

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO COMPRESIBLE EN TOBERAS CONVERGENTE-DIVERGENTES

NUMERICAL SIMULATION OF COMPRESSIBLE FLOW IN CONVERGENT-DIVERGENT NOZZLES

Sebastián N. Bertolo^a y Sergio A. Elaskar^{a,b}

^a*Inst. de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, UNC-CONICET
Fac. de Cs. Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarfield 1611,
Córdoba, Argentina.*

^b*Dpto. Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de
Córdoba, Argentina.*

Palabras clave: OpenFOAM, tobera, mecánica de fluidos computacional, flujo turbulento.

Resumen. En este trabajo se utiliza el código OpenFOAM para analizar, por medio de la mecánica de fluidos computacional, el flujo en una tobera converge-divergente, tanto en régimen de funcionamiento como fuera del mismo. Se estudia tanto el flujo dentro de la tobera como en la descarga. Para la evaluación de los flujos se implementan esquemas TVD y el modelo $k-\omega$ SST es considerado para la simulación del flujo turbulento. Los resultados numéricos son comparados con datos experimentales y con los dados por la teoría de flujos gas dinámicos cuasi-unidimensionales encontrando una buena concordancia entre los mismos. Se destaca el caso más severo sucede para la tobera trabajando en un régimen fuera de funcionamiento, en el cual aparecen algunas diferencias alrededor de la onda de choque.

Keywords: OpenFOAM, nozzle, computational fluid dynamics, turbulent flow.

Abstract. In this work, the OpenFoam code is used to study the flow in a convergent-divergent nozzle. Flow in the operating regime as out of it is simulated. Also, the flow inside and outside the nozzle is studied. For the evaluation of the numerical flow, TVD schemes are implemented, and the $k-\omega$ SST model is used for turbulent flow simulation. The numerical results are compared with experimental data and with quasi-one-dimensional gas dynamic theory, finding a good agreement between them. The most severe case occurs for the nozzle working in a non-operating regime, in which some differences between numerical and experimental data appear around the shock wave.

1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la dinámica de fluidos, uno de los fenómenos que resulta muy interesante y de los más complejos, es la interacción entre la onda de choque y capa límite, correspondiente a un flujo supersónico turbulento.

Este hecho mencionado se lo puede encontrar en dispositivos denominados toberas, las cuales son utilizadas en el campo de la ingeniería aeronáutica y aeroespacial. Dado su grado de complejidad, es que no existen soluciones analíticas para estudiarlas de manera completa, es por ello que se utilizan métodos numéricos para realizar su desarrollo. En el presente trabajo se busca investigar sobre dichos elementos, comparando los resultados obtenidos por medio de simulaciones numéricas, realizadas en el software OpenFOAM, con respecto a datos experimentales para una tobera en particular.

Las toberas como la aquí analizada se usan fundamentalmente para descarga de gases propulsivos en cohetes, por lo tanto poder describir adecuadamente este tipo de flujos es de vital importancia para proyectos de acceso al espacio. Para realizar las simulaciones numéricas se implementa el código de acceso libre OpenFOAM debido a la experiencia existente en el grupo de trabajo (Gutiérrez Marcantoni et al., 2012, 2017a,b, 2019; Lorenzon y Elaskar, 2015).

El trabajo consta de 6 secciones, comenzando con la presente introducción. En la Sección 2 se estudia el comportamiento del flujo en toberas con una serie de hipótesis. En la Sección 3 se detallan las ecuaciones de gobierno, el método de volúmenes finitos y el modelo de turbulencia utilizado. La Sección 4 esta dedicada al modelado y mallado del dominio. Luego se presentan los resultados obtenidos por medio de gráficos comparativos en la Sección 5. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones del estudio llevado a cabo realizado.

2. FLUJO EN TOBERAS

Es posible definir una tobera como aquel dispositivo destinado a aumentar la energía cinética de un fluido (aumento de su velocidad) a costas de la entalpía. La característica más notable es que no necesita modificar ningún aspecto físico (variación geometría, aporte de calor, etc) para cumplir su fin, simplemente se lo diseña con la forma requerida. Están presentes en muchas aplicaciones, utilizadas ampliamente en túneles de viento, como así también en cohetes.

