

ESTUDIO SOBRE LA DINÁMICA DEL PÉNDULO PARAMÉTRICO TRIDIMENSIONAL CON MIRAS A LA RECOLECCIÓN DE ENERGÍA AMBIENTAL

STUDY ON THE DYNAMICS OF THE THREE-DIMENSIONAL PARAMETRIC PENDULUM WITH A VIEW ON AMBIENT ENERGY HARVESTING

Franco E. Dotti^{a,b}, Lisandro M. Rojas^a, J. Nicolás Virla^{a,b} y Carlos A. Vera^a

^a*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, CONICET, Argentina*

Palabras clave: Péndulo paramétrico, energía ambiental, dinámica no lineal.

Resumen. Se estudia la dinámica no lineal de un sistema de péndulo paramétrico tridimensional en términos de su capacidad de producir energía cinética, con foco en una posible aplicación de recolección de energía ambiental. Para el estudio de la dinámica, se desarrolla un modelo matemático con el cual se realizan predicciones numéricas. Dicho modelo consiste de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuya resolución revela una dinámica rica y compleja. Para lograr precisiones acerca de las configuraciones más aptas para la producción de energía cinética aprovechable, se presentan y discuten resultados empleando herramientas típicas de la dinámica no lineal como diagramas de bifurcaciones y espacios de parámetros. Los resultados de las simulaciones muestran que el movimiento tridimensional del péndulo no incrementa la generación energética, mientras que sí lo hace el hecho de forzar el péndulo en direcciones inclinadas con respecto a la vertical.

Keywords: Parametric pendulum, ambient energy, nonlinear dynamics.

Abstract. The nonlinear dynamics of a three-dimensional parametric pendulum system is studied in terms of its ability to produce kinetic energy, with focus on a possible ambient energy harvesting application. To study the dynamics, a mathematical model is developed and numerical predictions are made. This model consists of three ordinary nonlinear differential equations, which resolution a rich and complex dynamic. To achieve precisions about the most suitable configurations for the production of usable kinetic energy, results are presented and discussed using typical tools of nonlinear dynamics such as bifurcation diagrams and parameter spaces. The results of the simulations show that the three-dimensional movement of the pendulum does not increase the energy generation, while the fact of forcing the pendulum in tilted directions with respect to the vertical does.

1 INTRODUCCIÓN

El péndulo paramétrico ha desempeñado históricamente un importante rol en la dinámica no lineal, especialmente en la ilustración de sus técnicas fundamentales. Ha sido incluso la herramienta más comúnmente empleada en las primeras comprobaciones de la existencia de caos en sistemas mecánicos (McLaughlin, 1980; Leven y Koch, 1980). Actualmente, este sistema simple mantiene su utilidad pedagógica (Guo y Luo, 2020), pero además ha motivado nuevas direcciones de investigación en cuanto a su empleo como dispositivo recolector de energía ambiental, especialmente undimotriz (Dotti et al., 2015). La idea de este sistema se basa en lograr, a partir del movimiento de las olas, un estado dinámico altamente energético del péndulo, que permita convertir parte de su energía cinética en energía eléctrica mediante un generador adosado al eje pivote.

El modelo de péndulo paramétrico más empleado en la aplicación undimotriz es el denominado ‘clásico’, el cual consiste de un péndulo plano de masa puntual cuyo punto de pivote es sometido a una excitación sinusoidal vertical. El movimiento que se desea alcanzar es una rotación estacionaria, que corresponde al de mayor energía cinética. La respuesta rotacional del péndulo paramétrico clásico fue estudiada en detalle por Clifford y Bishop (1995), quienes establecieron las regiones del espacio de parámetros de forzamiento donde es factible tal respuesta. En base a estos estudios, Wiercigroch et al. (2011) propusieron emplear un péndulo paramétrico como recolector undimotriz y, seguidamente, Nandakumar et al. (2012) mostraron que era posible la extracción energética si el sistema pendular contaba con baja fricción.

