))} \quad (16)$$

$k$  es obtenido mediante la condición de normalización

$$\int_{F_1^{-1}(x_{out})}^{F_1^{-1}(c)} k dx = 1, \Rightarrow k = \frac{f^{1/\gamma}(b_0) - f^{1/\gamma}(b_1)}{(b_0 - b_1) (c^{1/\gamma} - x_{out}^{1/\gamma})} \quad (17)$$

Finalmente, la función RPD resulta

$$\phi(x) = \frac{x^{1/\gamma-1}}{\gamma (c^{1/\gamma} - x_{out}^{1/\gamma})} \quad (18)$$

Con la finalidad de analizar la capacidad de la técnica de continuidad para determinar la función RPD los resultados obtenidos se comparan con aquellos evaluados usando la metodología de la función  $M$  y con datos numéricos. Para la obtención de éstos últimos se desarrolla un proceso iterativo para el mapa en estudio, además se divide el intervalo laminar en  $N_s$  subintervalos, para luego evaluar el histograma de las reinyecciones y la función RPD numérica.

Se estudian tres casos. El primero posee los siguientes parámetros (Fan et al., 1993):  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $g = 0$ ,  $a = 0,25$ , siendo el intervalo laminar  $x_{out} \leq x \leq x_0 = c$ . Para aplicar la técnica de continuidad, se implementa la Ec. (18)

$$\phi(x) = \frac{x^{1/\gamma-1}}{\gamma (c^{1/\gamma} - x_{out}^{1/\gamma})} = \frac{1}{c - x_{out}} \quad (19)$$

En estudios previos, para este caso, la función RPD ha sido calculada mediante la metodología de la función  $M$  (Elaskar, 2018), resultando la misma

$$\phi(x) \cong \frac{1}{c - x_{out}} \quad (20)$$

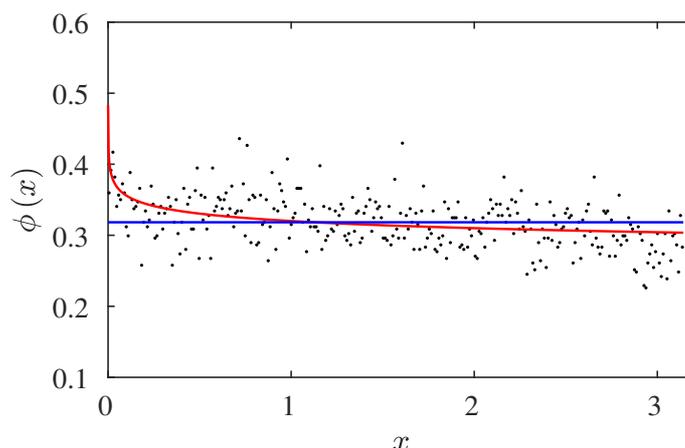


Figura 2: Funciones RPD con  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $a = 0,25$ . Línea azul: técnica de continuidad. Línea roja: metodología de la función  $M$ . Puntos negros: resultados numéricos.

Se observa que ambas funciones RPD, dadas por las Ecs. (19) y (20), son muy similares. La Figura 2 muestra las funciones RPD obtenidas con la técnica de continuidad, la metodología de la función  $M$  y datos numéricos. Se destaca que ambas técnicas obtienen buenos resultados comparados con los los valores numéricos.

Para el segundo test se emplean los mismos parámetros que en el primero, solamente se modifica el exponente  $\gamma = 0,5$ . Usando la técnica de continuidad, Ec. (18), se tiene

$$\phi(x) = \frac{x^{1/\gamma-1}}{\gamma (c^{1/\gamma} - x_{out}^{1/\gamma})} = \frac{2x}{(c^2 - x_{out}^2)} \quad (21)$$

Por medio de la metodología de la función  $M$  se encuentra (Elaskar et al., 2018a):

$$\phi(x) \cong 1,94 \frac{(x - x_{out})^{0,94}}{(c - x_{out})^{1,94}} \quad (22)$$

La Figura 3 muestra las RPDs calculadas por las Ecs. (21) y (22). Las líneas roja y azul corresponden a la metodología de la función  $M$  y a la técnica de continuidad respectivamente. Se observa que ambas funciones RPD son similares.

Para el tercer caso los parámetros son  $\gamma = 1,5$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $a = 0,25$ . La función RPD obtenida mediante la técnica de continuidad resulta

$$\phi(x) = \frac{x^{1/\gamma-1}}{\gamma (c^{1/\gamma} - x_{out}^{1/\gamma})} = \frac{2x^{-1/3}}{3 (c^{2/3} - x_{out}^{2/3})} \quad (23)$$

Mientras que la calculada con la metodología de la función  $M$  es (Elaskar, 2018):

$$\phi(x) \cong 0,6228 \frac{(x - x_{out})^{-0,3772}}{(c - x_{out})^{0,6228}} \quad (24)$$

Las funciones RPD calculadas por medio de la técnica de continuidad (línea azul) y por la metodología de la función  $M$  (puntos rojos) están dadas en la Figura 4. Se destaca la buena concordancia entre ambas funciones.