Para dar con un estudio analítico de estos elementos, se realiza un análisis simplificado pero muy rico considerando una serie de hipótesis, las cuales son: flujo de viscosidad nula, estacionario, sin transferencia de calor. Debido a las suposiciones empleadas es que solo se considera la variación de sus propiedades, las cuales son: densidad (ρ), componente de velocidad (u), y presión (p), en la dirección longitudinal de la tobera, que corresponde al eje x utilizando un sistema de coordenadas cartesianas. Esto quiere decir que las variables dependerán de la posición x analizada y también del área asociada a dicha sección, es por ello que este estudio se lo denomina *flujo cuasi-unidimensional*, ya que el área de interés (A) depende únicamente de la coordenada x asociada.

En base a lo indicado, aplicando las ecuaciones de gobierno en forma logarítmica-diferencial al flujo en la tobera, da como resultado la conocida relación área-velocidad, que se escribe a continuación.

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (1)$$

En donde el parámetro M es el número de Mach. Esta relación resulta muy importante, ya que explica el funcionamiento de estos dispositivos. Básicamente lo que enuncia es que cuando

el flujo es subsónico ($M < 1$) una disminución del área produce un incremento de la velocidad del flujo, en cambio cuando es supersónico, ocurre lo contrario. En el caso sónico ($M = 1$) resulta en $dA = 0$, que según las reglas del cálculo diferencial, corresponde a un máximo o mínimo en la distribución de áreas; se ha demostrado que se alcanza $M = 1$ en la zona de menor área de las toberas, conocida como "garganta".

Lo explicado muestra porque las toberas convergentes-divergentes poseen dicha geometría. El flujo al ingresar atraviesa una parte convergente, que produce un aumento de velocidad con la premisa de alcanzar $M = 1$ en la garganta, luego circula a través del divergente, y debido a que el $M > 1$, continua incrementando su velocidad obteniendo flujo supersónico a la salida. Si la presión de descarga coincide con la de salida y además el flujo en el divergente es supersónico, la tobera se encuentra en régimen de funcionamiento, ya que la diferencia de presión entre la entrada y la salida es la adecuada para poseer este tipo de flujo. Sin embargo, es importante resaltar que, pueden generarse ondas de choque en el divergente debido a un insuficiente diferencia de presión, lo cual se traduce en que la tobera funcione fuera de régimen.

Las ecuaciones a utilizar cuando la tobera se encuentra funcionando en régimen son: relación área-número de Mach, que permite determinar dicho parámetro en la zona de interés, y las ecuaciones de flujo isoentrópico, para calcular la presión.

$$\left(\frac{A}{A^*}\right) = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (2)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Se destaca que una descripción mas detallada de lo desarrollado en la presente sección se encuentra en [Anderson \(2003\)](#); [Toro \(2009\)](#).

3. ECUACIONES DE GOBIERNO Y MÉTODOS DE SOLUCIÓN

En esta sección se describen de forma resumida las ecuaciones que gobiernan el flujo y los métodos numéricos utilizados en su solución.

3.1. Ecuaciones de Gobierno

Dado que se trabajará con flujo compresible turbulento, las ecuaciones a utilizar son las *FANS* (*Favre Average Navier-Stokes*), que como enuncia su nombre se descompone las variables instantáneas según lo desarrollado por *Favre*. A continuación se detallan las ecuaciones de conservación de continuidad Ec. (3), cantidad de movimiento Ec. (4) y energía Ec. (5).

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ji} - \tau_{ij}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{H}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_i \bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) + \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \tilde{u}_i \tau_{ij} \right) \quad (5)$$

Siendo el tensor de tensiones

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\tilde{S}_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{\tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad \tau_{ij} = 2\mu_t \left(\tilde{S}_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{\tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (6)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, μ_t viscosidad turbulenta o de remolino, t el tiempo, c_p el calor específico a presión constante, Pr el número de Prandtl, T la temperatura, k es la energía cinética turbulenta y σ_k una constante que depende del modelo de transporte utilizado.

Cabe aclarar que las variables afectadas por el símbolo \sim corresponden a los valores medios de la descomposición de Reynolds, mientras el símbolo $\tilde{\sim}$ corresponde a los valores medios de la descomposición de Favre. Para ver en detalle la obtención de ellas y todas las aproximaciones utilizadas, consultar [Wilcox \(2006\)](#); [Gatski y Bonnet \(2013\)](#); [Cebeci \(2013\)](#).