Si bien la idea resulta muy prometedora, dada la alta energía que puede alcanzar un péndulo en rotación y la simplicidad del mecanismo, la tecnología es aún incipiente y afronta varios desafíos (Yurchenko y Alevras, 2018). Uno de estos desafíos corresponde a la búsqueda de configuraciones que proporcionen una mayor generación de energía, y es en el que se enfoca el presente trabajo. En tal sentido, se desarrolla un modelo general del péndulo paramétrico, que admite la tridimensionalidad en el movimiento y permite la consideración de un vector de forzamiento también tridimensional sobre el eje pivote. Como caso particular de este modelo, se cuenta al péndulo paramétrico vertical, como así también innumerables configuraciones de forzamiento inclinado y péndulos inclinados.

2 MODELO MATEMÁTICO

La Figura 1 muestra el esquema de un péndulo paramétrico tridimensional, de longitud l y masa m . Su punto de pivote O se asume como origen de un sistema cartesiano xyz , definiéndose por lo tanto las coordenadas de la masa m de la siguiente manera, en términos de los tres ángulos de Euler

$$\begin{aligned}x &= l \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\y &= l \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\z &= l \cos \theta.\end{aligned}\tag{1}$$

Los ángulos θ y ϕ son idénticos a los del sistema de coordenadas esféricas (polar y azimutal, respectivamente) mientras que ψ es el ángulo de rotación con respecto al eje de simetría del péndulo. El eje O se halla sometido a un movimiento de traslación general Δ , que corresponde al forzamiento externo, y cuyas componentes están dadas por X , Y y Z . Así, la energía cinética del sistema puede definirse de la siguiente manera

$$T = \frac{1}{2} m \left[(x' + X')^2 + (y' - Y')^2 + (z' + Z')^2 \right] + \frac{1}{2} I_0 \omega_m^2,\tag{2}$$

donde el apóstrofe denota derivación con respecto al tiempo t y ω_m es la velocidad de rotación del péndulo sobre su propio eje de simetría, dada por

$$\omega_m = \phi' \cos \theta + \psi'. \quad (3)$$

Se asume en (2) que la masa del péndulo es una esfera de radio r , por lo que $I_0 = \frac{2}{5}mr^2$. Notar que, asumiendo $X = Y = Z = 0$ en (2), se recupera la expresión de energía cinética correspondiente a una *peonza simétrica pesada con un punto fijo*, tal como la definirían Goldstein (1994) y Eckardt (2018).

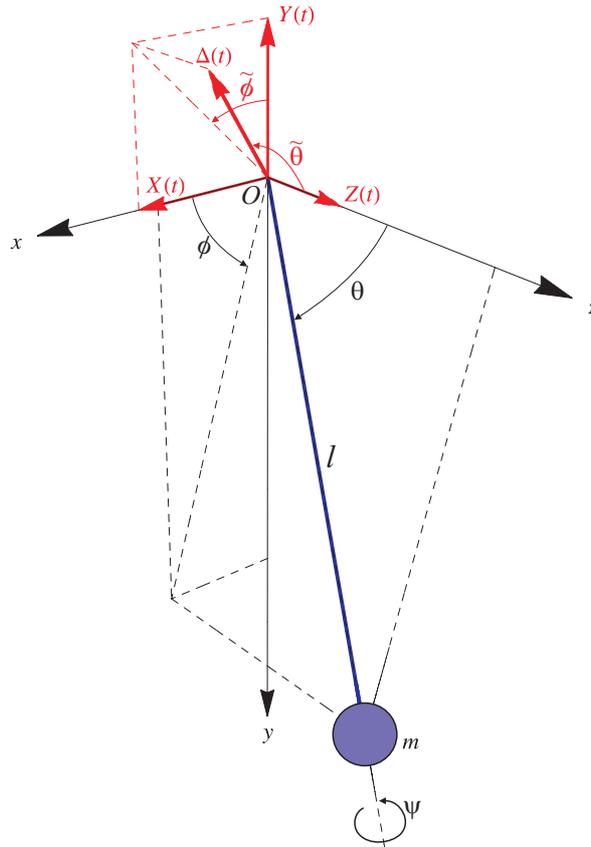


Figura 1: Esquema del péndulo paramétrico tridimensional.