Se destaca que ambas metodologías, la de continuidad y la de la función  $M$ , obtienen funciones RPD muy similares para los tres casos analizados. Además, ambas concuerdan bien con los resultados experimentales.

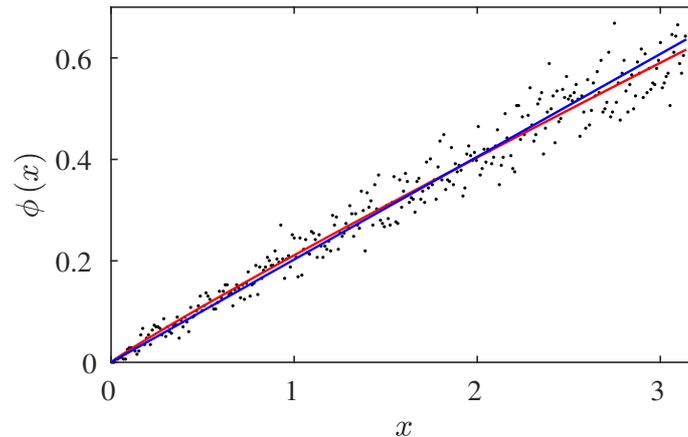


Figura 3: Funciones RPD con  $\gamma = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $a = 0,25$ . Línea azul: técnica de continuidad. Línea roja: metodología de la función  $M$ . Puntos negros: resultados numéricos.

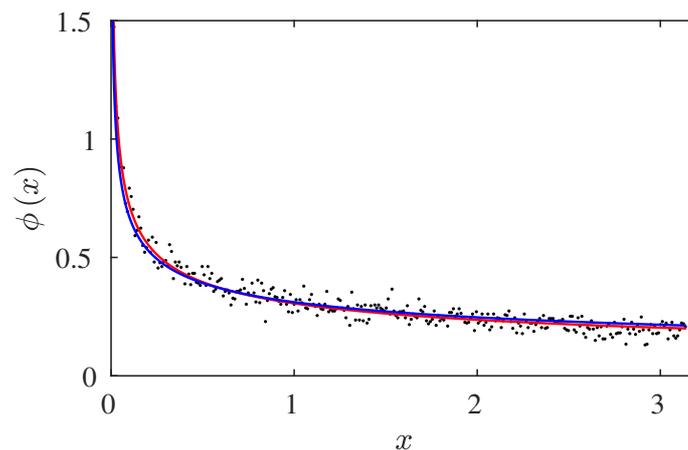


Figura 4: Funciones RPD con  $\gamma = 1,5$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $a = 0,25$ . Línea azul: técnica de continuidad. Línea roja: metodología de la función  $M$ . Puntos negros: resultados numéricos.

#### 4. CONCLUSIONES

En este artículo, se presentan nuevos resultados obtenidos mediante la técnica de continuidad, que adapta al operador de Perron-Frobenius para evaluar la función de densidad de probabilidad de reinyección,  $\phi(x)$ , en intermitencia de tipo V.

Los resultados teóricos obtenidos por la técnica de continuidad son comparados con los calculados por la metodología de función  $M$  que ya ha mostrado ser muy precisa en intermitencia tipo V en general y para los casos aquí estudiados en particular (Elaskar y del Río, 2017; del Río y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Río et al., 2012; Elaskar y del Río, 2012; del Río et al., 2013, 2014; Elaskar et al., 2016; del Río y Elaskar, 2016a; Elaskar et al., 2017, 2018a,b; Elaskar, 2018; del Río y Elaskar, 2018; Elaskar et al., 2018a; Elaskar y del Río, 2018; del Río y Elaskar, 2019, 2020). Además, ambas RPDs teóricas son comparadas con datos calculados numéricamente.

Se ha encontrado que ambas metodologías obtienen funciones RPD muy similares para el

mapa estudiado, inclusive usando diferentes parámetros. Además, las funciones  $\phi(x)$  calculadas con la técnica de continuidad muestran un comportamiento más amplio que el esperado con la teoría clásica de intermitencia (reinyección uniforme).

Se puede concluir que la técnica de continuidad, descrita e implementada en este trabajo, es una herramienta adecuada para analizar y evaluar analíticamente la función de densidad de probabilidad de reinyección en intermitencia tipo V.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por SECyT de la UNC. Los autores también agradecen al IDIT, al Dto. de Aeronáutica de la UNC y al Dto. de Física de la ETSIAE, UPM.