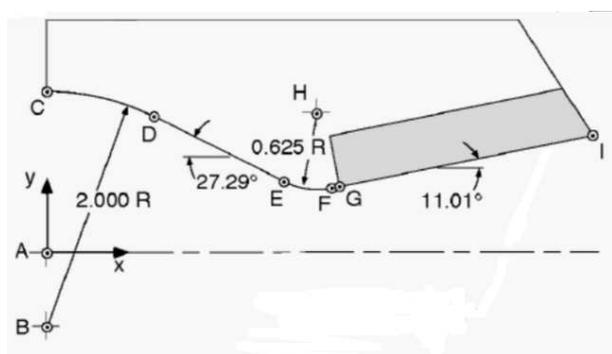
El sistema obtenido resulta incompatible, ya que se poseen más incógnitas que ecuaciones. Para poder salvar dicho problema, se utilizan las denominadas ecuaciones de transporte, basadas en modelar la evolución de alguna propiedad turbulenta y a partir de ello calcular el factor μ_t . Existen un gran abanico de modelos que se pueden encontrar en la bibliografía, en el presente trabajo se optó por uno de dos ecuaciones, denominado $k - \omega SST$; el cual es función de la energía cinética turbulenta (k) y del rango específico de disipación turbulenta (ω). Ver [Wilcox \(2006\)](#) para consultar en detalle su formulación y constantes.

3.2. Método de solución

El sistema descrito en la subsección anterior está compuesto por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que no poseen solución analítica. Es por que ello que se utilizan métodos numéricos para encontrar soluciones y evaluar las variables en ciertos puntos del dominio. Para el presente trabajo se utiliza el método de volúmenes finitos para discretizar las ecuaciones de gobierno, el cual se encuentra detallado en [Versteeg y Malalasekera \(2007\)](#). El solver utilizado es *rhoCentralFoam*, el cual se basa en el esquema de Kurganov y Tadmor para evaluar los flujos numéricos ([Kurganov y Tadmor, 2000](#)), utilizando como limitador de flujo el de *vanLeer*.

4. MODELADO Y MALLADO

La geometría de la tobera como el instrumental para el ensayo se encuentran detallados en [Hunter \(1998\)](#), en la Fig. (1) se observa los puntos para construirla y las respectivas coordenadas de ellos.



(a)

Punto	Coordenadas (m)	
	x	y
A	0	0
B	0	-0,0156
C	0	0,0352
D	0,0233	0,0295
E	0,0505	0,0155
F	0,0608	0,0140
G	0,062	0,014
H	0,058	0,030
I	0,116	0,025

(b)

Figura 1: Geometría de la tobera. (a)Puntos característicos. (b)Coordenadas.

En la Fig. (2) se observa el dominio de análisis, conformado por la tobera y el entorno circundante a ella con el objetivo de modelar el flujo de descarga. También para que resulte más didáctico se identifican los bordes del dominio para la posterior definición de ellos. Cabe destacar que al poseer un plano de simetría, solo se trabaja con la parte superior de ella.

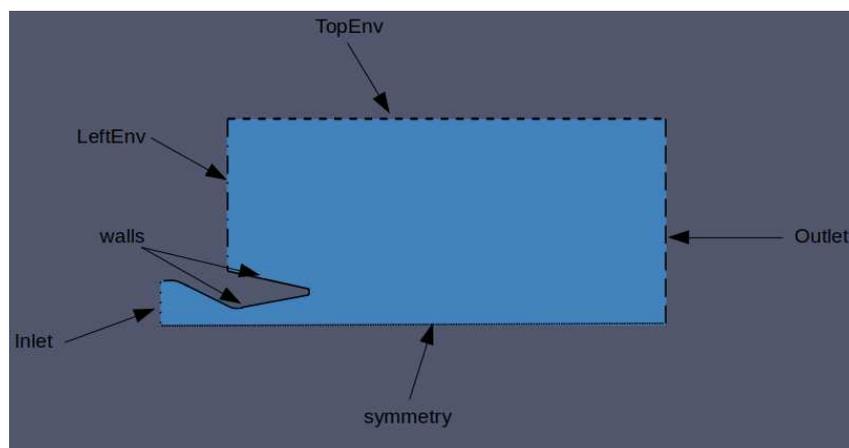


Figura 2: Dominio de análisis.

Para las etapas de construcción del dominio y generación de la malla se utilizó un software externo a OpenFOAM denominado Gmsh, [Geuzaine y Remacle \(2009\)](#).

El dominio se discretiza por medio de una malla de cuadriláteros, procurando densificarla en aquellas zonas que revisten de mayor interés, como la pared de la tobera para tratar de cumplir con la premisa de la altura dimensional y^+ sea la adecuada para la simulación, [Wilcox \(2006\)](#). Para obtener soluciones de alta calidad, se debe mallar de modo de que el primer elemento de mallada adyacente a la pared cumpla con $y^+ \leq 1$, el problema, como será enunciado más adelante, es el enorme costo computacional para ello.