Por su parte, si se asume y como eje vertical, la energía potencial del sistema puede definirse como

$$V = mg[l - y], \quad (4)$$

mientras que, asumiendo únicamente fricción viscosa, la energía disipada estará dada por

$$D = \frac{1}{2}b[x'^2 + y'^2 + z'^2], \quad (5)$$

siendo b un coeficiente de fricción.

Introduciendo (2-5) en las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas angulares θ , ϕ y ψ , se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Asumiendo un forzamiento externo dado por $\Delta = -A \cos \Omega t$, estas ecuaciones pueden escribirse en su forma adimensional como

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} - \cos \theta \sin \phi + \left(\frac{1}{5}R^2 - \frac{1}{2}\right)\dot{\phi}^2 \sin 2\theta + \frac{2}{5}R^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + p \cos \omega \tau (\cos \theta \cos \phi \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} - \cos \tilde{\theta} \sin \theta - \cos \theta \sin \phi \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}) = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{\phi} \sin \theta + \beta \dot{\phi} \sin \theta - \cos \phi (1 + p \cos \omega \tau \cos \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta}) - p \cos \omega \tau \sin \phi \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta} + \left(2 - \frac{2}{5}R^2\right)\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - \frac{2}{5}R^2 \dot{\theta} \dot{\psi} = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\psi} \sin \theta - \frac{1}{2}\beta \dot{\phi} \sin 2\theta + \cos \theta \cos \phi (1 + p \cos \omega \tau \cos \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta}) + \left(p \cos \omega \tau \sin \phi \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta} + \frac{2}{5}R^2 \dot{\theta} \dot{\psi}\right) \cos \theta + \left(\frac{1}{5}R^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{5}R^2 \cos 2\theta\right)\dot{\phi} \dot{\theta} = 0 \quad (8)$$

donde la derivación se realiza con respecto a la variable adimensional $\tau = \omega_0 t$, siendo $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ la frecuencia natural del péndulo. En (6-8) se han definido además las siguientes magnitudes adimensionales

$$\omega = \Omega/\omega_0, \quad p = \frac{A\omega^2}{l}, \quad \beta = \frac{b}{m\omega_0}, \quad R = \frac{r}{l}. \quad (9)$$

Cabe mencionar el hecho de que (6-8) recuperan el modelo del péndulo paramétrico clásico tanto si se define $\theta = \pi/2$ y $\psi = 0$, como si se define $\phi = \pi/2$ y $\psi = 0$.

Por último, se define la energía cinética adimensional empleando en (2) las relaciones (9), de la siguiente manera

$$T_{ad} = \frac{T}{ml^2\omega_0^2} = \frac{p^2 \sin^2 \omega \tau}{2\omega^2} (\cos^2 \tilde{\theta} + \cos^2 \tilde{\phi} \sin^2 \tilde{\theta} + \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\phi}) + \frac{p \sin \omega \tau}{\omega} \left\{ \dot{\theta} \sin \theta [\cos \theta \sin \tilde{\theta} \sin(\tilde{\phi} - \phi) - \cos \tilde{\theta}] - \dot{\phi} \cos(\tilde{\phi} - \phi) \sin \tilde{\theta} \right\} + \frac{2}{5}R^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \dot{\phi}^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{R^2}{10} + \left(\frac{R^2}{10} - \frac{1}{4}\right) \cos 2\theta \right] + \frac{R^2}{5} \dot{\psi}^2. \quad (10)$$

Esta magnitud resulta conveniente en el estudio numérico sobre la potencialidad del péndulo paramétrico que se presenta a continuación. Notar que R siempre aparece al cuadrado en (10). Así, en el caso de un péndulo en el que se cumpla $R \ll 1$, los términos en ψ resultarían despreciables, indicando que la rotación del péndulo sobre su eje de simetría no tiene una influencia importante en la energía cinética.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan los resultados de la investigación numérica sobre la dinámica del péndulo paramétrico tridimensional. Siendo la motivación de este trabajo una posible aplicación en generación ambiental, el estudio se enfoca en la aptitud del sistema en cuanto a su capacidad de producir energía cinética. Se compara el sistema tridimensional con otros sistemas propuestos previamente para el mismo propósito, como lo son el péndulo paramétrico vertical clásico y un sistema de péndulo inclinado.