## REFERENCIAS

- Bauer M., Habip S., He D., y Martiessen W. New type of intermittency in discontinuous maps. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1625–1628, 1992.
- Chian A. *Complex System Approach to Economic Dynamics. In Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 39–50. Springer, 2007.
- del Río E. y Elaskar S. New characteristic relation in type ii intermittency. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20:1185–1191, 2010.
- del Río E. y Elaskar S. The intermittency route to chaos. *Handbook of Applications of Chaos Theory. Christos H. Skiadas, Charilaos Skiadas, Eds. CRC Press Book, ISBN 9781466590434. Paris*, 1:3–20, 2016a.
- del Río E. y Elaskar S. On the intermittency theory. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 26:1650228, 2016b.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental evidence of power law reinjection in chaotic intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 64:122–134, 2018.
- del Río E. y Elaskar S. New type of intermittency in discontinuous maps. *Proc. of the Internat. Conf. Theoretical Approaches in Non-Linear Dynamical Systems*, 1:97–109, 2019.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental results versus computer simulations of noisy poincaré maps in an intermittency scenario. *Regular and Chaotic Dynamics*, 25:281–294, 2020.
- del Río E., Elaskar S., y Donoso J. Laminar length and characteristic relation in type i intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 19:967–976, 2014.
- del Río E., Elaskar S., y Makarov S. Theory of intermittency applied to classical pathological cases. *Chaos*, 19:967–976, 2013.
- del Río E., Sanjuán M., y Elaskar S. Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17:3587–3596, 2012.
- Dubois M., Rubio M., y Berge P. Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1446–1449, 1983.
- Elaskar S. *Studies on Chaotic Intermittency*. Doctoral Thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Spain, 2018.
- Elaskar S. y del Río E. Intermittency reinjection probability function with and without noise effects. *Latest Trends in Circuits, Automatics Control and Signal Processing. ISBN: 978-1-61804-131-9, Barcelona*, 1:145–154, 2012.
- Elaskar S. y del Río E. *New Advances on Chaotic Intermittency and its Applications*. Springer, 2017.
- Elaskar S. y del Río E. Discontinuous reinjection probability density function in type v intermittency. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 13:121001–10, 2018.

- Elaskar S., del Río E., y Costa A. Reinjection probability density for type iii intermittency with noise and lower boundary of reinjection. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 12:031020–11, 2017.
- Elaskar S., del Río E., y Donoso J. Reinjection probability density in type iii intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768, 2011.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Non-uniform reinjection probability density function in type v intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 92:683–697, 2018a.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Some characteristics of the m function methodology to describe the reinjection process in chaotic intermittency. *Open Access J. Math. Theor. Phys.*, 1:168–173, 2018b.
- Elaskar S., del Río E., Krause G., y Costa A. Effect of the lower boundary of reinjection and noise in type ii intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 79:1411–1424, 2015.
- Elaskar S., del Río E., y Zapico E. Evaluation of the statistical properties for type-ii intermittency using the perron-frobenius operator. *Nonlinear Dynam.*, 86:1107–1116, 2016.
- Fan J., Ji F., Guan S., Wang B., y He D. The distribution of laminar lengths in type v intermittency. *Phys. Lett. A*, 182:232–237, 1993.
- Gu H. y Xiao W. Difference between intermittent chaotic bursting and spiking of neural firing patterns. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 24:1450082, 2014.
- He D., Bauer M., Habip S., Kruger U., Martiessen W., Christiansen B., y Wang B. Type v intermittency. *Phys. Lett. A*, 171:61–65, 1992.
- Hirsch J., Huberman B., y Scalapino D. Theory of intermittency. *Phys. Rev. A*, 25:519–532, 1982.
- Krause G., Elaskar S., y del Río E. Noise effect on statistical properties of type i intermittency. *Physica A*, 402:318–329, 2014a.
- Krause G., Elaskar S., y del Río E. Type i intermittency with discontinuous reinjection probability density in a truncation model of the derivative nonlinear schrödinger equation. *Nonlinear Dynam.*, 402:318–329, 2014b.
- Lasota A. y Mackey M. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge University Press, 1985.
- Marek M. y Schreiber I. *Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- Nayfeh A. y Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley, 1995.
- Paradisi P., Allegrini P., Gemignani A., Laurino M., Menicucci D., y Piarulli A. Scaling and intermittency of brains events as a manifestation of consciousness. *AIP Conf. Proc.*, 1510:151–161, 2012.
- Pizza G., Frouzakis C., y Mantzaras J. Chaotic dynamics in premixed hydrogen/air channel flow combustion. 16:275–299, 2012.
- Sanmartín J., Lopez-Rebollal O., del Rio E., y Elaskar S. Hard transition to chaotic dynamics in alfven wave-fronts. *Phys. Plasmas*, 11:2026–2035, 2004.
- Schuster H. y Just W. *Deterministic Chaos*. Wiley VCH, 2005.
- Sánchez-Arriaga G., Sanmartín J., y Elaskar S. Damping models in the truncated derivative nonlinear schrodinger equation. *Phys. Plasmas*, 14:082108, 2007.
- Wang D., Mo J., Zhao X., Gu H., Qu S., y Ren W. Intermittent chaotic neural firing characterized by non-smooth like features. *Chin. Phys. Lett.*, 27:070503, 2011.
- Wu S. y He D. Characteristics of period-doubling bifurcation cascades in quasidiscontinuous systems. *Commun. Theor. Phys.*, 35:275–282, 2001.
- Zebrowski J. y Baranowski R. Type-i intermittency in nonstationary systems: Models and human heart-rate variability. *Physica A*, 336:74–86, 2004.