En la Fig. (3) se visualiza la malla de 250000 elementos utilizada en este trabajo. Se destaca que hay una mayor densidad de volúmenes en la zona del divergente y cerca de la pared, porque dichos lugares resultan cruciales para una correcta simulación.

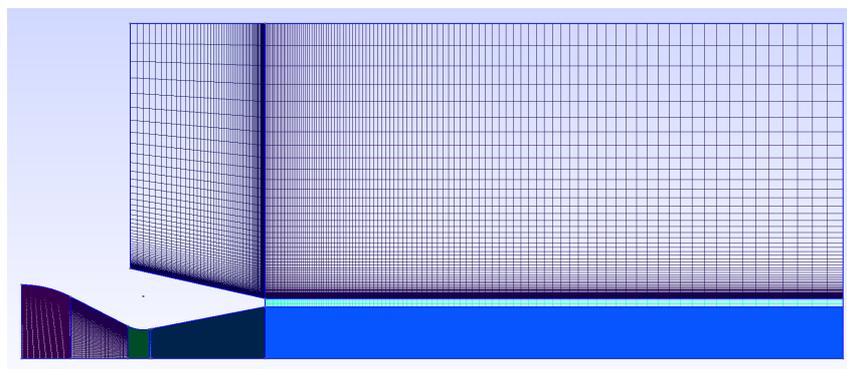


Figura 3: Dominio mallado.

5. RESULTADOS

En la presente sección se listan los resultados obtenidos para 3 casos distintos de presión total a la entrada, definidos adimensionalmente como NPR , que es el cociente entre la presión total

a la entrada y la ambiente. Se definieron condiciones ambientales dadas por $p_a = 102387,15 Pa$ y $T_a = 294,4 K$. Los casos se estudiaron de manera bidimensional, es decir no se consideraron variaciones de las propiedades en dirección normal al plano que define la tobera.

En todos los resultados obtenidos se grafica la distribución de presiones estáticas p en la pared a lo largo de la tobera, adimensionalizada con respecto a la presión de estancamiento en la entrada, (p_{oj}). Estos valores se encuentran en función de la relación x/x_t , siendo x la posición en la cual se mensura la presión, y x_t la ubicación de la garganta. Cabe aclarar que tanto x como x_t son medidos sobre la línea media de la tobera.

En la Tabla 1 se encuentran las condiciones de borde utilizadas para las variables que solicita el software OpenCFD (2020).

Dado que se pretende resolver flujos inestacionarios, es necesario también definir las condiciones iniciales, para ello en el caso de la presión y temperatura se utilizan valores ambiente, flujo en reposo para la velocidad, y para las variables asociadas al esquema turbulento (k , ω , ν) se emplea lo recomendado según OpenCFD (2020); Wilcox (2006).

Denominación	p	T	U	k	ω	ν
Inlet	TotalPressure $p_0=p_a * NPR$	TotalTemperature $T_0=295 K$	zeroGradient	turbulentIntensity KineticEnergyInlet	turbulentMixing FrequencyInlet	calculated
LeftEnv	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
TopEnv	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
RightEnv	Caso supersónico zeroGradient Caso subsónico fixedValue-p= p_a	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
Symmetry	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane
Walls	zeroGradient	zeroGradient	noSlip	kqRWallFunction	omegaWallFunction	nutkWallFunction

Tabla 1: Condiciones de borde.

5.1. NPR=2,006

En la Fig. (4) se presenta la distribución de presión estática en la pared de la tobera, se observa buena concordancia con los resultados experimentales, habiendo discrepancias únicamente en la zona con elevados gradientes de presión debido a la onda de choque. Además, se encuentra en la Fig. (5) que la posición de la onda de choque obtenida por medio de la simulación difiere muy poco con respecto a la verificada en el ensayo. Por otra parte, la estructura de ondas y flujo son prácticamente idénticas.

5.2. NPR=2,412

La Fig. (6) presenta la distribución de presión estática, de forma similar al caso anterior hay buena concordancia entre los resultados de la simulación con los datos experimentales, encontrándose discrepancias producidas alrededor de la onda de choque.