Para resolver el sistema (6-8) se empleó el método de Runge-Kutta clásico de orden 4, realizándose las simulaciones en un ordenador de 16 Gb de memoria RAM y procesador Intel Core i7-4790. En todos los casos, se consideró $\beta = 0.1$, a partir del trabajo de [Nandakumar et al \(2012\)](#), quienes indicaron tal valor como la máxima fricción que admite un sistema de

péndulo capaz de producir energía usable. Por otra parte, en el estudio se ha considerado $R = 0.15$ en todos los casos. En tal situación, las simulaciones demostraron una mínima influencia de la rotación del péndulo sobre su eje en términos de generación energética. Por ello, si bien el grado de libertad ψ es considerado en los cálculos, no es parte del objeto principal del estudio.

La Figura 2 muestra el comportamiento bifurcacional de un péndulo paramétrico tridimensional, en términos de la energía cinética adimensional T_{ad} y su función promedio asociada en el régimen estacionario, \bar{T}_{ad} . La amplitud de forzamiento p varía entre 0 y 3, lo cual se asume como un rango operativo factible de un recolector pendular. La frecuencia de forzamiento ω se fija en el estado de resonancia paramétrica principal ($\omega = 2$).

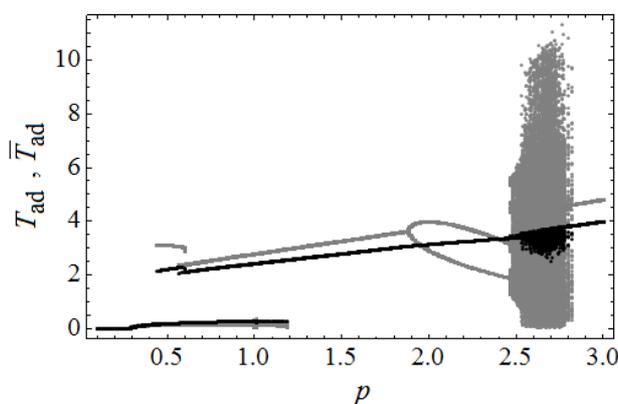


Figura 2: Diagrama de bifurcaciones del péndulo tridimensional variando el parámetro de amplitud p , para un estado de resonancia paramétrica ($\omega = 2$), con $\beta = 0.1$, $R = 0.15$, $\tilde{\theta} = \pi/2$, $\tilde{\phi} = \pi/4$. Referencia: (*): energía cinética adimensional, (•): energía cinética adimensional promedio en el régimen estacionario.

Dado que el movimiento del péndulo se produce en el espacio tridimensional, no resulta del todo preciso hablar de *oscilaciones* o *rotaciones* como en el caso del péndulo paramétrico vertical. Sería de hecho necesario redefinir más rigurosamente las denominaciones de los movimientos, lo cual no es el objetivo de este trabajo. No obstante, se usarán tales denominaciones apelando a un criterio práctico, aunque no sea del todo riguroso. Así, en el rango $0.2 < p < 1.2$ se observa una respuesta de baja energía, la cual corresponde al movimiento de la Figura 3a, y que cuenta con características de movimiento oscilatorio, con dos puntos de velocidad casi nula. Además de este movimiento, para $p = 0.58$ se cuenta con dos incipientes atractores de alta energía, que pueden asociarse con la rotación en términos del péndulo paramétrico clásico. Uno de ellos (Figura 3b) se ubica en el plano del forzamiento y resulta de efímera duración: su existencia estable se da aproximadamente en el rango $0.4 < p < 0.6$. Mientras que el otro (Figura 3c) corresponde a una rotación en plano inclinado y puede hallarse para $0.55 < p < 1.9$. Este plano inclinado gira a medida que aumenta p , como se muestra en la Figura 3d.

En el rango $1.9 < p < 2.45$, el atractor de alta energía dobla su período, generando el movimiento de la Figura 3e. Es interesante observar en la Figura 2 cómo la energía cinética promedio del atractor no disminuye al doblar su período. Esto también sucede de manera similar en el péndulo paramétrico vertical clásico, lo cual desmitifica la creencia arraigada de que las rotaciones de período 1 son muy superiores en términos de generación de energía. Más allá de $p = 2.45$ sobreviene una rápida cascada de doblamientos de período que conduce al caos. El atractor caótico produce el movimiento tipo *bola de estambre* de la Figura 3f, correspondiente a $p = 2.60$. Además, para este valor del parámetro coexisten con el caos atractores rotatorios de períodos altos (Figuras 3g y 3h) que mantienen el nivel de energía

cinética, continuando la línea aproximadamente recta que forma la energía cinética promedio en la Figura 2. Por su parte, el atractor caótico produce valores totalmente ruidosos de la energía cinética, lo que se comprueba en la zona gris en el rango $2.45 < p < 2.85$ de la Figura 2. No obstante, puede verse que la energía cinética promedio en esta región toma valores similares a los de la rotación, lo cual implica que sería factible obtener energía usable también del movimiento caótico. Por último, para $p > 2.85$ el atractor de alta energía de período 1 recupera su estabilidad, tal como se muestra en la Figura 3i, y de hecho resulta la única respuesta posible del sistema. Esta observación coincide con las realizadas por Dotti y Virla (2021) para el caso de un péndulo paramétrico inclinado.