Se puede ver de la Fig. (7) que la posición de la onda obtenida por medio de la simulación difiere en un 5 % con respecto al ensayo, a diferencia del caso NPR=2,006 en donde la discrepancia era mínima; aún así la estructura geométrica de ondas es muy similar en ambos estudios.

5.3. NPR=5,423

Se presenta el análisis realizado para una presión de estancamiento a la entrada de 555245, 51Pa que el ensayo indica como aquella presión de estancamiento partir de la cual la tobera comien-

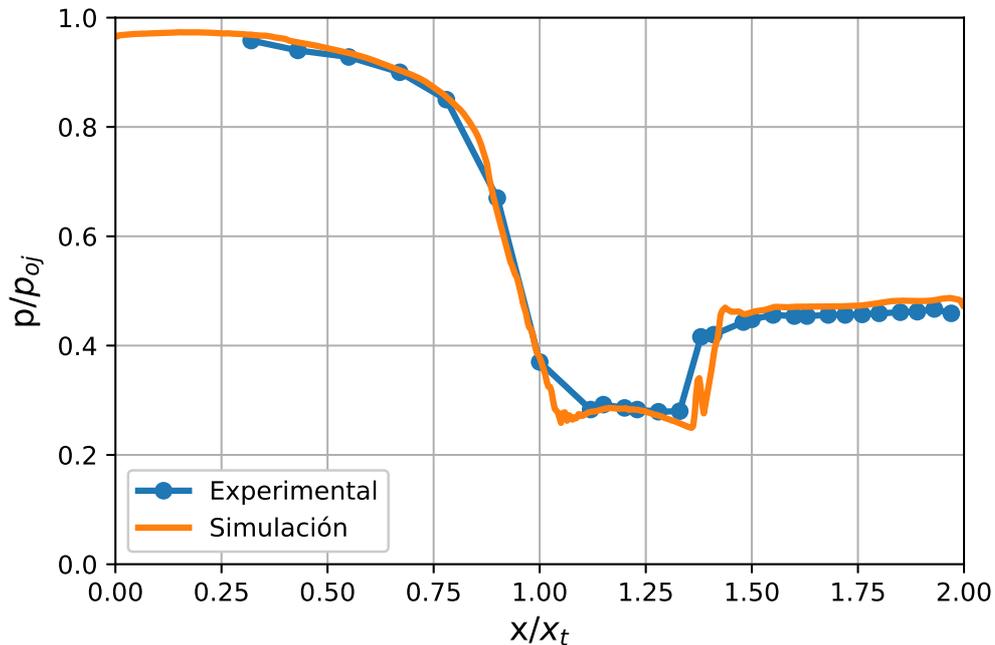


Figura 4: Resultados de la simulación y experimentales para $NPR = 2,006$.

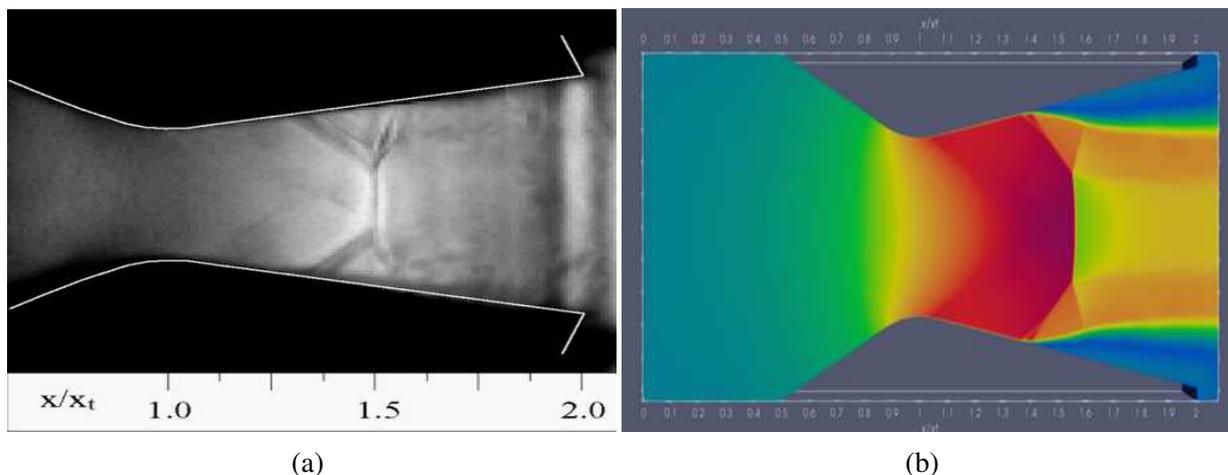


Figura 5: Posición onda de choque, $NPR = 2,006$. (a) Ensayo experimental. (b) Simulación numérica.

za a trabajar en régimen de funcionamiento. Por lo tanto en la Fig. (9) no se visualiza onda de choque. También, de dicha figura es importante hacer notar que la tobera en el presente caso corresponde a la clasificación de sobre-expandida, debido a la geometría del flujo que deja la tobera (Anderson, 2003).