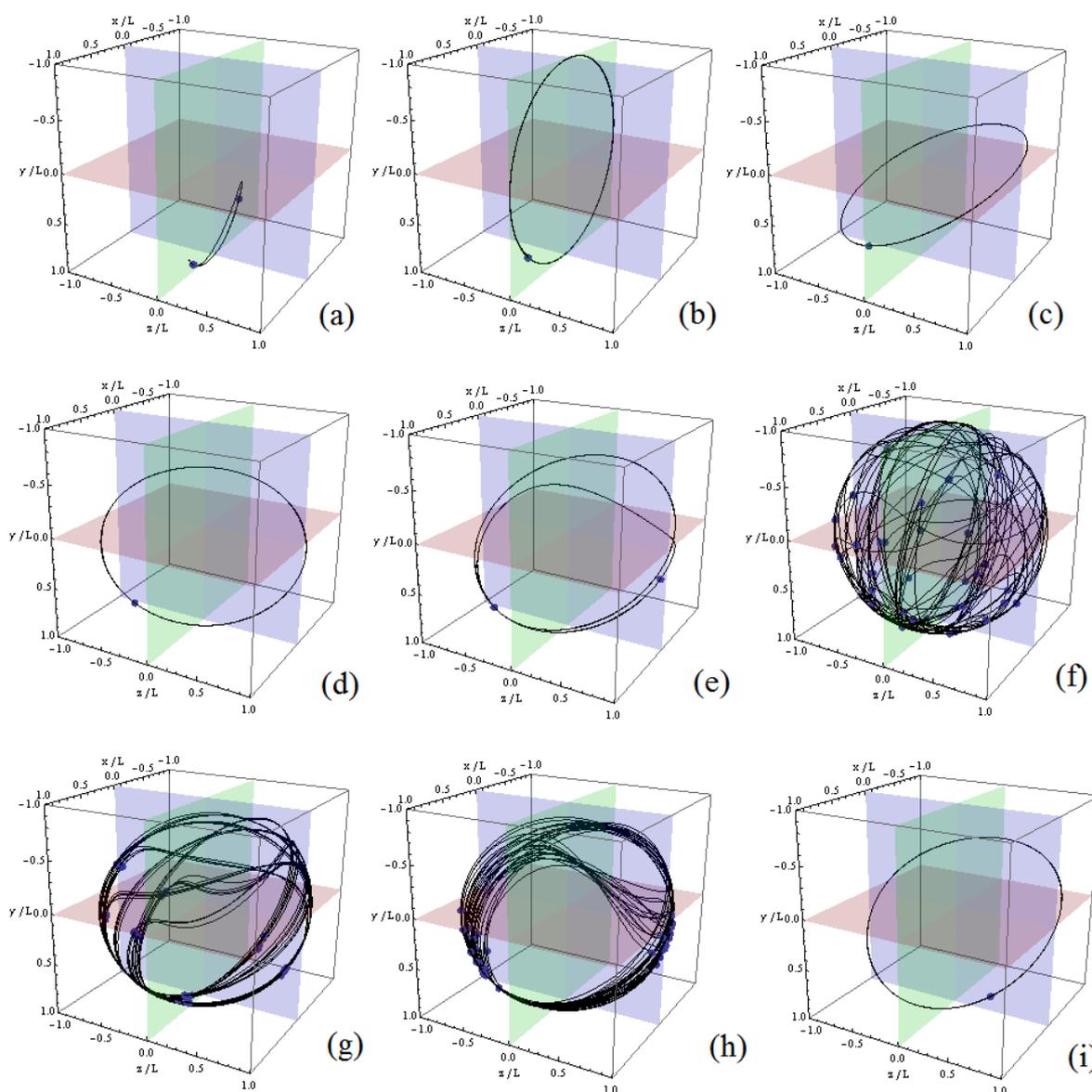


Figura 3: Respuestas estacionarias del sistema de péndulo paramétrico tridimensional de la Figura 2, junto a sus correspondientes puntos de Poincaré, para las siguientes amplitudes de forzamiento: (a) $p = 0.58$, (b) $p = 0.58$, (c) $p = 0.58$, (d) $p = 1.01$, (e) $p = 2.30$, (f) $p = 2.60$, (g) $p = 2.60$, (h) $p = 2.60$, (i) $p = 2.90$.

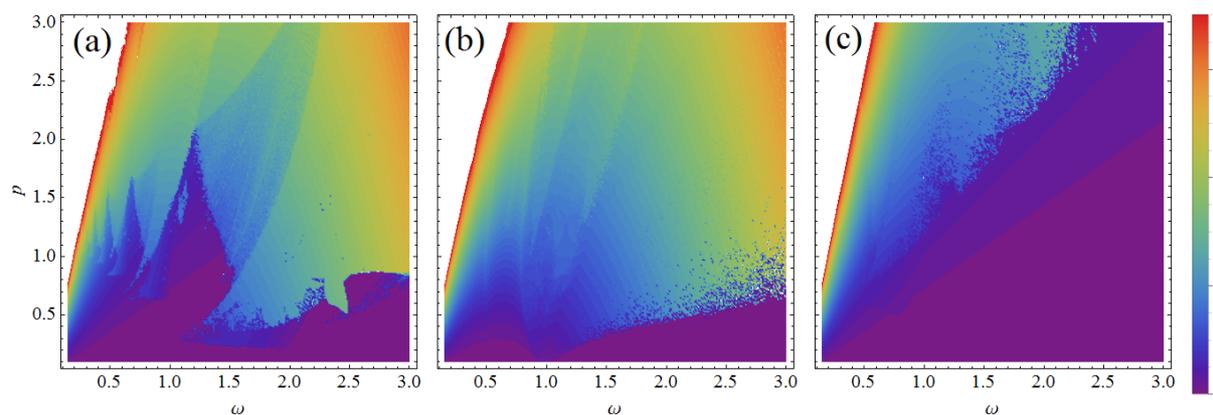


Figura 4: Espacio de parámetros p - ω indicando niveles máximos de energía cinética promedio estacionarias correspondiente a: (a) péndulo paramétrico vertical clásico ($\phi = \pi/2$, $\psi = 0$, $\tilde{\theta} = \pi/2$ y $\tilde{\phi} = 0$), (b) péndulo paramétrico tridimensional ($\tilde{\theta} = \pi/3$ y $\tilde{\phi} = \pi/3$), (c) péndulo paramétrico con forzamiento vertical y plano inclinado ($\phi = \pi/18$, $\psi = 0$, $\tilde{\theta} = \pi/2$ y $\tilde{\phi} = 0$).

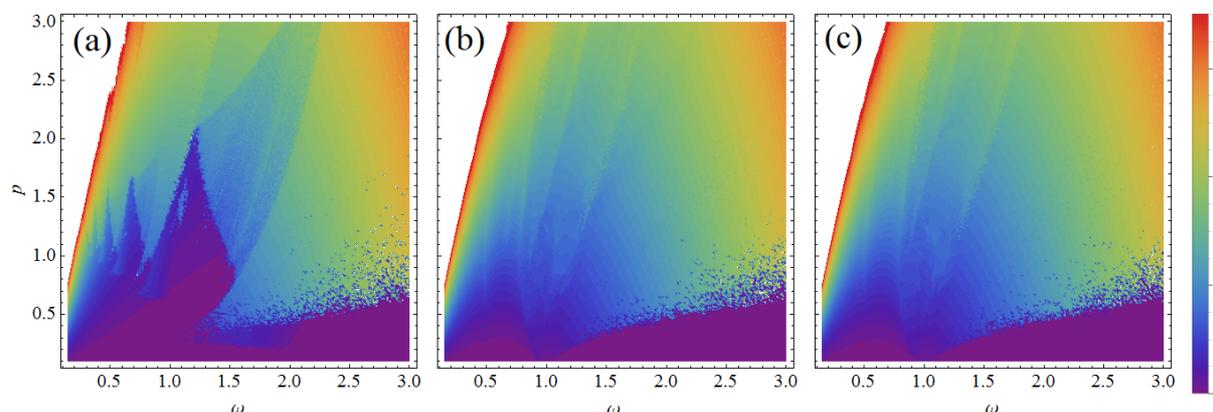


Figura 5: Espacio de parámetros p - ω indicando niveles máximos de energía cinética promedio estacionarias correspondiente a: (a) péndulo paramétrico tridimensional con $\tilde{\theta} = \pi/2$ y $\tilde{\phi} = 0$, (b) péndulo paramétrico tridimensional con $\tilde{\theta} = \pi/4$ y $\tilde{\phi} = \pi/4$, (c) péndulo paramétrico tridimensional con $\tilde{\theta} = \pi/8$ y $\tilde{\phi} = \pi/8$.

La Figura 4 muestra los tres primeros espacios de parámetros p - ω que fueron calculados resolviendo el sistema (6-8). Estas gráficas presentan niveles máximos de energía cinética promedio, para distintas configuraciones¹. La Figura 4a corresponde al péndulo paramétrico vertical clásico, con excitación únicamente en dirección y , y restringido a moverse en el plano yz . La Figura 4b corresponde a un péndulo totalmente libre de moverse tridimensionalmente y con forzamiento en una dirección inclinada con respecto a la vertical. Por último, la Figura 4c se asocia también a un péndulo con excitación únicamente en dirección y y restringido a moverse en un plano, pero inclinado alrededor de z unos 80° con respecto a la vertical. Con comparar las tres gráficas, resulta claro que la configuración de la Figura 4b es la que cuenta con mayor energía cinética. Uno podría concluir de manera apresurada –y siguiendo quizá el sentido común– que la libertad del movimiento tridimensional sería beneficiosa para un hipotético recolector pendular de energía ambiental, en relación a péndulos que sólo son

¹ La expresión adimensionalizada de la energía cinética, ecuación (10), presenta una singularidad para $\omega \rightarrow 0$. Esto se debe a que posee términos que dividen por ω y ω^2 . Esto se evidencia en las regiones en blanco de las gráficas de la Figuras 4 y 5. No obstante, se considera que las mencionadas figuras cumplen con su misión ilustrativa.

libres de moverse en un plano fijo. No obstante, además de la tridimensionalidad, la configuración de la [Figura 4b](#) cuenta con forzamiento en las tres direcciones cartesianas, a diferencia de los otros dos casos, que sólo cuentan con forzamiento en dirección y .

La [Figura 5a](#) corresponde a un péndulo tridimensional forzado únicamente en dirección y . Allí se observa que los niveles de energía cinética son similares a los de la [Figura 4a](#), lo cual indica que si el forzamiento es puramente vertical, el péndulo paramétrico tridimensional se comporta de manera casi idéntica al péndulo paramétrico clásico en cuanto a su energía cinética. A su vez, para distintas inclinaciones del vector de forzamiento Δ , se obtienen resultados similares al de la [Figura 4b](#), como se muestra en las [Figuras 5b-c](#). Esto indica que la inclinación del forzamiento sí puede resultar determinante en la generación energética. Resultados similares en cuanto a la inclinación del forzamiento fueron obtenidos por [Yurchenko y Alevras \(2018\)](#) y [Dotti y Virla \(2021\)](#) para el caso del péndulo paramétrico vertical.