En la Fig. (8) los resultados de la simulación verifican adecuadamente los datos experimentales y es importante ver, que a diferencia de las figuras anteriores, se coloca el análisis obtenido por medio de la teoría de flujo quasi-unidimensional, debido a que se encuentra en régimen de funcionamiento y es válido dicho estudio, obteniendo resultados muy acordes a la realidad con ecuaciones que son muy simples.

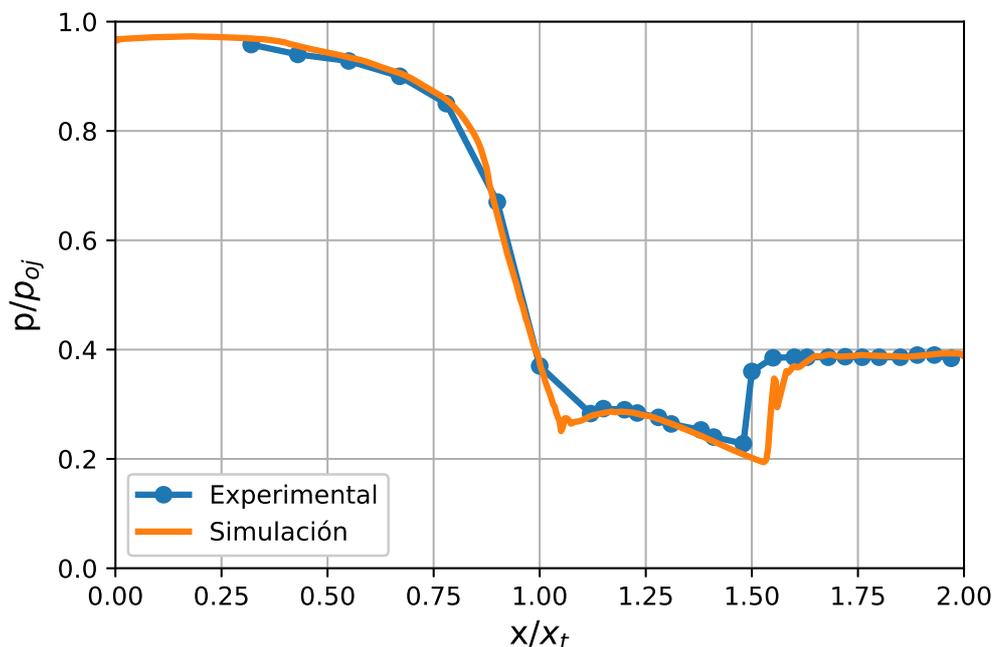


Figura 6: Resultados de la simulación y experimentales para $NPR = 2,412$.

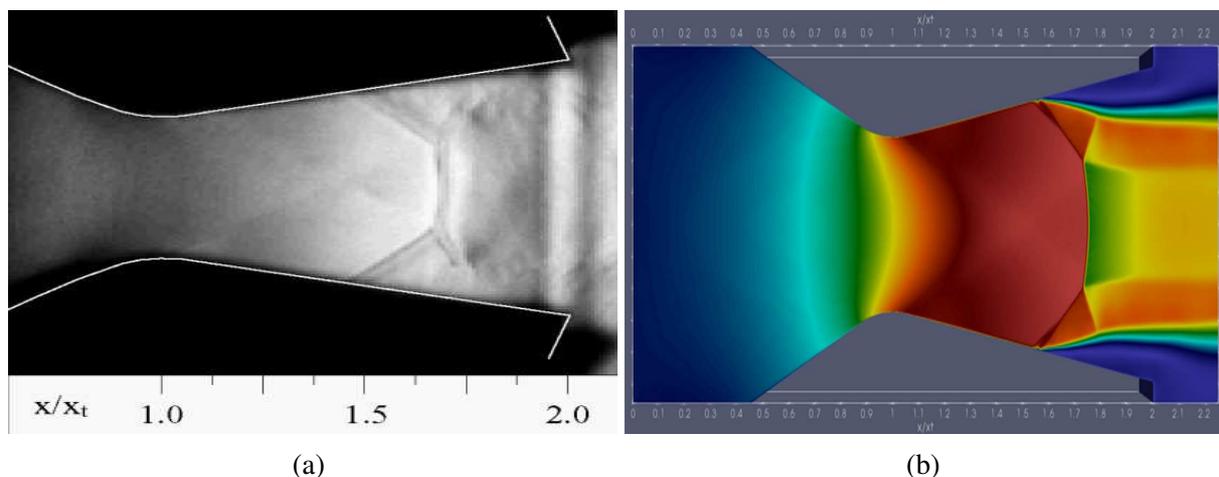


Figura 7: Posición onda de choque, $NPR = 2,412$. (a) Ensayo experimental. (b) Simulación numérica.

En la Fig. (9) se muestra como se generan e interactúan en el chorro de salida las ondas de expansión y compresión formando el esquema característico del flujo exterior en toberas sobre-expandidas.

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realizó un estudio numérico del flujo supersónico dentro y fuera en una tobera convergente-divergente. Se llevaron a cabo comparaciones entre simulaciones numéricas ejecutadas en el software *OpenFOAM* por medio del esquema *rhoCentralFoam* y resultados experimentales considerando la tobera que se encuentra detallada en [Hunter \(1998\)](#).

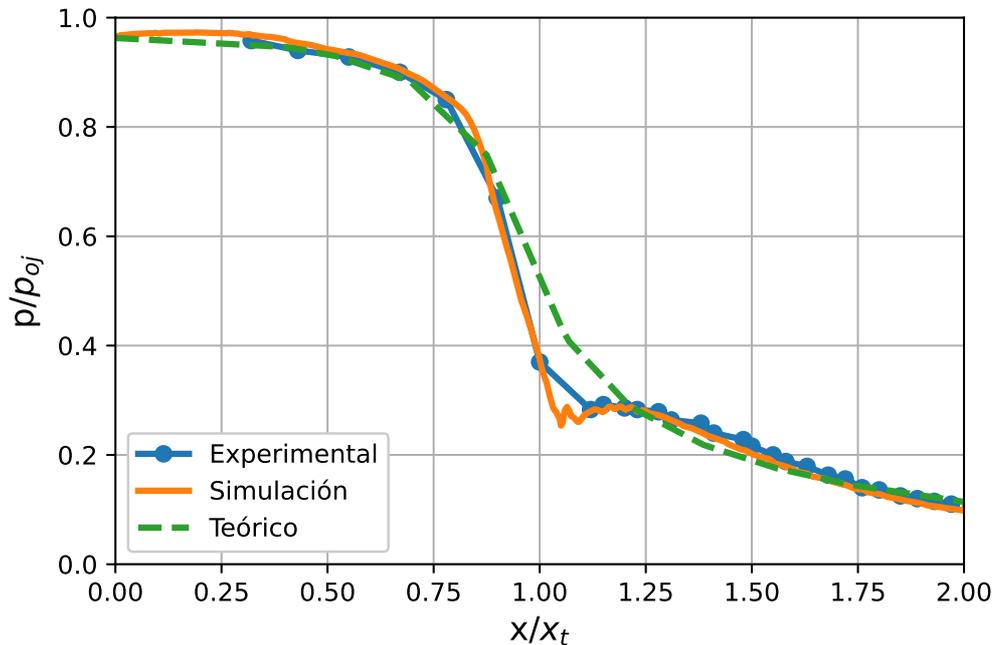


Figura 8: Resultados de la simulación, teoría flujo cuasi-unidimensional y experimentales para $NPR = 5,423$.