4 CONCLUSIONES

En este artículo se abordó la dinámica del péndulo paramétrico tridimensional apuntando a una posible aplicación en recolección de energía ambiental. Para ello se desarrolló un modelo general de este sistema mecánico simple, que además de admitir la tridimensionalidad en el movimiento, permite la consideración de un vector de forzamiento también tridimensional sobre el eje pivot. Como caso particular, puede considerarse el péndulo paramétrico vertical clásico, como así también innumerables configuraciones de forzamiento inclinado y péndulos inclinados.

Apuntando a la generación energética, se estudió la dinámica no lineal en términos de su capacidad de producir energía cinética. Dado que el péndulo paramétrico clásico ha sido considerado para tales propósitos, se compara la dinámica general con este caso en particular. Las conclusiones más importantes del trabajo son dos:

- Si el forzamiento es puramente vertical, los niveles de energía cinética del péndulo paramétrico tridimensional resultan similares a los del péndulo paramétrico clásico. Esto permite concluir que un recolector pendular tridimensional aportaría más complicaciones desde lo constructivo que beneficios desde la generación energética.
- La inclinación de la dirección de forzamiento con respecto a la vertical sí puede resultar determinante en la generación energética. Todas las configuraciones simuladas con forzamiento inclinado produjeron en general más energía cinética que aquellas con forzamiento vertical. Este efecto se relaciona con una reducción en la influencia de la gravedad y puede verse como un resultado alentador, especialmente en situaciones donde es posible definir un mecanismo que redirija el forzamiento. No obstante, este efecto también fue observado en el caso del péndulo paramétrico clásico ([Yurchenko y Alevras, 2018](#); [Dotti y Virla, 2021](#)). Por lo tanto, esta ventaja no logra paliar la desventaja de la conclusión anterior, que alienta a descartar el péndulo paramétrico tridimensional como posible recolector de energía ambiental.

Por último, aunque el péndulo paramétrico tridimensional no cuente con utilidad tecnológica, su dinámica no lineal muestra una belleza que puede ser apreciada desde lo académico y quizá también, por qué no, desde lo artístico.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UTN, el CONICET y la CIC de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Clifford, M.J. y Bishop, S.R., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A* 201:191-196, 1995.
- Dotti, F.E., Reguera, F. y Machado, S.P., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1st PANACM*, 1516-1529, Buenos Aires, Argentina, 2015.
- Dotti, F.E. y Virla, J.N., Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16(6):061007, 2021.
- Eckardt, H., The gyroscope fully understood: Complete gyroscopic motion with external torque, <http://aias.us/documents/uft/Gyroscope.pdf>, 2018.
- Goldstein, H., *Mecánica Clásica*. Reverté, 1994.
- Guo, Y. y Luo, A.C., *Bifurcation dynamics of a damped parametric pendulum*. Morgan & Claypool, San Rafael, United States of America, 2020.
- Lenci, S. y Rega, G., Experimental versus theoretical robustness of rotating solutions in a parametrically excited pendulum: A dynamical integrity perspective. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 240(9–10):814–824, 2011.
- Leven, R.W. y Koch, B.P., Chaotic behavior of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A* 86(2):71–74, 1981.
- McLaughlin, J.B., Period-doubling bifurcations and chaotic motion for a parametrically forced pendulum. *Journal of Statistical Physics* 24(2):375–388, 1981.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M. y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications* 43:7-14, 2012.
- Wiercigroch, M., J., Najdecka, A. y Vaziri, V., Nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting. *Vibration Problems ICOVP 2011: The 10th International Conference on Vibration Problems, Springer Proceedings in Physics* 139:35-42, 2011.
- Yurchenko, D. y Alevras, P., Dynamics of the N -pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control* 1(4):290-299, 2013.