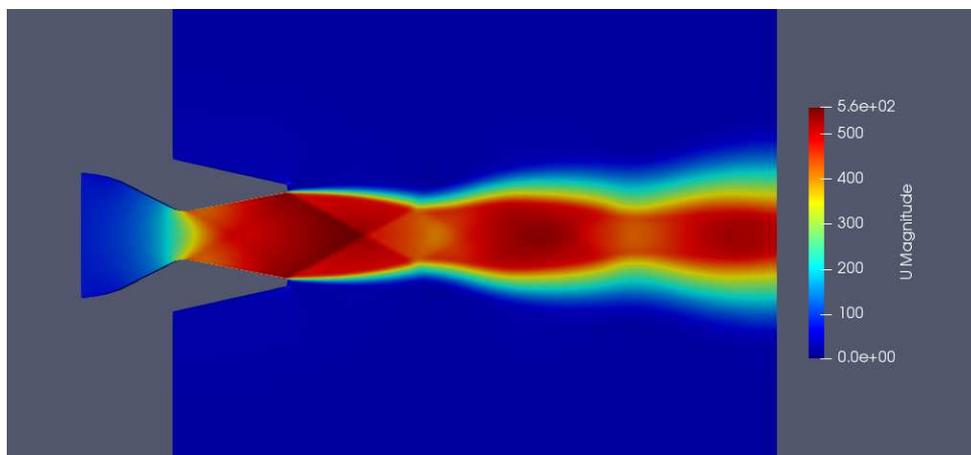


Figura 9: Flujo de descarga, $NPR = 5,423$.

Se evidencia que los resultados obtenidos por medio de la simulación son muy acordes a los datos experimentales, únicamente hay discrepancias en la posición de la onda de choque (menos de un 5%), lo cual puede atribuirse a la orientación de los elementos en la malla, ya que para captar dicha interacción onda de choque-capa límite se sugiere que el primer elemento cumpla con $y^+ < 1$, pero esta premisa no fue posible cumplirla ya que el costo computacional que surgía era extremadamente elevado.

Otro aspecto que se evidencia en las figuras es que en las simulaciones se generan ciertas oscilaciones en las zonas donde hay gradientes, el motivo de este fenómeno abarca gran cantidad de opciones, que van desde el esquema utilizado, la disposición de los elementos en la malla, en número C_{fl} , etc; a pesar de ello se pueden considerar como válidos los resultados obtenidos,

debido a que es factible encontrar este comportamiento cuando se utilizan esquemas de alto orden que cumplen con la propiedad TVD, por ejemplo ver análisis tubo de choque en Toro (2009).

Es importante remarcar que la teoría de flujo cuasi-unidimensional resulta en una herramienta útil para el estudio de toberas en régimen de funcionamiento, ya que a pesar de ser restrictiva debido a las hipótesis utilizadas para su confección, los resultados que brinda son muy acordes a la realidad como puede observarse en la Fig. (9). La ventaja de dicho tipo de análisis radica en que el costo computacional para su procesamiento es ínfimo, una simple calculadora podría resolverlas sin ningún problema, en cambio una simulación numérica requiera una gran potencia de cálculo. Por lo tanto, la utilización de la teoría de flujo cuasi-unidimensional en la etapa de pre-diseño para encontrar la geometría óptima es muy útil porque se obtienen buenos resultados y se ahorra tiempo de cálculo y procesamiento.

REFERENCIAS

- Anderson J. *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. McGraw-Hill, 3ra edición, 2003.
- Cebeci T. *Analysis of Turbulent Flows with Computer Programs*. Elsevier Ltd, 3ra edición, 2013.
- Gatski T. y Bonnet J.P. *Compressibility, Turbulence and High Speed Flow*. Elsevier Ltd, 2da edición, 2013.
- Geuzaine C. y Remacle J.F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79:1309–1331, 2009.
- Gutiérrez Marcantoni L., Tamagno J., y Elaskar S. High speed flow simulation using openfoam. *Mecánica Computacional*, 31:2939–2959, 2012.
- Gutiérrez Marcantoni L., Tamagno J., y Elaskar S. rhocentralrffoam: An openfoam solver for high speed chemically active flows—simulation of planar detonations—. *Computer Physics Communications*, 219:209–222, 2017a.
- Gutiérrez Marcantoni L., Tamagno J., y Elaskar S. Two-dimensional numerical simulations of detonation cellular structures in h₂o₂ar mixtures with openfoam®. *International Journal of Hydrogen Energy*, 42(41):26102–26113, 2017b.
- Gutiérrez Marcantoni L., Tamagno J., y Elaskar S. A numerical study on the impact of chemical modeling on simulating methane-air detonations. *Fuel*, 240:289–298, 2019.
- Hunter C. Experimental, theoretical, and computational investigation of separated nozzle flows. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, (AIAA 98-3107), 1998.
- Kurganov A. y Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160:241–282, 2000.
- Lorenzon D. y Elaskar S. Simulación de flujos supersónicos bidimensionales y axialmente simétricos con openfoam. 2015.
- OpenCFD. *OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox - User's Guide*. OpenCFD Ltd., United Kingdom, 8va edición, 2020.
- Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3ra edición, 2009.
- Versteeg H. y Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson Education Limited, 2da edición, 2007.
- Wilcox D. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 3ra edición, 2006.